
UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01078548 3

TRAITÉ

DES

ORBITES ABSOLUES DES PLANÈTES.

TRAITÉ ANALYTIQUE

DES

ORBITES ABSOLUES

DES HUIT

PLANÈTES PRINCIPALES

PAR

HUGO GYLDÉN,
ASTRONOME DE L'ACADÉMIE ROY. DES SCIENCES.

TOME I.

THÉORIE GÉNÉRALE DES ORBITES ABSOLUES.

STOCKHOLM
F. & G. BEIJER.
1893.
CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
MARKGRAFENSTRASSE 51.

PARIS
A. HERMANN.
8 RUE DE LA SORBONNE.

A SA MAJESTÉ

OSCAR II

ROI DE SUÈDE ET DE NORVÈGE.

TÉMOIGNAGE RESPECTUEUX
D'UNE PROFONDE RECONNAISSANCE

L'AUTEUR.

PRÉFACE.

Le but du travail dont voici le premier tome est double.

Ayant reconnu que les anciennes méthodes d'étudier les mouvements des planètes ne suffisaient pas aux demandes de l'astronomie moderne, il me paraissait urgent de chercher des règles de calcul en vertu desquelles on pourrait évaluer les inégalités des planètes avec une exactitude aussi parfaite qu'on voudrait. Cela revient à représenter ces inégalités sous une forme qui permet de les calculer pour toute valeur du temps. En d'autres termes, il s'agissait d'établir des méthodes qui ne se trouveraient pas en défaut dans des cas difficiles et ne conduiraient pas à des développements divergents. Voilà le premier objet de mon travail.

Ensuite, puisque les théories numériques des planètes principales sont indispensables à l'astronomie, j'ai fait en sorte de les établir sur le fondement des nouvelles méthodes. Mais, l'intention n'étant pas, du moins quant à présent, de mener les calculs numériques à un tel degré de perfectionnement qu'on en puisse se servir pour la construction des tables, je me suis borné à calculer les inégalités avec une exactitude suffisante pour déterminer les termes élémentaires, ou bien, ce qui revient au même, les perturbations séculaires et les éléments absolues.

A l'occasion des études sur les matières dont il s'agit, il était avantageux de considérer aussi une autre face du grand problème des plusieurs corps. En effet, les perturbations séculaires montant, dans le courant des siècles, à des quantités qui sont comparables aux excentricités et aux inclinaisons mutuelles des diverses orbites elliptiques de notre système planètaire, c'est improprement que l'on considérait l'effet de ces influences comme des perturbations d'un état moyen. On a donc abandonné la conception des ellipses képleriens, ce qui devenait utile aussi par d'autres raisons, en la remplaçant par celle des orbites absolues. Ainsi, on a fixé une notion qui se prête mieux que la précédente à inspirer des idées justes sur les mouvements effectifs des planètes.

La première partie du présent ouvrage est consacré à l'exposition de la théorie générale des orbites absolues. Quelques points qui n'y sont pas encore traités en détail, seront repris dans les deux parties prochaines.

Dans la deuxième partie, on donnera un exposé des inégalités des huit planètes dépendant de leurs configurations; la troisième partie renfermera, finalement, la détermination des termes élémentaires et celle des valeurs numériques des éléments absolus.

Un tableau de certains coefficients dépendant de nombres entiers sera publié à part.

Je dois, à cette occasion, témoigner mes vifs remercîments à M. M. Callandreau, Bohlin et Dickman du précieux concours qu'ils ont bien voulu me prêter, soit quant aux matières, soit quant à la rédaction du présent volume.

Stockholm, décembre 1893.

PREMIÈRE PARTIE.

THÉORIE GÉNÉRALE DES ORBITES ABSOLUES.

LIVRE PREMIER.

Cinématique des orbites absolues.

On va traiter, dans ce livre, la théorie du mouvement d'un point dont la trajectoire ne s'écarte jamais considérablement de l'orbite vraie d'une planète.

On y suppose cette orbite pas beaucoup différente d'un cercle et peu inclinée sur l'écliptique, et les aires parcourues par le rayon vecteur, croissant en raison d'une certaine fonction du temps, le rapport de cette fonction au temps étant à peu près égal à l'unité.

Quant à la forme des trajectoires, on a abandonné la conception de l'ellipse, vu qu'on est porté à concevoir les éléments elliptiques comme soumis à des altérations assez considérables; on a remplacé cette courbe par une autre dont les apsides sont mobiles.

Ces principes, s'appuyant sur des observations et sur des théories antérieures, constituent la base des recherches dans le livre présent.

CHAPITRE I.

Courbes périplégmatiques.

1. Une courbe qui parcourt incessamment l'espace entre deux sphères homocentriques, et qui tourne à chaque point sa concavité vers une droite, menée par le centre de façon qu'une perpendiculaire abaissée du point considéré traverse la sphère intérieure, sera appelée *courbe périplégmatique.*

Fixons à ce centre l'origine des coordonnées.

Généralement, le rayon vecteur d'une courbe périplégmatique atteint, abstraction faite du cas d'une courbe tracée sur une troisième sphère homocentrique et intermédiaire, certains maxima et minima dont les valeurs sont comprises entre celles des rayons des deux sphères; mais il peut aussi arriver que la courbe touche toujours, sans la couper, au maximum de son rayon vecteur, la sphère extérieure, et au minimum, la sphère intérieure. On pourraitdonc distinguer deux groupes de ces courbes: l'un par la détermination spéciale que les maxima et les minima du rayon vecteur soient toujours égaux aux rayons des deux sphères; l'autre groupe renfermera les courbes qui n'atteignent, à chaque maximum ou minimum de leur rayon vecteur, aucune des sphères entourantes.

Réciproquement, si l'on admet l'idée d'une distance variable entre les deux sphères, on peut caractériser les deux groupes par la constance ou par la variabilité de l'espace dans lequel serpente la courbe périplégmatique, en touchant, sans couper jamais, l'une ou l'autre des sphères, toutes les fois que le rayon vecteur acquiert une valeur maxima ou minima. En nommant *diastème* la distance entre les deux sphères et en supposant constante la somme de leurs rayons, on distinguera donc les courbes périplégmatiques à diastème constant de pareilles courbes à diastème variable.

Concevons les courbes périplégmatiques dont la trace ne sort pas d'un plan. Une telle courbe touche à chaque maximum ou minimum de son rayon vecteur l'un ou l'autre des cercles entourants, et elle tourne toujours sa concavité vers une droite menée par le centre de la dite manière ou bien, ce qui revient au même, vers la tangente au cercle intérieur dans le point où se coupent ce cercle et le rayon vecteur.

En désignant par x et y les coordonnées cartésiennes dans un système convenablement situé et par H, une fonction qui reste positive, tant que x n'excède pas le rayon du cercle intérieur lorsqu'il est raccourci le plus possible, la condition que la courbe tourne sa concavité vers l'axe de x sera exprimée au moyen de l'équation

$$(1) \qquad y\frac{d^2y}{dx^2} = -H$$

Par l'équation (1), on a donc établi, analytiquement, la seconde condition à laquelle doit satisfaire une courbe périplégmatique; la première

condition, à savoir celle qui concerne la limitation du rayon vecteur, ne peut guère s'exprimer, d'une manière aisée, en maintenant les coordonnées rectangulaires. Remplaçons-les donc par des coordonnées polaires.

Dans ce but, désignons par r le rayon vecteur, par v, l'angle que fait le rayon vecteur avec une direction fixe et par ω, l'angle entre l'axe de x et la dite direction. Cela posé, nous aurons:

$$x = r\cos(v - \omega); \qquad y = r\sin(v - \omega),$$

d'où l'on tire, par différentiation,

$$\frac{dx}{dv} = \frac{dr}{dv}\cos(v - \omega) - r\sin(v - \omega),$$

$$\frac{dy}{dv} = \frac{dr}{dv}\sin(v - \omega) + r\cos(v - \omega).$$

Par division, il en résulte finalement:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dr}{dv}\sin(v - \omega) + r\cos(v - \omega)}{\frac{dr}{dv}\cos(v - \omega) - r\sin(v - \omega)}$$

De cette expression, on déduit, après avoir effectué une seconde différentiation, et en remplaçant le facteur $\frac{dv}{dx}$, par son expression en v, r et $\frac{dr}{dv}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-r\frac{d^2r}{dv^2} + 2\left(\frac{dr}{dv}\right)^2 + r^2}{\left\{\frac{dr}{dv}\cos(v - \omega) - r\sin(v - \omega)\right\}^3}.$$

Avec les expressions que nous venons d'établir, l'équation (1) prend la forme

$$r\frac{d^2r}{dv^2} - 2\left(\frac{dr}{dv}\right)^2 - r^2 = \frac{\left\{\frac{dr}{dv}\cos(v - \omega) - r\sin(v - \omega)\right\}^3}{r\sin(v - \omega)} H,$$

où l'on peut se figurer H comme une fonction de r et de v.

Mais l'équation à laquelle nous sommes parvenus, est susceptible d'une simplification assez considérable. En effet, la condition de la concavité non interrompue vers une droite qui passe par le centre dans une direction telle

que x reste moindre que le rayon du cercle intérieur, est évidemment remplie si l'on fait coincider la dite direction avec une droite menée par le centre perpendiculairement au rayon vecteur. Par là, on est autorisé à mettre:

$$\omega - v = 90^\circ,$$

ce qui donne:

$$r\frac{d^2r}{dv^2} - 2\left(\frac{dr}{dv}\right)^2 - r^2 = -r^2 H. \tag{2}$$

Avant d'aller plus loin, il conviendra d'établir l'équation (2) d'une manière différente de celle que nous avons suivie. Dans ce but, désignons par α l'angle dont la tangente trigonométrique est égale à $\frac{dy}{dx}$, et rappelons-nous la formule connue

$$\frac{d\alpha}{dv} = -\frac{r\frac{d^2r}{dv^2} - 2\left(\frac{dr}{dv}\right)^2 - r^2}{r^2 + \left(\frac{dr}{dv}\right)^2}.$$

Figurons-nous maintenant qu'on ait mené une tangente au cercle intérieur dans le point d'intersection avec le rayon vecteur, et désignons par α_0 l'angle que forme cette tangente avec l'axe des x. En supposant, pour un moment, α_0 constant, il sera évident que, si l'angle $\alpha - \alpha_0$ tend à augmenter avec v, de sorte que la dérivée de cet angle soit une quantité positive, la courbe dont la tangente forme l'angle α avec l'axe des x, est concave vers la tangente au cercle intérieur. Donc, si nous posons:

$$\frac{d\alpha}{dv} = \frac{r^2}{r^2 + \left(\frac{dr}{dv}\right)^2} H,$$

H étant une quantité positive, nous retrouverons tout-de-suite l'équation (2).

Encore une remarque relativement à la quantité H. En désignant par R le rayon de courbure dont l'expression connue est

$$R = -\frac{\left(r^2 + \left(\frac{dr}{dv}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{r\frac{d^2r}{dv^2} - 2\left(\frac{dr}{dv}\right)^2 - r^2},$$

on aura en vertu de l'équation (2) l'expression que voici:

$$(3) \qquad R = \frac{\left(r^2 + \left(\frac{dr}{dv}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{r^2 H}.$$

On conclut facilement de cette formule que moins la courbe périplégmatique s'écarte d'un cercle, plus approché de l'unité sera le facteur H.

Revenons maintenant à l'équation (2) afin de chercher l'expression analytique de la condition que le rayon vecteur soit compris entre des limites finies.

L'équation dont il s'agit se met facilement sous la forme que voici:

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{dv^2} + \frac{1}{r} = \frac{1}{r} H,$$

ou bien, si l'on désigne par p une constante, elle s'écrit aussi:

$$(4) \qquad \frac{d^2\frac{p}{r}}{dv^2} + \frac{p}{r} = \frac{p}{r} H.$$

Faisons-y:

$$\frac{p}{r} = 1 + \rho; \qquad H = \frac{r}{p}(1 + P),$$

ρ et P étant des nouvelles fonctions remplaçant r et H; nous aurons de la sorte

$$(5) \qquad \frac{d^2\rho}{dv^2} + \rho = P.$$

Maintenant, si par l'intégration de cette équation, il résulte une expression de ρ dont la valeur reste au dessus de -1 et ne devient jamais infinie, le rayon vecteur ne sortira en dehors des deux limites finies. En conséquence, l'equation entre ρ et v, obtenue par l'intégration dont il a été question, ou plutôt, l'équation entre r et v qui en résulte se construit géométriquement par une courbe périplégmatique.

Pour avoir une valeur toujours positive de H, il faut que celle de P surpasse constamment -1. La courbe définie par l'équation (5) sera donc une courbe périplégmatique, si l'on a toujours:

$$\rho > -1; \quad P > -1$$

Voilà les conditions primaires auxquelles il faut satisfaire nécessairement, mais on peut leur donner une précision encore plus grande. En effet, pour que le rayon vecteur soit susceptible de maxima et de minima, il faut que la seconde dérivée $\frac{d^2\rho}{dv^2}$ prenne alternativement des signes opposés, d'où suit la condition que les valeurs de $P - \rho$ doivent osciller autour de zéro. Mais malgré cette restriction ultérieure, la fonction P reste considérablement arbitraire, de sorte qu'on peut la choisir de plusieurs manières assez différentes. Nous allons donc examiner, succinctement, les divers types auxquels il y a lieu, dans la théorie des mouvements des corps célestes, de ramener cette fonction.

2. L'équation (2) se dégage du terme dépendant de la première dérivée si l'on y introduit, au lieu de v, une nouvelle variable indépendante τ dont la relation à v est exprimée par l'équation

$$dv = \frac{\sqrt{c}}{r^2}\, d\tau,$$

c étant une constante. On obtient de la sorte, en effet, l'équation

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} - \frac{c}{r^3} = -\frac{c}{r^3} H. \tag{6}$$

En supposant que H soit une fonction de r seul, l'équation signalée admet une intégrale, à savoir:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{c}{r^2} = -h - 2c \int \frac{H}{r^3}\, dr, \tag{7}$$

où l'on a désigné par $-\frac{1}{2} h$ l'arbitraire introduite par l'intégration.

Pour étudier la nature des maxima et des minima, faisons d'abord $\frac{dr}{d\tau}$ égal à zéro. On obtient ainsi:

$$\frac{c}{r^2} = -h - 2c \int \frac{H}{r^3}\, dr, \tag{8}$$

équation qui doit admettre au moins une racine réelle et positive, si la constante h a été choisie d'une manière convenable. Si cette équation n'admet

qu'une seule racine positive, ni une racine égale à zéro non plus, la courbe définie par l'équation (5) n'atteindra jamais un maximum.

Mais l'équation (8) peut avoir plusieurs racines positives. Or, s'il y en a deux ne renfermant pas entre elles une troisième, lesquelles rendent le résultat de leur substitution dans la formule

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = -\frac{c}{r^2}(H - 1)$$

alternativement positif et négatif, ces deux racines établissent un maximum et un minimum du rayon vecteur. Et encore, ce maximum et ce minimum ne dépendant que des constantes sont les seuls que peut atteindre le rayon vecteur, de sorte que la courbe dont il s'agit touchera alternativement les deux circonférences dont les rayons sont constants. Dans ce cas, la courbe définie par l'équation (5) est donc une courbe périplégmatique à diastème constant.

Maintenons l'hypothèse que l'équation (8) admette deux racines positives dont l'une corresponde à un minimum, et l'autre à un maximum de r, désignons-les par r_0 et r_1, et mettons finalement l'équation (8) sous la forme

$$\frac{(r - r_0)(r_1 - r)}{(F(r))^2} = 0,$$

$F(r)$ étant une fonction de r qui ne prend pas la valeur zéro, ni une valeur infinie autant que r reste entre r_0 et r_1.

Cela étant, l'équation (7) s'écrit ainsi:

$$d\tau = \frac{F(r)\,dr}{\sqrt{(r - r_0)(r_1 - r)}},$$

ce qui entraîne la suivante

$$dv = \frac{\sqrt{c}}{r^2}\frac{F(r)\,dr}{\sqrt{(r - r_0)(r_1 - r)}};$$

et si l'on admet la notation

$$V = \int_{r_0}^{r_1} \frac{\sqrt{c}\,F(r)\,dr}{r^2\sqrt{(r - r_0)(r_1 - r)}},$$

V signifiera l'angle entre deux apsides, en entendant par ce mot la direction vers un maximum ou vers un minimum du rayon vecteur.

Par la formule précédente, on conclut immédiatement que l'angle entre deux apsides consécutives est toujours constant, propriété des courbes en question, reconnue déjà par LEGENDRE. Mais, puisque cet angle n'est qu'exceptionnellement multiple ou une partie aliquote de la circonférence, les apsides tombent dans toutes les directions, de sorte que la ligne périplégmatique se coupant, elle même, une infinité de fois, forme un réseau entre les deux cercles.

Evidemment, la nature périplégmatique d'une courbe définie par l'équation (5) est due aux valeurs de Π oscillant autour de l'unité. Or, si l'on a posé:

$$\Pi = \frac{r}{p}(1 + P),$$

cette propriété de Π tient d'abord aux variations du rapport $\frac{r}{p}$ ayant l'unité pour valeur moyenne, mais elle provient encore des changements de la fonction P qui pourraient s'écarter des deux côtés de zéro. On retrouve ainsi, après avoir introduit la fonction ρ au lieu de r, la condition signalée vers la fin du n° précédent.

Il sera quelquefois utile d'introduire une troisième variable indépendante. Désignons-la par u, et par β, une constante à choisir plus tard. Admettons finalement la relation suivante entre v et u:

$$du = \frac{r}{\beta\sqrt{c}}\,dv,$$

ce qui entraîne celle-ci entre u et τ:

$$du = \frac{d\tau}{\beta r},$$

et nous aurons au lieu de l'équation (7) la suivante:

$$(9) \qquad \frac{1}{\beta^2}\left(\frac{dr}{du}\right)^2 = -c - hr^2 - 2cr^2\int \frac{\Pi}{r^3}\,dr.$$

Il convient d'ajouter celle-ci

$$(10) \qquad \left(\frac{dr}{dv}\right)^2 = -r^2 - \frac{h}{c}r^4 - 2r^4\int \frac{\Pi}{r^3}\,dr,$$

qui s'obtient immédiatement en remplaçant u ou τ par v.

3. Elucidons par quelques exemples les formules que nous venons de déduire dans le n° précédent.

En admettant d'abord la fonction Π égale à zéro, l'expression (3) donnant le rayon de courbure sera infinie. Il en suit que la trace déterminée par l'équation (7) est une droite.

Cherchons ce résultat d'une autre voie.

Puisque la condition que Π oscille autour de l'unité n'est pas satisfaite, on est certain dès le début que la trajectoire n'appartient pas à la catégorie des courbes périplégmatiques. Mais voilà seulement un résultat négatif: pour dévoiler la nature de la courbe, examinons l'équation (4) après y avoir annulé la fonction Π. En désignant par c_0 et c_1 les deux constantes d'intégration, on obtient

$$\frac{p}{r} = c_0 \sin v + c_1 \cos v,$$

ou bien, si l'on met:

$$x = r\cos v; \qquad y = r\sin v,$$

$$c_0 y + c_1 x = p.$$

C'est là l'équation d'une droite.

Etablissons encore l'expression de r en retenant τ comme variable indépendante.

Si l'on met, dans l'équation (7), Π égal à zéro, et qu'on écrive $-h$ au lieu de h, elle s'écrit ainsi:

$$\frac{rdr}{\sqrt{hr^2 - c}} = d\tau;$$

donc, en désignant par $-h\tau_0$ une arbitraire, la relation finale entre r et τ sera:

$$hr^2 - c = h^2(\tau - \tau_0)^2.$$

Ce résultat permet une construction géométrique assez simple: en effet, r est hypoténuse d'un triangle rectangulaire dont les cathètes sont $\sqrt{\frac{c}{h}}$ et $(\tau - \tau_0)\sqrt{h}$. On peut donc placer le système des coordonnées rectangulaires de manière qu'on ait:

$$\xi = (\tau - \tau_0)\sqrt{h}; \qquad \eta = \sqrt{\frac{c}{h}}$$

Supposons dans un second exemple H égal à $\frac{r}{p}$. En introduisant cette valeur dans l'équation (9), il viendra:

$$\frac{1}{c_i\beta^2}\left(\frac{dr}{du}\right)^2 = -\frac{h}{c}r^2 + \frac{2r}{p} - 1,$$

et on en tire, après avoir égalé à zéro le second membre de cette équation,

$$r = \frac{c}{ph} \pm \frac{c}{ph}\sqrt{1 - \frac{p^2h}{c}}.$$

La condition qu'il faut remplir pour avoir toutes les deux racines réelles et positives, s'exprime au moyen des inégalités

$$1 > \frac{p^2h}{c} > 0$$

ou bien, en mettant:

$$p = a(1 - e^2); \qquad \frac{c}{h} = a^2(1 - e^2),$$

par celles-ci:

$$1 > 1 - e^2 > 0.$$

La formule précédente donnant les deux racines se change donc en la suivante:

$$r = a(1 \pm e),$$

et on obtiendra, après avoir adopté les valeurs

$$\beta = \sqrt{a}; \qquad c = a(1 - e^2)$$

l'équation

$$du = \frac{\frac{dr}{ae}}{\sqrt{1 - \frac{\left(1 - \frac{r}{a}\right)^2}{e^2}}}.$$

Dans notre troisième exemple, nous allons admettre

$$H = \mu^2\left(1 - \frac{2}{r}\right) + 1 + \frac{2}{r^2}\left(\frac{dr}{dv}\right)^2$$

μ étant un coefficient constant.

Cette expression de H dépendant non seulement de r mais aussi de $\frac{dr}{dv}$, il en résultera néanmoins une équation différentielle qui s'intègre immédiatement. En effet, si l'on introduit l'expression dont il s'agit dans l'équation (2), on en tire la suivante

$$\frac{d^2r}{dv^2} + \mu^2(r - 2) = 0,$$

dont l'intégrale est:

$$\left(\frac{dr}{dv}\right)^2 = \mu^2(l - (r - 2)^2),$$

où l'on a désigné par $\mu^2 l$ la constante d'intégration.

En posant:

$$l = 1; \qquad \mu dv = dt,$$

on retombe dans les équations:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{\mu}; \qquad \frac{dr}{dt} = \sqrt{1 - (r - 2)^2},$$

que M. Poincaré a traité dans son mémoire »sur les courbes définies par les équations différentielles».

L'intégrale complète de notre équation différentielle se met sous la forme

$$r = 2 - \cos(\mu v + C),$$

C étant une seconde arbitraire. En y supposant μ incommensurable avec la circonférence, on en déduira facilement les propriétés de la courbe signalées par M. Poincaré, notamment celle que la courbe s'entortille autour du centre des deux cercles en sillonnant la couronne entre eux de manière que les points d'intersection remplissent entièrement cet espace.

Si l'on introduit, dans l'expression admise de H, les valeurs de r correspondant aux apsides, à savoir:

$$r_0 = 1; \qquad r_1 = 3,$$

on obtient les deux résultats que voici:

$$H = 1 - \mu^2; \qquad H = 1 + \frac{1}{3}\mu^2.$$

Donc, si μ est moindre que l'unité, la quantité $H - 1$ prend des valeurs alternativement positives et négatives sans que H devienne jamais négatif: en conséquence, la courbe est périplégmatique dans le sens de ce mot que j'ai établi dans le premier numéro. Mais si au contraire μ était plus grand que l'unité, on rencontrerait des valeurs négatives de H, ce qui entraînerait des changements dans le sens de la courbure, de sorte que la courbe serait alternativement concave et convexe vers la circonférence intérieure: dans ce cas, la courbe cesserait d'être périplégmatique.

4. Venons maintenant à un exemple qui présente plusieurs analogies avec le type dernièrement considéré, mais où les courbes, contrairement à ce qui avait lieu dans le cas de M. Poincaré, ne changent pas le sens de la courbure. Pour y arriver, supposons:

$$H = \frac{r}{p}\left(1 + \beta_1\left(\frac{p}{r} - 1\right)\right) = (1 - \beta_1)\frac{r}{p} + \beta_1$$

$$= \frac{1 + \beta_1 \rho}{1 + \rho},$$

β_1 étant une constante que nous supposons plus petite que l'unité.

Avec cette expression, nous aurons immédiatement de l'équation (4) celle-ci:

$$\frac{d^2\rho}{dv^2} + (1 - \beta_1)\rho = 0,$$

d'où l'on tire, en désignant par $\varkappa$ et Γ deux arbitraires,

$$\rho = \varkappa \cos[(1 - \varsigma)v - \Gamma],$$

le coefficient de v étant donné en vertu de la formule

$$1 - \varsigma = \sqrt{1 - \beta_1}.$$

D'un autre côté, si l'on porte la valeur adoptée de H dans l'équation (9), il viendra:

$$\frac{1}{\beta^2 c(1 - \beta_1)}\left(\frac{dr}{du}\right)^2 = -\frac{h}{c(1 - \beta_1)}r^2 + \frac{2r}{p} - 1;$$

et si l'on suppose, dans cette équation,

$$\beta = \sqrt{\frac{a}{1-\beta_1}}; \qquad \frac{c(1-\beta_1)}{h^2} = a^2(1-\chi^2); \qquad p = a(1-\chi^2) = c,$$

il s'ensuivra:

$$du = \frac{1}{a}\frac{dr}{\sqrt{\chi^2 - \left(1-\frac{r}{a}\right)^2}},$$

d'où l'on tire:

$$r = a(1-\chi\cos u).$$

Puis, en admettant la notation

$$f = (1-\varsigma)v - \Gamma,$$

il sera facile d'obtenir les expressions

$$du = \frac{1-\chi\cos u}{\sqrt{1-\chi^2}}\,df; \qquad (1-\chi\cos u)\,du = (1-\varsigma)a^{-\frac{3}{2}}d\tau,$$

après quoi, en les intégrant, on parvient aux résultats

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}f = \sqrt{\frac{1+\chi}{1-\chi}}\operatorname{tang}\frac{1}{2}u; \qquad (1-\varsigma)a^{-\frac{3}{2}}(\tau-\tau_0) = u - \chi\sin u,$$

la constante arbitraire, introduite par l'intégration de la seconde équation différentielle, étant désignée par $-(1-\varsigma)a^{-\frac{3}{2}}\tau_0$.

On obtient finalement r en fonction de f au moyen de l'expression

$$r = \frac{a(1-\chi^2)}{1+\chi\cos f}.$$

Qu'on remarque l'analogie des formules que nous venons d'établir avec celles de notre deuxième exemple: il n'y a, en effet, entre les deux systèmes de formules qu'une seule différence, à savoir que, dans les formules de l'exemple présent, l'argument f remplace l'argument v figurant dans les formules du second exemple. Cependant, la nature de la courbure, définie par l'équation précédente, est bien différente de celle d'une ellipse; elle a cela de commun avec l'ellipse, il est vrai, de rester toujours périplégmatique, pourvu que l'arbitraire χ soit inférieure à l'unité, mais elle jouit, comme

les courbes de M. POINCARÉ, de la propriété d'avoir une infinité de points d'intersection. Cherchons à les déterminer.

Dans ce but, concevons deux points de la courbe dont les longitudes diffèrent, l'une de l'autre, d'un nombre entier de circonférences. En désignant ces longitudes par $v_{k.l}$ et $v_{l.k}$, k et l étant deux entiers quelconques dont la différence sera d, de sorte qu'on ait:

$$k - l = d,$$

et par $V_{l.d}$, la valeur de $v_{k.l}$ ou de $v_{l.k}$ qui subsistent lorsque k ou l est égal à zéro, on aura:

$$v_{k.l} = 2k\pi + V_{l.d}; \qquad v_{l.k} = 2l\pi + V_{l.d}.$$

Puis, pour établir l'égalité entre les rayons vecteurs appartenant aux longitudes signalées, ce qui est nécessaire pour déterminer un point d'intersection, il faut qu'on ait:

$$(1 - \varsigma)v_{k.l} - \Gamma = 2h\pi \mp (1 - \varsigma)v_{l.k} \pm \Gamma,$$

h étant une troisième entière prise à volonté.

Par les relations établies, on obtient:

$$2(k \pm l)\pi + (1 \pm 1)V_{l.d} - (1 \pm 1)\frac{\Gamma}{1 - \varsigma} = \frac{2h\pi}{1 - \varsigma},$$

d'où il est immédiatement visible qu'il faut prendre les signes supérieurs.

Cela posé, nous aurons:

$$V_{l.d} = \frac{\Gamma}{1 - \varsigma} + \left[\frac{h}{1 - \varsigma} - k - l\right]\pi$$
$$= \frac{\Gamma}{1 - \varsigma} + \left[\frac{h}{1 - \varsigma} - 2l - d\right]\pi.$$

Avec cette valeur, il sera facile d'arriver aux expressions:

$$(1 - \varsigma)v_{k.l} - \Gamma = [h + d(1 - \varsigma)]\pi,$$
$$(1 - \varsigma)v_{l.k} - \Gamma = [h - d(1 - \varsigma)]\pi;$$

donc, si l'on admet h égal à $k + l$, il viendra:

$$(1 - \varsigma)v_{k.l} - \Gamma = 2k\pi - d\varsigma\pi,$$
$$(1 - \varsigma)v_{l.k} - \Gamma = 2l\pi + d\varsigma\pi,$$

et la supposition h égal à $k + l + 1$ entraîne les valeurs

$$(1 - \varsigma) v_{k.l} - \Gamma = (2k + 1)\pi - d\varsigma\pi,$$

$$(1 - \varsigma) v_{l.k} - \Gamma = (2l + 1)\pi + d\varsigma\pi.$$

Maintenant, si nous désignons par r_d la valeur de r qui résulte de la formule générale, en y portant les expressions signalées de l'argument, nous aurons:

$$1) \qquad h = k + l,$$

$$r_d = \frac{a(1 - \varkappa^2)}{1 + \varkappa \cos d\varsigma\pi}; \qquad V_{l.d} = \frac{\Gamma}{1 - \varsigma} + \frac{(2l + d)\varsigma\pi}{1 - \varsigma},$$

$$2) \qquad h = k + l + 1,$$

$$r_d = \frac{a(1 - \varkappa^2)}{1 - \varkappa \cos d\varsigma\pi}, \qquad V_{l.d} = \frac{\Gamma + \pi}{1 - \varsigma} + \frac{(2l + d)\varsigma\pi}{1 - \varsigma}.$$

En attribuant à h d'autres valeurs que celles qu'on a supposées ci-dessus, on retomberait toujours dans l'un ou l'autre des cas déjà cosidérés. Nous ne distinguons donc que ces deux cas.

Dans les formules que nous venons d'établir, l et d peuvent acquérir les valeurs de tous les nombres entiers, positifs et négatifs, zéro y compris. Cependant, si l'on y fait d égal à zéro, on ne déterminera plus un point d'intersection, mais bien un point sur l'un ou l'autre des cercles concentriques, lesquels sont touchés seulement par la courbe périplégmatique; puis, en n'admettant que les valeurs positives de d, on aura néanmoins tous les points d'intersection, vu qu'on pourra toujours supposer $k > l$.

Cela étant, si l'on attribue à l les valeurs des nombres entiers, positives et négatives, et qu'on suppose d constant, on aura une infinité de points d'intersection, tous situés sur la circonférence d'un cercle — on peut l'appeler *isopycnote* — dont le rayon est donné par l'une ou l'autre des expressions précédentes de r_d. Ensuite, si l'on renouvelle ce procédé avec une autre valeur de d, on aura une nouvelle suite de points d'intersection le long d'un nouvel isopycnote, et ainsi de suite. De la sorte, on obtient, en mettant au lieu de d les nombres entiers, une infinité d'isopycnotes.

Considérons deux points sur le même isopycnote. En désignant les deux valeurs de l par l et l_1, on aura les relations

$$V_{l.d} = \frac{\Gamma}{1 - \varsigma} + \frac{(2l + d)\varsigma\pi}{1 - \varsigma}; \qquad V_{l_1 d} = \frac{\Gamma}{1 - \varsigma} + \frac{(2l_1 + d)\varsigma\pi}{1 - \varsigma},$$

dont la différence est:

$$V_{l_1 d} - V_{l d} = \frac{2(l_1 - l)\varsigma\pi}{1 - \varsigma}$$

Faisons voir qu'on peut prendre le nombre l_1 de manière que la différence que nous avons mise en évidence soit si près d'un multiple de 2π qu'on voudra, le nombre l étant fixé. En effet, si l'on désigne par m un nouvel entier, et par δ, une quantité irrationnelle plus petite que l'unité, on peut mettre

$$\frac{(l_1 - l)\varsigma}{1 - \varsigma} = m + \delta,$$

d'où:

$$\frac{\delta}{l_1 - l} = \frac{\varsigma}{1 - \varsigma} - \frac{m}{l_1 - l}$$

Evidemment, les nombres $l_1 - l$ et m peuvent être choisis de manière à rendre le rapport $\frac{m}{l_1 - l}$ si approché de $\frac{\varsigma}{1 - \varsigma}$ que l'on voudra. Il s'ensuit, à employer la terminologie de M. G. Cantor, que les points d'intersection sont condensés dans toute l'étendue de l'isopycnote, et que les ensembles sur les divers isopycnotes sont des images, les unes des autres. Il est encore évident que la condensation est la même dans toutes les directions.

Sur chaque rayon vecteur appartenant à un $V_{l.d}$, prolongé jusqu'à la circonférence extérieure, se trouve une infinité de points d'intersection, condensés dans toute l'étendue de ce rayon entre les deux circonférences entourantes, mais la condensation n'est pas uniforme dans cette étendue.

Pour démontrer cette thèse, rappelons-nous qu'on obtient exactement la même valeur de $V_{l.d}$, si l'on introduit, dans les formules générales, des valeurs de l et d satisfaisant aux conditions

$$2l + d = 2l_1 + d_1 = 2l_2 + d_2 = \ldots;$$

il y a donc une infinité de points d'intersection sur chaque rayon vecteur.

Mais, voyons encore comment sont distribués ces points sur les divers rayons.

Dans ce but, après avoir désigné par n un nombre entier, et par ε, une quantité déterminée au moyen de la formule

$$(d_1 - d)\varsigma = 2n + 2\varepsilon,$$

de sorte qu'on a:

$$\frac{\varepsilon}{d_1 - d} = \frac{1}{2}\varsigma - \frac{n}{d_1 - d},$$

concevons les expressions

$$r_d = \frac{a(1 - \chi^2)}{1 + \chi \cos d\varsigma\pi},$$

$$r_{d_1} = \frac{a(1 - \chi^2)}{1 + \chi \cos d_1\varsigma\pi} = \frac{a(1 - \chi^2)}{1 + \chi \cos(d\varsigma\pi + 2\varepsilon\pi)}.$$

On en déduit:

$$r_{d_1} - r_d = \frac{a\chi(1 - \chi^2)}{(1 + \chi \cos d\varsigma\pi)(1 + \chi \cos(d\varsigma\pi + 2\varepsilon\pi))}\left[\cos d\varsigma\pi - \cos(d\varsigma\pi + 2\varepsilon\pi)\right],$$

$$= \frac{2a\chi(1 - \chi^2)\sin\varepsilon\pi \sin(d\varsigma\pi + \varepsilon\pi)}{(1 + \chi \cos d\varsigma\pi)(1 + \chi \cos(d\varsigma\pi + 2\varepsilon\pi))}.$$

De ces relations, il sera facile de conclure qu'on pourra choisir les entiers n et d_1 (d étant fixé) de façon que la quantité ε, et en conséquence, la différence $r_{d_1} - r_d$ soit moindre que toute quantité donnée. De là, il se comprend que la condensation des points d'intersection s'étend sur toute la portion du rayon vecteur comprise entre les deux circonférences.

Mais la condensation dans cette étendue n'est pas uniforme: elle est plus grande près du cercle intérieur qu'au voisinage du cercle extérieur, et notamment au milieu de ces deux cercles, ce qui s'entend immédiatement de la formule précédente, qui montre que la différence $r_{d_1} - r_d$ prend les plus petites valeurs, lorsque $d\varsigma\pi$ est près d'un multiple de π, et les plus grandes, lorsque ce produit s'approche d'un multiple impair de $\frac{1}{2}\pi$.

A chaque point où se coupent les diverses spires de la courbe que nous venons d'étudier dans le n° précédent, on peut mener deux tangentes touchant l'une et l'autre partie de la trace.

Désignons généralement les angles que forment ces tangentes avec la direction fondamentale par α, de sorte qu'on aura

$$\operatorname{cotang}(\alpha - v) = \frac{1}{r}\frac{dr}{dv},$$

$$= \frac{\chi(1 - \varsigma)\sin((1 - \varsigma)v - \Gamma)}{1 + \chi\cos((1 - \varsigma)v - \Gamma)}.$$

Si, dans cette formule, on introduit au lieu de v, l'une après l'autre les valeurs $v_{k.l}$ et $v_{l.k}$, et qu'on nomme $\alpha_{k.l}$ et $\alpha_{l.k}$ les valeurs que prend α en vertu de ces deux substitutions, on parvient aux formules

$$\operatorname{tang}(90^\circ - (\alpha_{k.l} - v_{k.l})) = \frac{\varkappa(1 - \varsigma)\sin d\varsigma\pi}{1 + \varkappa\cos d\varsigma\pi},$$

$$\operatorname{tang}(90^\circ - (\alpha_{l.k} - v_{l.k})) = -\frac{\varkappa(1 - \varsigma)\sin d\varsigma\pi}{1 + \varkappa\cos d\varsigma\pi},$$

desquelles on tire:

$$\alpha_{k.l} + \alpha_{l.k} = v_{k.l} + v_{l.k} + 180^\circ,$$

ou bien, en ne tenant pas compte des révolutions entières,

$$\alpha_{k.l} + \alpha_{l.k} = 2V_{l.d} + 180^\circ.$$

Tant que ς est un nombre irrationnel, ainsi que le produit $\varsigma\pi$, l'angle $90^\circ - (\alpha_{k.l} - v_{k.l})$ ne peut pas disparaître exactement, et en conséquence, les deux tangentes menées à un point d'intersection, ne peuvent non plus coincider. Mais, il y a une infinité de points d'intersection où l'angle que forment les deux tangentes est plus petit que toute grandeur désignée.

Il s'ensuit encore que l'angle formé par les deux normales est divisé par le rayon vecteur en deux parties égales.

L'expression du rayon de courbure devenant avec les valeurs signalées de v:

$$R = \alpha(1 - \varkappa^2)\frac{\left(1 + \left(\frac{\varkappa(1 - \varsigma)\sin d\varsigma\pi}{1 + \varkappa\cos d\varsigma\pi}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{1 + \beta_1\varkappa\cos d\varsigma\pi}; \qquad h = k + l,$$

$$R = \alpha(1 - \varkappa^2)\frac{\left(1 + \left(\frac{\varkappa(1 - \varsigma)\sin d\varsigma\pi}{1 - \varkappa\cos d\varsigma\pi}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{1 - \beta_1\varkappa\cos d\varsigma\pi}; \qquad h = k + l + 1$$

il s'ensuit que la courbure des deux spires est la même au point d'intersection; néanmoins, à ce point, il y a deux rayons de courbure égaux et faisant, l'un avec l'autre, l'angle $\alpha_{k.l} - \alpha_{l.k}$.

Voilà l'exemple le plus simple d'une courbe périplégmatique non fermée: nous en avons examiné les propriétés un peu en détail, vu que dans

les cas plus compliqués que nous allons envisager prochainement, les choses seront à peu près les mêmes.

5. Si l'on admet, pour constituer une généralisation de l'exemple que nous venons de traiter,

$$H = \frac{r}{p}\left\{ 1 + \beta_1\left(\frac{p}{r} - 1\right) + \beta_2\left(\frac{p}{r} - 1\right)^2 + \ldots \right\},$$

ou bien:

$$P = \beta_1\rho + \beta_2\rho^2 + \ldots,$$

les β étant des quantités très petites, on aura encore une expression périodique de ρ qui reste toujours inférieure à l'unité, pourvu que les arbitraires introduites par l'intégration acquièrent des valeurs convenables.

En effet, si l'on introduit dans l'équation (5) l'expression de P qu'on vient d'indiquer, il en résultera:

$$\rho = \varkappa_0 + \varkappa_1 \cos f + \varkappa_2 \cos 2f + \varkappa_3 \cos 3f + \ldots.$$

On y a, comme auparavant, nommé f l'angle $(1 - \varsigma)v - \Gamma$.

Les deux constantes d'intégration étant désignées par $\varkappa$ et Γ, les coefficients $\varkappa_0$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, ... s'évanouissent évidemment avec $\varkappa$, et ils deviennent avec cette quantité très petits; ils prennent encore, à l'exception du coefficient $\varkappa_1$, des valeurs très petites avec les β.

Ce que nous venons de dire relativement aux coefficients $\varkappa$ découle immédiatement de leurs expressions approchées qu'on obtient aisément. Les voici:

$$(1 - \beta_1)\varkappa_0 = \frac{1}{2}\beta_2\varkappa^2 + \frac{3}{8}\beta_4\varkappa^4 + \ldots,$$

$$\varkappa_1 = \varkappa,$$

$$[-2^2(1-\varsigma)^2 + 1 - \beta_1]\varkappa_2 = \frac{1}{2}\beta_2\varkappa^2 + \frac{1}{2}\beta_4\varkappa^4 + \ldots,$$

$$[-3^2(1-\varsigma)^2 + 1 - \beta_1]\varkappa_3 = \frac{1}{4}\beta_3\varkappa^3 + \ldots,$$

$$[-4^2(1-\varsigma)^2 + 1 - \beta_1]\varkappa_4 = \frac{1}{8}\beta_4\varkappa^4 + \ldots,$$

. . . .

auxquelles il faut ajouter l'équation de condition

$$-(1-\varsigma)^2 + 1 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3 x^2 + \frac{5}{8}\beta_5 x^4 + \ldots$$

d'où s'obtient le coefficient ς.

Je n'insiste pas à donner plus amplement la théorie du développement dont il s'agit, théorie d'ailleurs assez connue par les travaux de plusieurs savants. Je remarque seulement que ce développement est convergent, ce qu'on peut conclure immédiatement des expressions par lesquelles sont donnés les coefficients.

La trajectoire définie par l'équation

$$r = \frac{p}{1 + x_0 + x_1 \cos f + x_2 \cos 2f + \ldots}$$

est une courbe périplégmatique non fermée, jouissant des propriétés principales que nous avons signalées dans le n° précédent.

Pour corroborer cette assertion, cherchons d'abord les points d'intersection qu'ont les diverses spires de la courbe. En opérant comme dans le n° 4, nous retrouvons la condition

$$(1-\varsigma)v_{k.l} - \Gamma = 2h\pi - (1-\varsigma)v_{l.k} + \Gamma,$$

qui nous donne, en remplaçant h par $k+l$ et $k+l+1$, l'un après l'autre,

$$1) \qquad h = k + l,$$

$$r_l = \frac{p}{1 + x_0 + x_1 \cos f + x_2 \cos 2f + \ldots}; \qquad V_{l.d} = \frac{\Gamma}{1-\varsigma} + \frac{(2l+d)\varsigma\pi}{1-\varsigma},$$

$$2) \qquad h = k + l + 1$$

$$r_d = \frac{p}{1 + x_1 - x_1 \cos f + x_2 \cos 2f - \ldots}; \qquad V_{l.d} = \frac{\Gamma + \pi}{1-\varsigma} + \frac{(2l+d)\varsigma\pi}{1-\varsigma}.$$

De ces expressions, on conclut immédiatement que les points d'intersection sont situés sur des isopycnotes, et que ces courbes sont des cercles ayant r_d pour rayon.

Nous ne nous arrêtons pas à établir l'expression de $r_{d_1} - r_d$, qui sera, en effet, différente de celle donnée dans le n° précédent: il nous suffit de remarquer que la condensation des points d'intersection le long du rayon vecteur est plus grande vers les limites de la couronne qu'elle ne l'est à son milieu.

Quant aux tangentes qu'on peut mener à chaque point d'intersection, il y en a toujours deux. Les angles que font ces tangentes avec la direction de l'origine des arcs, s'obtiennent au moyen des formules

$$\operatorname{tang}(90^\circ - (\alpha_{k,l} - v_{l,k})) = \frac{(1-\varsigma)(z_1 \sin d\varsigma\pi + 2z_2 \sin 2d\varsigma\pi + \ldots)}{1 + z_0 + z_1 \cos d\varsigma\pi + z_2 \cos 2d\varsigma\pi + \ldots},$$

$$\operatorname{tang}(90^\circ - (\alpha_{k,l} - v_{l,k})) = -\frac{(1-\varsigma)(z_1 \sin d\varsigma\pi + 2z_2 \sin 2d\varsigma\pi + \ldots)}{1 + z_0 + z_1 \cos d\varsigma\pi + z_2 \cos 2d\varsigma\pi + \ldots},$$

d'où l'on conclut:

$$\alpha_{k,l} + \alpha_{l,k} = 2V_{l,k} + 180^\circ$$

La courbe dont nous venons d'exposer succinctement les principales propriétés peut être considérée comme le type le plus général des courbes périplégmatiques, résultant de l'hypothèse que H soit une fonction de r seul. Dans certains cas, subordonnés à cette hypothèse, on pourra mettre l'intégrale de l'équation (4) sous une forme finie, en l'exprimant au moyen de fonctions elliptiques ou ultraelliptiques; mais cette forme, n'offrant pas d'intérêt à la théorie des mouvements des planètes, et du reste, ayant été étudiée à plusieures reprises, je n'en ferai pas l'exposition quant à présent.

6. Venons maintenant à l'hypothèse que H soit une fonction de v seul, ne contenant que des termes périodiques.

Dans le présent ouvrage, il s'agira très souvent d'agrégats de termes périodiques dont le nombre peut être fini ou infini, et dont les arguments sont formés par la variable indépendante v, multipliée par un nombre quelconque λ_n, auquel produit est ajouté un angle constant b_n. Je vais établir, dès le début, une notation particulière pour signifier une telle somme, que je nomme brièvement *agrégat périodique*. Or, en désignant par $a_1, a_2, \ldots$ des coefficients quelconques qui forment, si leur nombre est infini, une série convergente, je pose:

$$a_1 \cos(\lambda_1 v + b_1) + a_2 \cos(\lambda_2 v + b_2) + \ldots = C \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots \\ b_1 & b_2 & \ldots \end{vmatrix} (v),$$

$$a_1 \sin(\lambda_1 v + b_1) + a_2 \sin(\lambda_2 v + b_2) + \ldots = S \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots \\ b_1 & b_2 & \ldots \end{vmatrix} (v).$$

ou bien, s'il n'est pas nécessaire de distinguer les divers coefficients,

$$a_1 \cos(\lambda_1 v + b_1) + \ldots = \mathrm{C}(a\lambda b)(v),$$
$$a_1 \sin(\lambda_1 v + b_1) + \ldots = \mathrm{S}(a\lambda b)(v).$$

Egalement, je vais employer un symbole spécial pour dénoter un agrégat complexe, à savoir la somme d'un agrégat C et le produit de l'agrégat correspondant S par l'unité imaginaire. La notation dont je me servirai est celle-ci:

$$\mathrm{C}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots \\ b_1 & b_2 & \ldots \end{bmatrix}(v) + i\mathrm{S}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots \\ b_1 & b_2 & \ldots \end{bmatrix}(v) = \mathrm{E}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots \\ b_1 & b_2 & \ldots \end{bmatrix}(iv),$$

ou plus brièvement:

$$\mathrm{C}(a\lambda b)(v) + i\mathrm{S}(a\lambda b)(v) = \mathrm{E}(a\lambda b)(iv).$$

Dans toute expression de la nature indiquée, les éléments a seront nommés *coefficients*, les éléments λ, *vitesses* de l'argument, et les éléments b, *arguments initiaux*.

Evidemment, on peut supposer tous les coefficients positifs, vu qu'il est permis, dans le cas d'un coefficient primitivement négatif, de changer le signe, pourvu qu'on ajoute simultanément $\pm \pi$ à l'argument initial.

Quelquefois, il serait utile de désigner l'argument complet par un seul symbole. Dans ce cas, les expressions précédentes peuvent être simplifiées. En effet, si l'on admet les notations

$$x_1 = \lambda_1 v + b_1; \qquad x_2 = \lambda_2 v + b_2; \qquad \ldots \quad ;$$

on aura, ce qui est très facile à comprendre,

$$\mathrm{C}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots \\ b_1 & b_2 & \ldots \end{bmatrix}(v) = \mathrm{C}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots \\ x_1 & x_2 & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots \end{bmatrix}(1).$$

Dans le second membre de cette identité, on peut évidemment supprimer, sans aucun inconvénient, les arguments initiaux, qui sont partout égaux à

zéro, ainsi que l'unité, qui figure, à la place de la variable indépendante, entre les deux dernières parenthèses. De la sorte, on aura

$$\mathrm{C}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots \\ x_1 & x_2 & \dots \end{bmatrix} = a_1 \cos x_1 + a_2 \cos x_2 + \dots$$

et de même:

$$\mathrm{S}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots \\ x_1 & x_2 & \dots \end{bmatrix} = a_1 \sin x_1 + a_2 \sin x_2 + \dots .$$

Les agrégats périodiques jouissent de quelques propriétés générales, utiles à connaître: j'en vais donner un exposé rapide.

D'abord: on peut toujours mettre un agrégat périodique n'ayant aucune vitesse de l'argument égale à zéro sous forme d'un produit de deux facteurs dont l'un, le coefficient, ne passe jamais par zéro, et l'autre, un cosinus ou un sinus, dépend d'un argument dont la vitesse est toujours différente de zéro, et dont la partie initiale est un nouvel agrégat périodique ou du moins, une fonction oscillant entre deux limites finies à laquelle se trouve ajouté un multiple pair de la demicirconférence.

Désignons par λ et b deux quantités constantes, réelles et encore indéterminées; il s'entend facilement qu'on peut mettre:

$$\mathrm{C}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots \\ b_1 & b_2 & \dots \end{bmatrix}(v) = \cos(\lambda v + b)\,\mathrm{C}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots \\ \lambda_1 - \lambda & \lambda_2 - \lambda & \dots \\ b_1 - b & b_2 - b & \dots \end{bmatrix}(v)$$
$$- \sin(\lambda v + b)\,\mathrm{S}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots \\ \lambda_1 - \lambda & \lambda_2 - \lambda & \dots \\ b_1 - b & b_2 - b & \dots \end{bmatrix}(v),$$

$$\mathrm{S}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots \\ b_1 & b_2 & \dots \end{bmatrix}(v) = \sin(\lambda v + b)\,\mathrm{C}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots \\ \lambda_1 - \lambda & \lambda_2 - \lambda & \dots \\ b_1 - b & b_2 - b & \dots \end{bmatrix}(v)$$
$$+ \cos(\lambda v + b)\,\mathrm{S}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots \\ \lambda_1 - \lambda & \lambda_2 - \lambda & \dots \\ b_1 - b & b_2 - b & \dots \end{bmatrix}(v).$$

Cela étant, nous allons former deux nouvelles fonctions ε et θ, en les définissant au moyen des équations

$$(11)\quad \begin{cases} \varepsilon\cos\theta = \mathrm{C}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots \\ \lambda_1 - \lambda & \lambda_2 - \lambda & \dots \\ b_1 - b & b_2 - b & \dots \end{bmatrix}(v), \\ \varepsilon\sin\theta = \mathrm{S}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots \\ \lambda_1 - \lambda & \lambda_2 - \lambda & \dots \\ b_1 - b & b_2 - b & \dots \end{bmatrix}(v), \end{cases}$$

et nous chercherons à déterminer, s'il est possible, la constante λ de manière à débarasser la fonction θ de tout terme de nature séculaire.

Les relations que nous venons d'établir s'écrivant ainsi

$$\varepsilon e^{i\theta} = \mathrm{E}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots \\ \lambda_1 - \lambda & \lambda_2 - \lambda & \dots \\ b_1 - b & b_2 - b & \dots \end{bmatrix}(iv),$$

$$\varepsilon e^{-i\theta} = \mathrm{E}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots \\ \lambda - \lambda_1 & \lambda - \lambda_2 & \dots \\ b - b_1 & b - b_2 & \dots \end{bmatrix}(iv),$$

on en tire:

$$e^{2i\theta} = \frac{\mathrm{E}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots \\ \lambda_1 - \lambda & \lambda_2 - \lambda & \dots \\ b_1 - b & b_2 - b & \dots \end{bmatrix}(iv)}{\mathrm{E}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots \\ \lambda - \lambda_1 & \lambda - \lambda_2 & \dots \\ b - b_1 & b - b_2 & \dots \end{bmatrix}(iv)}.$$

Or, si nous supposons a_1 plus grand que les autres coefficients et si nous admettons les notations

$$\alpha_2 = \frac{a_2}{a_1}; \qquad \alpha_3 = \frac{a_3}{a_1}; \qquad \dots,$$

nous aurons:

$$(12)\quad 2i\theta = 2i[(\lambda_1 - \lambda)v + b_1 - b] + \log\{1 + \alpha_2 e^{i[(\lambda_2 - \lambda_1)v + b_2 - b_1]} + \dots\} \\ - \log\{1 + \alpha_2 e^{-i[(\lambda_2 - \lambda_1)v + b_2 - b_1]} + \dots\}.$$

Le développement de cette formule s'opère de deux manières différentes selon qu'on a:

$$1 > \alpha_2 + \alpha_3 + \dots$$

ou:

$$1 < \alpha_2 + \alpha_3 + \dots$$

Dans le premier cas, les deux termes logarithmiques se développent aisément suivant les puissances et les produits des coefficients, et il s'aperçoit immédiatement que les développements en résultant contiendront seulement des termes périodiques. On conclut de là que, si l'on fait λ égal à λ_1, et b égal à b_1, l'expression de θ sera un agrégat periodique sans aucun terme constant. Les résultats de la transformation seront alors:

$$(13) \quad \begin{cases} C\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots \\ b_1 & b_2 & \dots \end{bmatrix}(v) = \varepsilon \cos(\lambda_1 v + b_1 + \theta), \\ S\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots \\ b_1 & b_2 & \dots \end{bmatrix}(v) = \varepsilon \sin(\lambda_1 v + b_1 + \theta). \end{cases}$$

Pour étudier l'autre cas, qui est, en effet, plus compliqué, faisons:

$$X = C\begin{bmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 & \dots \\ \lambda_2 - \lambda_1 & \lambda_3 - \lambda_1 & \dots \\ b_2 - b_1 & b_3 - b_1 & \dots \end{bmatrix}(v),$$

$$Y = S\begin{bmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 & \dots \\ \lambda_2 - \lambda_1 & \lambda_3 - \lambda_1 & \dots \\ b_2 - b_1 & b_3 - b_1 & \dots \end{bmatrix}(v),$$

et ensuite:

$$1 + X = \vartheta \cos U,$$

$$Y = \vartheta \sin U.$$

Il s'entend d'abord, en comparant ces expressions avec celles que nous venons de signaler un peu plus haut, qu'on a:

$$\varepsilon = a_1 \vartheta,$$

$$2i\theta = 2i[(\lambda_1 - \lambda)v + b_1 - b] + \log \frac{1 + i \operatorname{tang} U}{1 - i \operatorname{tang} U},$$

$$= 2i[(\lambda_1 - \lambda)v + b_1 - b] + 2iU.$$

Maintenant, pour déterminer les deux fonctions ϑ et U, considérons les relations

$$\vartheta^2 = (1 + X)^2 + Y^2,$$

$$U = \operatorname{arc tang} \frac{Y}{1 + X},$$

$$= \operatorname{arc sin} \frac{Y}{\sqrt{(1 + X)^2 + Y^2}}.$$

Par la première de ces expressions, il est visible que la fonction ϑ^2 oscille entre une valeur minima qui est, abstraction faite du cas spécial où l'on a:

$$1 = \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots,$$

nécessairement positive, et une valeur maxima également positive.

Désignons la première de ces valeurs par g_1, et la seconde par g_2; et posons:

$$\vartheta^2 = \frac{1}{2}(g_2 + g_1) + \frac{1}{2}(g_2 - g_1)W,$$

W étant une fonction dont la valeur n'excède jamais les limites -1 et $+1$. En mettant finalement:

$$\frac{g_2 - g_1}{g_2 + g_1} = \frac{2\beta}{1 + \beta^2},$$

nous aurons:

$$\vartheta^2 = \frac{g_2 + g_1}{2(1 + \beta^2)}\{1 + 2\beta W + \beta^2\}. \tag{14}$$

Puisque le coefficient β est, excepté dans le cas spécial déjà mentionné, moindre que l'unité, il s'ensuit de la formule trouvée qu'on peut développer

les fonctions $\vartheta^{-1}, \vartheta^{-3}, \ldots$ en séries suivant les puissances croissantes de β. Ensuite, il sera facile, en désignant par n un entier quelconque, de former le développement

$$V = 2n\pi + (1 \mp 1)\frac{\pi}{2} \pm \left\{\frac{Y}{\vartheta} + \frac{1}{2}\frac{Y^3}{3\vartheta^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{Y^5}{5\vartheta^5} + \ldots\right\},$$

qui reste toujours convergent, vu que le rapport $\frac{Y}{\vartheta}$ ne surpasse jamais l'unité positive ou négative.

Maintenant, si l'on établit les égalités

$$\lambda = \lambda_1; \qquad b = b_1 + 2n\pi,$$

on aura:

$$(15) \qquad \theta = (1 \mp 1)\frac{\pi}{2} \pm \left\{\frac{Y}{\vartheta} + \frac{1}{2}\frac{Y^3}{3\vartheta^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{Y^5}{5\vartheta^5} + \ldots\right\},$$

d'où l'on conclut, en choisissant les signes d'une manière convenable, que la fonction θ ne sort pas des limites $-\frac{1}{2}\pi$ et $+\frac{3}{2}\pi$.

Le résultat auquel nous sommes arrivés, se retrouve d'ailleurs directement en portant dans les expressions de $\varepsilon \cos\theta$ et de $\varepsilon \sin\theta$ les valeurs signalées de λ et de b. On obtient ainsi:

$$2i\theta = \log\left|\frac{1 + \dfrac{iY}{1 + X}}{1 - \dfrac{iY}{1 + X}}\right|$$

qui se transforme facilement en celle-ci:

$$i\theta = \log\frac{1 + X + iY}{\sqrt{(1 + X)^2 + Y^2}}$$

$$= \log\left\{\frac{iY}{\sqrt{(1 + X)^2 + Y^2}} + \sqrt{1 - \frac{Y^2}{(1 + X)^2 + Y^2}}\right\}.$$

Il s'ensuit:

$$\sin\theta = \frac{Y}{\sqrt{(1 + X)^2 + Y^2}},$$

d'où l'on retrouve immédiatement le développement dont il s'agit. Nous déterminerons, dans une section suivante, la fonction θ d'une autre manière.

Ayant obtenu les résultats généraux que nous venons de signaler, on en conclut aisément que les agrégats périodiques constituent des fonctions oscillant entre des limites variables dont l'amplitude maxima s'exprime par le produit $2a_1\sqrt{g_2}$, g_2 étant toujours la valeur maxima de la fonction ϑ^2. Or, un tel agrégat, loin d'atteindre à chaque oscillation ses limites extrêmes, à savoir $+a_1\sqrt{g_2}$ et $-a_1\sqrt{g_2}$, n'arrive qu'aux valeurs $+\varepsilon_1$ et $-\varepsilon_2$, que prend la fonction ε lorsque $\lambda_1 v + b_1 + \theta$ est égal à des multiples de π ou de $\frac{1}{2}\pi$. Mais, à chaque oscillation, l'agrégat périodique passe par zéro.

Après avoir mis au jour ces propriétés des agrégats périodiques qui sont, en effet, les plus essentielles, revenons au cas proposé, où l'on a admis:

$$H = a_0 + C\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots \\ b_1 & b_2 & \dots \end{bmatrix}(v).$$

En introduisant cette expression dans l'équation (4), on arrive à une équation différentielle linéaire du deuxième ordre, dont l'intégrale s'exprime au moyen de la formule

$$\frac{p}{r} = \frac{C_1 e^{\nu v + \nu\int z\,dv} + C_2 e^{-\nu v - \nu\int z\,dv}}{\sqrt{1+z}},$$

C_1 et C_2 étant les deux constantes d'intégration, z, un agrégat périodique, dont la valeur n'atteint pas l'unité, et ν, un coefficient constant, qui peut être réel ou imaginaire, et qui dépend des coefficients a_0, a_1, ... ainsi que des vitesses λ_1, λ_2, ...[1]

Si ν est réel, la fonction $\frac{p}{r}$ croît hors de toute limite finie; si au contraire ν est imaginaire, cette fonction passe une infinité de fois par zéro. En conséquence: ni dans l'un, ni dans l'autre cas, la courbe qui représente géométriquement l'intégrale indiquée, n'est une courbe périplégmatique, bien que la fonction H puisse osciller autour de l'unité, de sorte qu'elle ne devienne jamais négative, ce qui pourrait arriver, si par exemple a_0 était égal à 1.

---

[1] Voir mon mémoire: Nouvelles recherches sur les séries employées dans les théories des planètes, § 7.

7. Une petite modification de l'hypothèse que nous venons d'étudier dans le n° précédent, nous conduit à l'équation d'une courbe périplégmatique. Admettons, à cette fin,

$$H = \frac{r}{p} - \left(1 - \frac{r}{p}\right)A,$$

A étant un agrégat périodique auquel se trouve ajoutée une constante.

Maintenant, si nous remplaçons $\frac{p}{r}$ par $1 + \rho$, nous arriverons à l'équation

$$\frac{d^2\rho}{dv^2} + (1 + A)\rho = 0,$$

dont l'intégrale s'obtient sous la forme

$$\rho = \frac{C_1 e^{\nu v + \nu\int z dv} + C_2 e^{-\nu v - \nu\int z dv}}{\sqrt{1 + z}},$$

C_1, C_2, z et ν ayant les mêmes significations que dans l'exemple précédent.

En supposant ν imaginaire, ce qui est nécessaire pour éviter les valeurs de ρ croissant à l'infini, le résultat que nous venons de déduire se met sous la forme d'un agrégat périodique, d'où l'on conclut que la fonction ρ oscille entre des limites variables: en conséquence, le rayon vecteur, qui est donné au moyen de l'expression

$$r = \frac{p}{1 + \frac{C_1 e^{\nu v + \nu\int z dv} + C_2 e^{-\nu v - \nu\int z dv}}{\sqrt{1 + z}}},$$

prend, lui aussi, des valeurs extrêmes dont l'amplitude est variable.

Admettons, après avoir mis $i\nu$ à la place de ν, les notations

$$\frac{C_1}{\sqrt{1 + z}} = \frac{1}{2}\eta e^{-i\Gamma}; \qquad \frac{C_2}{\sqrt{1 + z}} = \frac{1}{2}\eta e^{i\Gamma}:$$

l'expression précédente se changera alors dans la suivante:

$$r = \frac{p}{1 + \eta \cos\left(\nu v + \nu\int z dv - \Gamma\right)}$$

On s'aperçoit immédiatement que le rayon vecteur reste constamment fini, tant que la fonction η n'atteint pas l'unité. Pour remplir cette condition, il faut et il suffit que la valeur minima de $1 + z$ soit plus grande que celle du produit $4C_1C_2$. Mais, si cette condition est satisfaite, la trajectoire déterminée par l'équation précédente est une courbe périplégmatique à diastème variable, pourvu qu'on ait:

$$A < \frac{1}{\eta}.$$

En effet, l'expression précédente de H pouvant être mise sous la forme

$$H = \frac{1 - \rho A}{1 + \rho},$$

on en conclut que cette fonction oscille autour de l'unité sans devenir jamais négative.

Par les considérations précédentes, on a eu l'occasion de se former une idée des deux genres des courbes périplégmatiques: dans le premier de nos exemples, le diastème était constant, dans l'exemple du n° présent, variable. Mais ces deux genres de courbes jouissent d'une propriété commune, qui leur donne un caractère spécial, à savoir celle que leur diastème dépend de telle manière des constantes introduites par l'intégration qu'il s'annule lorsque ces constantes disparaissent. J'ai nommé, dans quelques travaux antérieures, ce genre de courbes périplégmatiques *orbites intermédiaires*, parce qu'elles sont, en effet, très propres à représenter d'une manière approximative les mouvements des corps célestes: les courbes du premier genre, les orbites des comètes dans le voisinage d'une planète, celles du second genre, l'orbite de la lune, ainsi que les mouvements d'autres corps célestes, dont les conditions sont analogues à celles de la lune. Particulièrement, quand les arguments dans l'expression de r se composent de deux éléments, ce mode d'aborder les approximations déstinées à faire connaître les mouvements de l'astre considéré, est très fertile. Ce cas se présente toujours, lorsqu'il s'agit d'un système de trois corps se mouvant dans un plan unique, si l'orbite du deuxième corps autour du premier, qu'on admet en repos, est un cercle, et que les distances du troisième corps, dont la masse est insensible, à l'un des deux premiers, sont toujours petites par rapport à ses distances de l'autre corps.

8. Je vais maintenant considérer un type des courbes périplégmatiques à diastème variable plus général que celui des orbites intermédiaires: je me proposerai, dès l'abord, de chercher les courbes périplégmatiques dont le diastème ne s'annule pas avec les constantes d'intégration.

L'hypothèse le plus simple relativement à Π conduisant à de telles courbes, est celle-ci:

$$\Pi = \frac{v}{p} + (\beta_1 + \beta_3 \Pi)\left(1 - \frac{v}{p}\right) - \frac{v}{p} A,$$

Π étant une fonction de certains coefficients constants, laquelle nous allons mettre en évidence un peu plus bas, et A, un agrégat périodique de la forme suivante

$$A = C \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots \\ 1 - \sigma_1 & 1 - \sigma_2 & \cdots \\ -B_1 & -B_2 & \cdots \end{bmatrix} (v),$$

où les γ ainsi que les σ sont des petites quantités positives.

Avec l'expression établie de Π, nous obtenons facilement de l'équation (4) la suivante:

$$\frac{d^2\rho}{dv^2} + (1 - \beta_1 - \beta_3 \Pi)\rho = -A, \tag{16}$$

dont l'intégrale se trouve immédiatement. En désignant par $\varkappa$ et Γ les deux constantes d'intégration, et par ς, une quantité découlant de l'équation

$$1 - \beta_1 - \beta_3 \Pi = (1 - \varsigma)^2,$$

nous arriverons au résultat

$$\rho = C \begin{bmatrix} \varkappa & \varkappa_1 & \cdots \\ 1 - \varsigma & 1 - \sigma_1 & \cdots \\ -\Gamma & -B_1 & \cdots \end{bmatrix} (v), \tag{17}$$

où les divers $\varkappa$ sont des coefficients s'obtenant en vertu des expressions que voici:

$$\varkappa_1 = \frac{\gamma_1}{(1 - \sigma_1)^2 - (1 - \beta_1 - \beta_3 \Pi)},$$

$$\varkappa_2 = \frac{\gamma_2}{(1 - \sigma_2)^2 - (1 - \beta_1 - \beta_3 \Pi)},$$

. . . .

Maintenant, si nous admettons que la fonction H soit égale à la somme des carrés de tous les x_i, et que nous posions, pour abréger,

$$\vartheta_1 = -2\sigma_1 + \sigma_1^2 + \beta_1,$$
$$\vartheta_2 = -2\sigma_2 + \sigma_2^2 + \beta_1,$$
$$\dots\dots\dots\dots,$$

la fonction sera H obtenue en résolvant l'équation

$$(18) \qquad H = \frac{\gamma_1^2}{(\vartheta_1 + \beta_3 H)^2} + \frac{\gamma_2^2}{(\vartheta_2 + \beta_3 H)^2} + \dots$$

Evidemment, si les termes de droite sont en nombre fini, l'équation que nous venons d'établir, admet toujours une racine réelle et positive; c'est de même si les γ forment une série infinie, que nous supposons toujours convergente comme une progression géométrique, supposé toutefois que les ϑ soient des quantités positives. Mais aussi dans le cas où le nombre des termes est infini et que parmi eux il se trouve un nombre infini de ϑ négatifs, l'équation (18) sera satisfaite par une valeur finie, réelle et positive de H, et en conséquence, son membre droit, étant exprimé au moyen d'une série infinie, restera convergent. En voici la démonstration.

Soit $-\vartheta_\nu$ la plus grande valeur négative des ϑ, et x, une quantité plus grande que ϑ_ν: alors, il s'ensuit que l'inégalité suivante subsiste:

$$\frac{\gamma_1^2}{(\vartheta_1 + x)^2} + \frac{\gamma_2^2}{(\vartheta_2 + x)^2} + \dots + \frac{\gamma_\nu^2}{(-\vartheta_\nu + x)^2} + \dots < \frac{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \dots}{(-\vartheta_\nu + x)^2},$$

d'où il se dérive celle-ci:

$$x - \frac{\beta_3\gamma_1^2}{(\vartheta_1 + x)^2} - \frac{\beta_3\gamma_2^2}{(\vartheta_2 + x)^2} - \dots - \frac{\beta_3\gamma_\nu^2}{(-\vartheta_\nu + x)^2} - \dots > x - \beta_3\frac{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \dots}{(-\vartheta_\nu + x)^2}.$$

Donc, si l'on détermine x en vertu de l'équation

$$x(x - \vartheta_\nu)^2 = \beta_3(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \dots),$$

qui admet nécessairement une racine réelle et positive, plus grande que ϑ_ν, et que l'on introduise cette valeur de x dans le premier membre de

l'inégalité obtenue, on aura évidemment un résultat positif, tandis qu'une valeur de x, un peu plus grande seulement que ϑ_ν, rend négative la fonction

$$f(x) = x - \frac{\beta_3 \gamma_1^2}{(\vartheta_1 + x)^2} - \ldots - \frac{\beta_3 \gamma_\nu^2}{(-\vartheta_\nu + x)^2} - \ldots .$$

Or, la fonction $f(x)$ étant continue entre x ayant une valeur un peu plus grande que ϑ_ν et x égal à un nombre excédant toute limite, on conclut que cette fonction s'annulle pour une valeur de x comprise entre ϑ_ν et la racine excédant ϑ_ν de l'équation précédente du troisième degré.

En multipliant l'équation (18) par β_3, et en désignant $\beta_3 H$ par x, on retombera dans l'expression qu'on a dénotée par $f(x)$. De là s'ensuit déjà la réalité de la fonction H, mais il arrive aussi que l'équation dont il s'agit a plusieurs racines positives. Dans un tel cas, qui, en effet, n'est aucunement rare, il faut des considérations ultérieures pour décider laquelle de ces racines il faut prendre.

Ayant établi la réalité de la fonction H, il sera facile, même sans avoir déterminé sa valeur, de montrer la convergence de la série

$$\chi_1 + \chi_2 + \ldots,$$

à cet égard il suffit de renvoyer le lecteur au paragraphe 7 de mon mémoire *nouvelles recherches etc.*, ou bien, à une lettre adressée à M. Hermite qui a été insérée dans les Comptes rendus de l'académie des sciences de l'institut de France, T. 108. On y a fait voir, que la valeur absolue de χ_i est moindre que

$$2\sqrt[3]{\frac{2\gamma_i}{3\beta_3}},$$

ou tout au plus égale à ce nombre, ce qui conduit au théorème suivant que je mets en évidence, en employant une notation très utile de M. Poincaré:

$$\chi_1 + \chi_2 + \ldots \ll 2\sqrt[3]{\frac{2}{3\beta_3}}\left\{\sqrt[3]{\gamma_1} + \sqrt[3]{\gamma_2} + \ldots\right\}.$$

Les γ formant une progression géométrique, il en est de même des racines cubiques $\sqrt[3]{\gamma}$; on en conclut immédiatement la convergence de la série des χ.

Si l'on avait supprimé, dans l'équation (16), le terme $\beta_3 H$, qui existe réellement toutes les fois qu'il s'agit de déterminer les mouvements des planètes, on n'aurait pas pu montrer la convergence de l'intégrale. Voilà la raison pourquoi on a mis en évidence ce terme, en établissant l'hypothèse du cas présent. La fonction H ayant la propriété de limiter et de rendre convergente l'expression de l'intégrale de l'équation linéaire (16), je l'ai appelée *fonction horistique*.

9. L'expression de ρ que nous venons de trouver dans le dernier numéro, se met aisément sous la forme d'un seul terme périodique avec coefficient et argument variables. Pour y arriver, introduisons les notations suivantes, analogues à celles que nous avons employées dans le n° 6,

$$(19)\quad \begin{cases} g = \eta \cos(\pi - \Gamma) = \chi + C\begin{bmatrix} \chi_1 & \chi_2 & \dots \\ \varsigma - \sigma_1 & \varsigma - \sigma_2 & \dots \\ \Gamma - B_1 & \Gamma - B_2 & \dots \end{bmatrix}(v), \\ h = \eta \sin(\pi - \Gamma) = -S\begin{bmatrix} \chi_1 & \chi_2 & \dots \\ \varsigma - \sigma_1 & \varsigma - \sigma_2 & \dots \\ \Gamma - B_1 & \Gamma - B_2 & \dots \end{bmatrix}(v). \end{cases}$$

Cela étant, nous serons conduits, immédiatement, aux expressions

$$(20)\qquad \rho = \eta \cos((1 - \varsigma)v - \pi)$$

et

$$(21)\qquad r = \frac{p}{1 + \eta \cos((1 - \varsigma)v - \pi)}.$$

La valeur du diastème à un instant déterminé étant donnée au moyen de la formule

$$(22)\qquad r_1 - r_0 = \frac{2p\eta}{1 - \eta^2},$$

j'appelerai η *fonction diastématique:* elle est, dans les théories des planètes, une fonction contenant, outre une constante, seulement des termes périodiques qui acquièrent des valeurs constantes lorsque les vitesses de l'argument disparaissent. Dans ce cas, toute la fonction η, ayant une valeur

constante, signifie l'excentricité d'une ellipse, et les divers termes que renferme cette fonction, contribuant à l'élément mentionné, je les ai nommés *termes élémentaires.* Par cette dénomination j'entends dorénavant encore tout autre terme dont le coefficient ne s'annulle pas avec les forces troublantes.

Outre les termes élémentaires du type considéré précédemment, il y a des termes élémentaires d'un autre type, assez différent de celui-là: on les trouve, mis en évidence, dans l'équation (17). Si, pour élucider leur propriété d'être élémentaires, nous admettons que les γ et les σ, ainsi que β_1 et β_3 soient des quantités du premier ordre par rapport aux forces perturbatrices, ce qui conviendrait effectivement aux choses réelles lorsqu'il s'agit des mouvements des planètes, il serait facile de voir que les coefficients $\varkappa$ sont des quantités non disparaissant avec ces forces. On distinguera donc deux espèces de termes élémentaires: le premier genre est caractérisé par un argument de la forme

$$\sigma v + A.$$

Ces termes, je les appelle *termes élémentaires du type* (A). Les termes du second genre, dont les arguments sont donnés au moyen de l'expression

$$(1 - \sigma)v + B,$$

seront nommés *termes élémentaires du type* (B).

Il s'entend facilement que la période d'un terme du type (A) est toujours très longue, tandis que celle d'un terme du type (B) est à peu près égale au temps de révolution.

Mais on rencontre aussi, soit dans le développement de la fonction perturbatrice, soit dans les expressions des inégalités, des termes dépendant des mêmes arguments que les termes élémentaires, mais dont les coefficients sont multipliés par une puissance ou par un produit des forces troublantes. Ces termes, n'étant pas élémentaires dans le sens ordinaire du mot, je les appelle *termes sousélémentaires*, et je vais distinguer des termes sousélémentaires de divers ordres, de sorte qu'un terme sousélémentaire serait, par exemple, du premier ordre, si son coefficient contenait comme facteur la première puissance d'une masse troublante.

Il y aura lieu de distinguer des *termes surélémentaires,* dénomination par laquelle j'entends les termes devenant infinis lorsque les masses troublantes disparaissent. Ces termes, ne pouvant se produire que passagèrement, on

saurait toutefois les éviter par un choix rationnel des formules différentielles dont l'intégration donne les inégalités.

10. Les fonctions g et h se déduisent, d'une manière directe, en intégrant l'équation (16) moyennant la variation des constantes arbitraires: il y a toutefois une remarque à faire que nous allons indiquer d'abord.

Soit:

$$\rho = gy_1 + hy_2$$

l'intégrale complète de l'équation

$$\frac{d^2\rho}{dv^2} + X\rho = R, \tag{23}$$

g et h étant deux fonctions qui prennent des valeurs constantes si R est égal à zéro.

En introduisant l'expression signalée de ρ, ainsi que sa deuxième dérivée, dans l'équation (23), on obtient immédiatement:

$$\frac{dy_1}{dv}\cdot\frac{dg}{dv} + \frac{dy_2}{dv}\frac{dh}{dv} + \frac{d}{dv}\left(y_1\frac{dg}{dv} + y_2\frac{dh}{dv}\right) = R, \tag{24}$$

équation à laquelle doivent satisfaire les deux fonctions g et h, encore indéterminées. Mais puisque ces fonctions, soumises jusqu'à présent à satisfaire une seule condition, sont au nombre de deux, on pourra les déterminer de plusieurs modes, dont il y a seulement deux qui méritent d'être examinés ici.

D'abord, on pourra établir la condition

$$y_1\frac{dg}{dv} + y_2\frac{dh}{dv} = 0$$

qui entraîne immédiatement celle-ci:

$$\frac{dy_1}{dv}\frac{dg}{dv} + \frac{dy_2}{dv}\frac{dh}{dv} = R.$$

Ayant déterminé les intégrales particulières y_1 et y_2 de manière à avoir:

$$y_1\frac{dy_2}{dv} - y_2\frac{dy_1}{dv} = 1,$$

les deux équations, dernièrement mises en évidence, conduisent à celles-ci:

$$\frac{dg}{dv} = -y_2 R, \qquad \frac{dh}{dv} = y_1 R,$$

d'où l'on tire, en nommant g_0 et h_0 les deux arbitraires,

$$g = g_0 - \int y_2 R dv; \qquad h = h_0 + \int y_1 R dv,$$

et encore:

(25) $$\rho = g_0 y_1 + h_0 y_2 - y_1 \int y_2 R dv + y_2 \int y_1 R dv.$$

Par l'hypothèse admise, qui fut établie par Lagrange, non seulement la fonction ρ elle-même prend la même forme, soit que la fonction R soit égale à zéro, soit qu'elle ait une autre valeur, mais il en est de même quant à la première dérivée de cette fonction. C'est aussi à cette hypothèse que l'astronomie képlerienne doit son fondement théorique.

L'autre hypothèse qu'il y a lieu à examiner, est dès le début plus générale. En désignant par λ une fonction, encore tout à fait indéterminée, nous allons mettre:

(26) $$y_1 \frac{dg}{dv} + y_2 \frac{dh}{dv} = -\lambda,$$

relation qui entraîne la suivante:

(27) $$\frac{dy_1}{dv}\frac{dg}{dv} + \frac{dy_2}{dv}\frac{dh}{dv} = \frac{d\lambda}{dv} + R.$$

De ces deux équations, il s'ensuit:

(28) $$\begin{cases} \dfrac{dg}{dv} = -\lambda \dfrac{dy_2}{dv} - y_2 \dfrac{d\lambda}{dv} - y_2 R, \\ \dfrac{dh}{dv} = \lambda \dfrac{dy_1}{dv} + y_1 \dfrac{d\lambda}{dv} + y_1 R, \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$g = g_0 - y_2\lambda - \int y_2 R dv; \qquad h = h_0 + y_1\lambda + \int y_1 R dv$$

En formant, avec ces valeurs de g et de h, l'expression de l'intégrale générale, on retombe sur la formule (25), qui ainsi est indépendante de

toute hypothèse relativement à la fonction λ. Mais, à ce qui concerne l'expression de la première dérivée de la fonction ρ, on aura maintenant un autre résultat, à savoir:

$$\frac{d\rho}{dv} = g\frac{dy_1}{dv} + h\frac{dy_2}{dv} - \lambda$$

Bien que cette formule soit un peu plus compliquée lorsque λ est différent de zéro que dans l'hypothèse de LAGRANGE, il paraît cependant avantageux, pour ne pas dire nécessaire, de déterminer la fonction nommée de manière à rendre les expressions de g et de h aussi simples que possible. Aussi dans la théorie des inégalités séculaires exprimées au moyen de séries trigonométriques, les grands fondateurs de cette théorie, LAGRANGE et LAPLACE, n'ont pas insisté sur la condition que les premières dérivées des coordonnées d'une planète aient la même forme lorsque les éléments elliptiques éprouvent seulement des altérations séculaires que dans le cas d'éléments constants. C'est tout le contraire: pour exprimer les perturbations séculaires par des termes périodiques, une certaine partie de la fonction perturbatrice, dite partie séculaire, fut retranchée, de sorte qu'on pouvait établir les équations

$$\frac{dg}{dv} = -\Phi; \qquad \frac{dh}{dv} = \Psi,$$

Φ et Ψ s'exprimant au moyen d'agrégats de termes sousélémentaires du type (A) et du premier ordre.

Examinons si ces démarches étaient conciliables avec l'hypothèse $\bar{\lambda} = 0$. Si, dans ce but, nous introduisons les valeurs de $\frac{dg}{dv}$ et $\frac{dh}{dv}$ dans les équations (26) et (27), il sera facile d'en tirer les résultats

$$(26') \qquad -\lambda = -y_1\Phi + y_2\Psi,$$

$$(27') \qquad R + \frac{d\lambda}{dv} = -\frac{dy_1}{dv}\Phi + \frac{dy_2}{dv}\Psi.$$

En différentiant la première de ces équations, et en retranchant le résultat de la seconde, il restera:

$$(29) \qquad R + 2\frac{d\bar{\lambda}}{dv} - y_1\frac{d\Phi}{dv} - y_2\frac{d\Psi}{dv}.$$

Si l'on supposait que les fonctions y_1 et y_2 fussent des quantités de l'ordre zéro, et, que Φ et Ψ ne continussent que des termes sousélémentaires du type (A) et du premier ordre, on conclurait facilement de l'équation obtenue que son second membre fût une quantité du deuxième ordre. Or, puisque nous considérons R comme un agrégat de termes sousélémentaires du type (B) et du premier ordre, il faut que λ soit aussi un pareil agrégat du premier ordre.

Donc, de deux choses, l'une: la fonction λ peut être égalée à zéro, il est vrai, mais seulement à condition que les fonctions Φ et Ψ renferment des termes d'un autre genre que ceux du type (A); de l'autre côté, on peut faire contenir aux fonctions Φ et Ψ, ou, ce qui revient au même, aux fonctions g et h exclusivement des termes du type (A), mais dans ce but, il faut, qu'on ait:

(30)
$$\begin{aligned}\frac{d\lambda}{dv} &= -\frac{1}{2}R + \frac{1}{2}\left(y_1 \frac{d\Phi}{dv} - y_2 \frac{d\Psi}{dv}\right)\\ &= -\frac{1}{2}R - \frac{1}{2}\left(y_1 \frac{d^2 g}{dv^2} + y_2 \frac{d^2 h}{dv^2}\right).\end{aligned}$$

On tire de là:

(31)
$$\lambda = -\frac{1}{2}\int R dv - \frac{1}{2}\int\left(y_1 \frac{d^2 g}{dv^2} + y_2 \frac{d^2 h}{dv^2}\right)dv,$$

valeur qui, évidemment, est différente de zéro.

Si l'on introduit les expressions obtenues de λ et de $\frac{d\lambda}{dv}$ dans les formules (28), on peut exprimer les différentielles de g et h au moyen de la fonction R. On obtiendra de la sorte:

$$\frac{dg}{dv} = \frac{1}{2}\frac{d}{dv}\left| y_2 \int\left(R + y_1 \frac{d^2 g}{dv^2} + y_2 \frac{d^2 h}{dv^2}\right)dv \right| - y_2 R,$$

$$\frac{dh}{dv} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dv}\left| y_1 \int\left(R + y_1 \frac{d^2 g}{dv^2} + y_2 \frac{d^2 h}{dv^2}\right)dv \right| + y_1 R,$$

ou bien:

(32)
$$\left\{\begin{aligned}\frac{dg}{dv} &= -\frac{1}{2}y_2 R + \frac{1}{2}\frac{dy_2}{dv}\int R dv + \frac{1}{2}\frac{d}{dv}\left| y_2 \int\left(y_1 \frac{d^2 g}{dv^2} + y_2 \frac{d^2 h}{dv^2}\right)dv \right|,\\ \frac{dh}{dv} &= \frac{1}{2}y_1 R - \frac{1}{2}\frac{dy_1}{dv}\int R dv - \frac{1}{2}\frac{d}{dv}\left| y_1 \int\left(y_1 \frac{d^2 g}{dv^2} + y_2 \frac{d^2 h}{dv^2}\right)dv \right|.\end{aligned}\right.$$

11. On parvient à déterminer la fonction λ de plusieurs autres manières qu'en utilisant l'une des équations (26) ou (31): voici une voie conduisant très directement au résultat. Je me restreins toutefois à ne considérer qu'un seul terme de la fonction R.

En multipliant la seconde des équations (28) par $i=\sqrt{-1}$, et en ajoutant ce produit à la première des équations nommées, on obtient:

$$(33)\qquad \frac{d(g+ih)}{dv}=i\frac{d\{(y_1+iy_2)\lambda\}}{dv}+i(y_1+iy_2)R.$$

Supposons maintenant qu'on ait:

$$y_1=f(v)\cos((1-\varsigma)v+\theta);\qquad y_2=f(v)\sin((1-\varsigma)v+\theta),$$

$f(v)$ et θ étant deux fonctions des termes périodiques du type (A); de ces fonctions, nous considérons la première comme peu différente d'une constante. Admettons ensuite:

$$R=\gamma\cos((1-\sigma)v-B)=\frac{1}{2}\gamma\{e^{i((1-\sigma)v-B)}+e^{-i((1-\sigma)v-B)}\},$$

et désignons par φ_0 et φ_1 deux fonctions indéterminées, encore à notre disposition.

Maintenant, pour déterminer les fonctions g et h, admettons l'équation

$$(34)\qquad \frac{d(g+ih)}{dv}=\frac{i}{2}\gamma(1-\varphi_0-i\varphi_1)f(v)e^{i((\sigma-\varsigma)v+\theta+B)},$$

et nous aurons, en la retranchant de l'équation (33),

$$\frac{d\{f(v)e^{i((1-\varsigma)v+\theta)}\lambda\}}{dv}+\frac{1}{2}\gamma(\varphi_0+i\varphi_1)f(v)e^{i((\sigma-\varsigma)v+\theta+B)}+\frac{1}{2}\gamma f(v)e^{i((2-\varsigma-\sigma)v+\theta-B)}=0.$$

On peut déterminer les deux fonctions φ_0 et φ_1 qui sont encore à notre disposition, de manière à avoir:

$$\int\gamma(\varphi_0+i\varphi_1)f(v)e^{i((\sigma-\varsigma)v+\theta+B)}dv=(iM+N)e^{i((\sigma-\varsigma)v+\theta+B)},$$
$$\int\gamma f(v)e^{i((2-\varsigma-\sigma)v+\theta-B)}dv=(-iM+N)e^{i((2-\varsigma-\sigma)v+\theta-B)}.$$

De la sorte, on aura, en vertu de l'équation précédente:

$$(35)\qquad \lambda=-\frac{1}{f(v)}\{M\sin((1-\sigma)v-B)+N\cos((1-\sigma)v-B)\}.$$

Après avoir différentié les relations précédentes, nous en tirons quatre équations différentielles conduisant à des valeurs réelles des quatre fonctions φ_0, φ_1, M et N. Les voici:

$$\gamma\varphi_0 f(v) = -\left(\sigma - \varsigma + \frac{d\theta}{dv}\right)M + \frac{dN}{dv},$$

$$\gamma\varphi_1 f(v) = \left(\sigma - \varsigma + \frac{d\theta}{dv}\right)N + \frac{dM}{dv},$$

$$\gamma f(v) = \left(2 - \varsigma - \sigma + \frac{d\theta}{dv}\right)M + \frac{dN}{dv},$$

$$0 = \left(2 - \varsigma - \sigma + \frac{d\theta}{dv}\right)N - \frac{dM}{dv}.$$

Des deux dernières de ces équations, on déduira facilement les expressions de M et de N, qui prendront, évidemment, la forme d'agrégats de termes du type (A), pourvu que $f(v)$ et θ soient de tels agrégats. Les fonctions M et N étant connues, on aura immédiatement, soit les produits $\varphi_0 f(v)$ et $\varphi_1 f(v)$ qui entrent dans la formule (34), soit les fonctions φ_0 et φ_1, dont on n'aura, cependant, pas besoin. Il serait facile d'étendre l'application de la méthode exposée aux cas de plusieurs termes entrant dans l'expression de R.

12. Si la fonction R contenait des termes dépendant des fonctions g et h, les méthodes que je viens d'expliquer, dans les derniers numéros, n'amèneraient des résultats qu'au moyen d'approximations successives; pour arriver directement au but, voici la manière de procéder.

Reprenons l'équation (24), après avoir effectué la différentiation du dernier terme de son premier membre. Nous aurons ainsi:

$$y_1 \frac{d^2 g}{dv^2} + y_2 \frac{d^2 h}{dv^2} + 2\left(\frac{dy_1}{dv}\frac{dg}{dv} + \frac{dy_2}{dv}\frac{dh}{dv}\right) = R, \tag{36}$$

et si l'on y introduit les valeurs de y_1 et de y_2 que nous avons présumées dans le n° précédent, il en résultera:

$$\left\{\cos\theta\frac{d^2g}{dv^2}+\sin\theta\frac{d^2h}{dv^2}\right\}f(v)\cos(1-\varsigma)v$$

$$+\left\{-\sin\theta\frac{d^2g}{dv^2}+\cos\theta\frac{d^2h}{dv^2}\right\}f(v)\sin(1-\varsigma)v$$

$$+2\left\{f'(v)\cos\theta-\left(1-\varsigma+\frac{d\theta}{dv}\right)f(v)\sin\theta\right\}\frac{dg}{dv}\cos(1-\varsigma)v$$

$$+2\left\{-f'(v)\sin\theta-\left(1-\varsigma+\frac{d\theta}{dv}\right)f(v)\cos\theta\right\}\frac{dg}{dv}\sin(1-\varsigma)v$$

$$+2\left\{f'(v)\sin\theta+\left(1-\varsigma+\frac{d\theta}{dv}\right)f(v)\cos\theta\right\}\frac{dh}{dv}\cos(1-\varsigma)v$$

$$+2\left\{f'(v)\cos\theta-\left(1-\varsigma+\frac{d\theta}{dv}\right)f(v)\sin\theta\right\}\frac{dh}{dv}\sin(1-\varsigma)v=R.$$

Quelle que soit la fonction R, nous supposerons toujours qu'elle ait la nature d'un agrégat périodique du type

$$\varepsilon\cos((1-\varsigma)v-E),$$

$\varepsilon\cos E$ et $\varepsilon\sin E$ étant des fonctions du type (A), c'est-à-dire, des fonctions s'exprimant au moyen des termes du type (A). Donc, si nous posons:

$$R=\Xi\cos(1-\varsigma)v+Y\sin(1-\varsigma)v,$$

Ξ et Y seront des fonctions du type (A).

En introduisant cette valeur de R dans l'équation précédente, et en égalant séparément à zéro les coefficients de $\cos(1-\varsigma)v$ et de $\sin(1-\varsigma)v$, on parvient aux équations

$$f(v)\cos\theta\frac{d^2g}{dv^2}+f(v)\sin\theta\frac{d^2h}{dv^2}+2\left\{f'(v)\cos\theta-\left(1-\varsigma+\frac{d\theta}{dv}\right)f(v)\sin\theta\right\}\frac{dg}{dv}$$

$$+2\left\{f'(v)\sin\theta+\left(1-\varsigma+\frac{d\theta}{dv}\right)f(v)\cos\theta\right\}\frac{dh}{dv}=\Xi,$$

$$-f(v)\sin\theta\frac{d^2g}{dv^2}+f(v)\cos\theta\frac{d^2h}{dv^2}-2\left\{f'(v)\sin\theta+\left(1-\varsigma+\frac{d\theta}{dv}\right)f(v)\cos\theta\right\}\frac{dg}{dv}$$

$$+2\left\{f'(v)\cos\theta-\left(1-\varsigma+\frac{d\theta}{dv}\right)f(v)\sin\theta\right\}\frac{dh}{dv}=Y,$$

d'où découlent facilement les suivantes:

$$(37)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2g}{dv^2} + 2\dfrac{f'(v)}{f(v)}\dfrac{dg}{dv} + 2\left(1 - \varsigma + \dfrac{d\theta}{dv}\right)\dfrac{dh}{dv} = \dfrac{1}{f(v)}(\Xi\cos\theta - \Upsilon\sin\theta), \\[2ex] \dfrac{d^2h}{dv^2} + 2\dfrac{f'(v)}{f(v)}\dfrac{dh}{dv} - 2\left(1 - \varsigma + \dfrac{d\theta}{dv}\right)\dfrac{dg}{dv} = \dfrac{1}{f(v)}(\Xi\sin\theta + \Upsilon\cos\theta), \end{cases}$$

et encore, si l'on désigne par X et Y les sommes $g + ih$ et $g - ih$,

$$(38)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2X}{dv^2} + 2\left\{\dfrac{f'(v)}{f(v)} - i\left(1 - \varsigma + \dfrac{d\theta}{dv}\right)\right\}\dfrac{dX}{dv} = \dfrac{1}{f(v)}\{\Xi + i\Upsilon\}e^{i\theta}, \\[2ex] \dfrac{d^2Y}{dv^2} + 2\left\{\dfrac{f'(v)}{f(v)} + i\left(1 - \varsigma + \dfrac{d\theta}{dv}\right)\right\}\dfrac{dY}{dv} = \dfrac{1}{f(v)}\{\Xi - i\Upsilon\}e^{-i\theta}. \end{cases}$$

J'aurai l'occasion, dans ce qui suivra, de revenir à ces équations que j'ai déjà établies dans une note *on the détermination of the Radius Vector in the absolute orbit of the planets* insérée dans le tome XLVII des monthly notices of the Royal Astronomical Society.

13. La relation entre la somme $\rho^2 + \left(\dfrac{d\rho}{dv}\right)^2$ d'un côté, et le carré de la fonction diastématique

$$\eta^2 = g^2 + h^2$$

de l'autre, sera d'une utilité particulière. Nous allons la chercher.

Admettons, pour abréger, les notations

$$A = -\varsigma + \frac{d\theta}{dv}; \qquad B = \frac{f'(v)}{f(v)};$$

évidemment, les fonctions A et B sont de petites quantités du premier ordre, tant que ς est une telle quantité et que θ et $f(v)$, dont la dernière ne diffère que très peu d'une constante, sont des fonctions du type (A). Avec ces notations, on aura immédiatement les valeurs

$$\frac{dy_1}{dv} = -(1 + A)y_2 + By_1; \qquad \frac{dy_2}{dv} = (1 + A)y_1 + By_2,$$

qui, si on les introduit dans l'expression

$$y_1\frac{dy_2}{dv} - y_2\frac{dy_1}{dv} = 1,$$

conduisent à la relation

$$y_1^2 + y_2^2 = \frac{1}{1 + A}.$$

Des valeurs signalées, on obtient encore:

$$\left(\frac{dy_1}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dy_2}{dv}\right)^2 = 1 + A + \frac{B^2}{1 + A},$$

$$y_1^2 + \left(\frac{dy_1}{dv}\right)^2 = \frac{1}{1 + A} + 2Ay_2^2 - 2B(1 + A)y_1y_2 + A^2y_2^2 + B^2y_1^2,$$

$$y_2^2 + \left(\frac{dy_2}{dv}\right)^2 = \frac{1}{1 + A} + 2Ay_1^2 + 2B(1 + A)y_1y_2 + A^2y_1^2 + B^2y_2^2.$$

Maintenant, si l'on introduit les valeurs de $\frac{dy_1}{dv}$ et $\frac{dy_2}{dv}$ dans l'équation

$$\frac{d\rho}{dv} = g\frac{dy_1}{dv} + h\frac{dy_2}{dv} - \lambda,$$

il en résultera:

$$\frac{d\rho}{dv} = -g(1 + A)y_2 + h(1 + A)y_1 + B(gy_1 + hy_2) - \lambda;$$

ensuite, en posant:

$$(\lambda) = \lambda + (gy_2 - hy_1)A - B(gy_1 + hy_2),$$

on parviendra à l'expression

$$(39) \qquad \frac{d\rho}{dv} = -gy_2 + hy_1 - (\lambda)$$

En vertu de cette relation, l'expression précédente prend la forme

$$(40) \qquad (1 + A)(\lambda) = \lambda - A\frac{d\rho}{dv} - B\rho.$$

Cela étant, il sera facile de former l'équation

$$(41) \qquad \rho^2 + \left(\frac{d\rho}{dv}\right)^2 = \frac{\eta^2}{1 + A} - 2(\lambda)\frac{d\rho}{dv} - (\lambda)^2$$

$$= \frac{\eta^2}{1 + A} - \frac{2\lambda}{1 + A}\frac{d\rho}{dv} + \frac{2A}{1 + A}\left(\frac{d\rho}{dv}\right)^2 + \frac{2B}{1 + A}\rho\frac{d\rho}{dv} - (\lambda)^2,$$

ou bien, en considérant l'équation (31), celle-ci:

$$(41') \quad \rho^2 + \left(\frac{d\rho}{dv}\right)^2 = \frac{1}{1+A}\left\{\eta^2 + \frac{d\rho}{dv}\int\left[R + y_1\frac{d^2g}{dv^2} + y_2\frac{d^2h}{dv^2}\right]dv + 2A\left(\frac{d\rho}{dv}\right)^2\right\}$$

$$+ \frac{2B}{1+A}\rho\frac{d\rho}{dv} - (\lambda)^2.$$

Telle est la relation demandée, mais cherchons encore à mettre en évidence les termes élémentaires du type (A), ainsi que les termes sousélémentaires du premier ordre.

Si, dans ce but, on néglige toute quantité du deuxième ordre, on trouvera, à l'aide de l'équation (26'):

$$-\frac{2\lambda}{1+A}\frac{d\rho}{dv} - 2\left(y_1\frac{dg}{dv} + y_2\frac{dh}{dv}\right)(y_2 g - y_1 h)$$

$$= (y_1^2 + y_2^2)\left(h\frac{dg}{dv} - g\frac{dh}{dv}\right)$$

$$- 2y_1y_2\left(g\frac{dg}{dv} - h\frac{dh}{dv}\right) + (y_1^2 - y_2^2)\left(h\frac{dg}{dv} + g\frac{dh}{dv}\right).$$

Mais, des trois parties mises en évidence au second membre, c'est seulement la première qui contient des termes sousélémentaires, de sorte qu'on pourra, en ne considérant que de tels termes, mettre:

$$-\frac{2\lambda}{1+A}\frac{d\rho}{dv} = h\frac{dg}{dv} - g\frac{dh}{dv}.$$

Ensuite, puisque le produit de $\frac{2B}{1+A}$ par $\rho\frac{d\rho}{dv}$ ne contient aucun terme élémentaire ou sousélémentaire du premier ordre, ce qui est facile à voir, et que la partie élémentaire du produit $\frac{2A}{1+A}\left(\frac{d\rho}{dv}\right)^2$, si l'on néglige les termes du deuxième ordre, est égale à $A\eta^2$, on parvient à établir l'expression que voici:

$$(42) \qquad \rho^2 + \left(\frac{d\rho}{dv}\right)^2 = \eta^2 + h\frac{dg}{dv} - g\frac{dh}{dv},$$

formule qui nous sera utile plus loin.

14. Les orbites absolues des planètes sont des courbes périplegmatiques du type que nous venons de considérer dans les nos 8—13; pour une raison qui sera élucidée dans le troisième chapitre, nous allons toutefois changer un peu l'expression analytique du rayon vecteur, telle qu'elle est donnée par l'équation (21). La modification en question s'opère en remplaçant, dans la formule mentionnée, la constante p par la quantité variable

$$a(1-\eta^2),$$

de sorte que nous aurons:

$$r = \frac{a(1-\eta^2)}{1+\eta\cos((1-\varsigma)v-\pi)}. \tag{43}$$

En différentiant l'expression

$$\frac{a}{r} = \frac{1+\rho}{1-\eta^2},$$

il viendra:

$$\frac{d\frac{a}{r}}{dv} = \frac{1}{1-\eta^2}\frac{d\rho}{dv} + \frac{1+\rho}{(1-\eta^2)^2}\frac{d\eta^2}{dv},$$

et encore, après une nouvelle différentiation,

$$\frac{d^2\frac{a}{r}}{dv^2} = \frac{1}{1-\eta^2}\frac{d^2\rho}{dv^2} + \frac{2}{(1-\eta^2)^2}\frac{d\eta^2}{dv}\frac{d\rho}{dv} + \frac{2(1+\rho)}{(1-\eta^2)^3}\left(\frac{d\eta^2}{dv}\right)^2 + \frac{1+\rho}{(1-\eta^2)^2}\frac{d^2\eta^2}{dv^2};$$

et si l'on introduit ces expressions dans l'équation (4), après y avoir écrit a au lieu de p, il en résultera l'équation que voici:

$$\frac{d^2\rho}{dv^2} + \frac{2}{1-\eta^2}\frac{d\eta^2}{dv}\frac{d\rho}{dv} + \frac{2(1+\rho)}{(1-\eta^2)^2}\left(\frac{d\eta^2}{dv}\right)^2 + \frac{1+\rho}{1-\eta^2}\frac{d^2\eta^2}{dv^2} + 1 + \rho = (1+\rho)H, \tag{44}$$

ou bien, en considérant la relation

$$H = \frac{1-\eta^2}{1+\rho}(1+P),$$

celle ci:

$$(45)\qquad \frac{d^2\rho}{dv^2} + \frac{2}{1-\eta_{\prime}^2}\frac{d\eta_{\prime}^2}{dv}\frac{d\rho}{dv} + \left\{1 + \frac{2}{(1-\eta_{\prime}^2)^2}\left(\frac{d\eta_{\prime}^2}{dv}\right)^2 + \frac{1}{1-\eta_{\prime}^2}\frac{d^2\eta_{\prime}^2}{dv^2}\right\}\rho$$

$$= (1-\eta_{\prime}^2)P - \eta_{\prime}^2 - \frac{2}{(1-\eta_{\prime}^2)^2}\left(\frac{d\eta_{\prime}^2}{dv}\right)^2 - \frac{1}{1-\eta_{\prime}^2}\frac{d^2\eta_{\prime}^2}{dv^2}.$$

Des relations signalées, il serait facile de conclure la valeur de P et celle de Π, et ensuite, d'examiner si les conditions étaient remplies pour que la courbe définie par l'équation (43) fût périplégmatique. L'équation (45) est cependant moins convenable à l'égard de la comparaison avec l'équation différentielle du rayon vecteur, question à laquelle nous arriverons plus tard, en partant des équations générales de la dynamique. L'inconvénient qu'amène l'équation (45) tient à ce qu'elle fait figurer dans la fonction P des termes des deux types (A) et (B) — ρ étant supposé toujours une fonction du type (B) — et encore, que cette fonction contient des termes élémentaires.

Mais si l'on fait dépendre la fonction Π d'une autre, X, en établissant la relation

$$(46)\qquad \Pi = \frac{1}{1+\rho}\left\{1 + X + \frac{1}{2}\frac{1}{1-\eta_{\prime}^2}\frac{d\eta_{\prime}^2}{dv}\frac{d\rho}{dv}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\frac{1}{(1-\eta_{\prime}^2)^2}\left(\frac{d\eta_{\prime}^2}{dv}\right)^2\rho + \frac{2}{(1-\eta_{\prime}^2)^2}\left(\frac{d\eta_{\prime}^2}{dv}\right)^2 + \frac{1}{1-\eta_{\prime}^2}\frac{d^2\eta_{\prime}^2}{dv^2}\right\},$$

et qu'on introduise cette expression de Π, dans l'équation (44), il viendra:

$$(47)\qquad \frac{d^2\rho}{dv^2} + \frac{3}{2}\frac{1}{1-\eta_{\prime}^2}\frac{d\eta_{\prime}^2}{dv}\frac{d\rho}{dv} + \left\{1 + \frac{3}{2}\frac{1}{(1-\eta_{\prime}^2)^2}\left(\frac{d\eta_{\prime}^2}{dv}\right)^2 + \frac{1}{1-\eta_{\prime}^2}\frac{d^2\eta_{\prime}^2}{dv^2}\right\}\rho = X,$$

résultat dont la comparaison avec l'équation tirée de la dynamique se fera très facilement.

Supposant toujours que ρ soit une fonction du type (B), dont la valeur numérique reste moindre que l'unité, il est évident que X est aussi une telle fonction, mais qui oscille entre des limites plus resserrées que ne le fait la fonction ρ.

La conclusion suivante est donc légitime.

Si, après avoir établi l'équation (43), on parvient, pour déterminer ρ, à une équation de la forme de l'équation (47), et qu'on trouve une ex-

pression de ρ du type (B) conduisant à des valeurs numériques de cette fonction sensiblement moindres que l'unité, la courbe représentée par l'équation (43) sera une courbe périplégmatique.

15. Quant à l'étude des courbes périplégmatiques de double courbure, il suffit pour le moment de remarquer qu'une courbe dont chaque élément appartient à une courbe périplégmatique située dans un plan passant par les deux rayons vecteurs infiniment voisins et tirés des extrémités de cet élément, est aussi périplégmatique dans l'espace, quels que soient les déplacements de ce plan autour du rayon vecteur. Cela se comprend par le fait que la droite menée dans le plan mobile par le centre et perpendiculairement au rayon vecteur, tourne avec ce plan autour de l'axe instantané, qu'on suppose coincider avec le dit rayon. Donc, la courbe envisagée étant toujours concave vers cette perpendiculaire, elle est aussi périplégmatique dans l'espace.

Par cette remarque, on est amené à étudier séparément la trace de la courbe dans le plan instantané et les déplacements de ce plan dans l'espace. Cette manière de considérer les trajectoires des corps célestes fut d'abord proposée par Lagrange dans la mécanique analytique et, après lui, employée avec beaucoup de succès par Hansen. Mais tandis que Hansen considérait toujours un système de coordonnées rectangulaires fixé dans le plan mobile, je vais admettre des suppositions un peu plus générales, qui amèneront quelques avantages pour le calcul des perturbations absolues

CHAPITRE II.

Divers systèmes de coordonnées.

16. Considérons d'abord deux systèmes de coordonnées rectangulaires ayant la même origine: l'un, fixe dans l'espace, et l'autre, déterminé de manière à avoir deux axes situés dans le plan instantané déterminé par deux rayons vecteurs consécutifs. Désignons les coordonnées d'un point rapportées au premier système par x, y, z, et les coordonnées du même point rapportées au second système par ξ, η, ζ, dont la dernière, par supposition, doit être égale à zéro. Supposons enfin que les relations linéaires entre les coordonnées appartenant aux deux systèmes soient les suivantes:

$$(1)\qquad \begin{cases} x = \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta, \\ y = \alpha_1\xi + \beta_1\eta + \gamma_1\zeta, \\ z = \alpha_2\xi + \beta_2\eta + \gamma_2\zeta. \end{cases}$$

Les relations bien connues, en nombre de six, liant les neuf coefficients, étant celles-ci:

$$(a)\qquad \begin{cases} \alpha^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1, \\ \beta^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 = 1, \\ \gamma^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1, \end{cases}$$

$$(b)\qquad \begin{cases} \alpha\beta + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = 0, \\ \alpha\gamma + \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 = 0, \\ \beta\gamma + \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 = 0, \end{cases}$$

ou bien, réciproquement, les suivantes:

$$(a')\qquad \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \\ \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1, \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1, \end{cases}$$

(b')
$$\begin{cases} \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 = 0, \\ \alpha\alpha_2 + \beta\beta_2 + \gamma\gamma_2 = 0, \\ \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0, \end{cases}$$

on déduit immédiatement des équations (1) les équations réciproques:

(1')
$$\begin{cases} \xi = \alpha x + \alpha_1 y + \alpha_2 z, \\ \eta = \beta x + \beta_1 y + \beta_2 z, \\ \zeta = \gamma x + \gamma_1 y + \gamma_2 z. \end{cases}$$

Je rappelle encore les relations suivantes, aussi bien connues, mais qui, du reste, découlent facilement des équations déjà mentionnées,

(c)
$$\begin{cases} \alpha = \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1, \\ \alpha_1 = \beta_2\gamma - \beta\gamma_2, \\ \alpha_2 = \beta\gamma_1 - \beta_1\gamma, \end{cases}$$

(c')
$$\begin{cases} \beta = \alpha_2\gamma_1 - \alpha_1\gamma_2, \\ \beta_1 = \alpha\gamma_2 - \alpha_2\gamma, \\ \beta_2 = \alpha_1\gamma - \alpha\gamma_1, \end{cases}$$

(c'')
$$\begin{cases} \gamma = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1, \\ \gamma_1 = \alpha_2\beta - \alpha\beta_2, \\ \gamma_2 = \alpha\beta_1 - \alpha_1\beta. \end{cases}$$

Conformément à la supposition que le plan instantané soit déterminé moyennant les positions de deux rayons vecteurs infiniment voisins, il faut, tant que la trajectoire est une courbe à double courbure, considérer les neuf coefficients α, β, γ, α_1, ... comme fonctions du temps t, fonctions que nous admettons, du reste, être réelles et continues.

La condition que les axes des ξ et des η soient situés dans le plan considéré s'exprime par l'équation

$$\zeta = 0$$

ou bien, ce qui revient au même, par la suivante:

$$(2) \qquad 0 = \gamma x + \gamma_1 y + \gamma_2 z,$$

ce qui, si $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ sont des constantes, est l'équation d'un plan passant par l'origine et exprimée en coordonnées rapportées aux axes fixes dans l'espace. Que ce plan passe encore par un point de la courbe infiniment voisin au point x, y, z, cela s'exprime par l'équation

$$(3) \qquad 0 = \gamma \frac{dx}{dt} + \gamma_1 \frac{dy}{dt} + \gamma_2 \frac{dz}{dt},$$

les dérivées étant tirées des expressions des coordonnées considérées comme fonctions du temps.

Par ces déterminations, on a fait tourner le plan instantané autour du rayon vecteur de la courbe; mais il en découle encore quelques conséquences que nous allons mettre en évidence.

En différentiant les équations (1), on obtient:

$$(4) \qquad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha \frac{d\xi}{dt} + \beta \frac{d\eta}{dt} + \gamma \frac{d\zeta}{dt} + \frac{d\alpha}{dt} \xi + \frac{d\beta}{dt} \eta + \frac{d\gamma}{dt} \zeta, \\ \frac{dy}{dt} = \alpha_1 \frac{d\xi}{dt} + \beta_1 \frac{d\eta}{dt} + \gamma_1 \frac{d\zeta}{dt} + \frac{d\alpha_1}{dt} \xi + \frac{d\beta_1}{dt} \eta + \frac{d\gamma_1}{dt} \zeta, \\ \frac{dz}{dt} = \alpha_2 \frac{d\xi}{dt} + \beta_2 \frac{d\eta}{dt} + \gamma_2 \frac{d\zeta}{dt} + \frac{d\alpha_2}{dt} \xi + \frac{d\beta_2}{dt} \eta + \frac{d\gamma_2}{dt} \zeta, \end{cases}$$

et si l'on introduit ces expressions dans l'équation (3), après avoir mis:

$$\zeta = \frac{d\zeta}{dt} = 0,$$

il en résultera l'équation

$$(5) \qquad 0 = \left(\alpha \frac{d\gamma}{dt} + \alpha_1 \frac{d\gamma_1}{dt} + \alpha_2 \frac{d\gamma_2}{dt}\right)\xi + \left(\beta \frac{d\gamma}{dt} + \beta_1 \frac{d\gamma_1}{dt} + \beta_2 \frac{d\gamma_2}{dt}\right)\eta.$$

Ensuite, si l'on différentie l'équation (2), et que l'on retranche du résultat l'équation (3), on obtiendra:

$$0 = x\frac{d\gamma}{dt} + y\frac{d\gamma_1}{dt} + z\frac{d\gamma_1}{dt}.$$

En y introduisant les expressions (1), on trouvera immédiatement l'équation précédente.

17. On satisfait aux conditions (a), (b), (a') et (b') en adoptant les expressions suivantes des neuf coefficients:

$$\text{(d)} \qquad \begin{cases} \alpha = \cos\theta\cos\sigma + \sin\theta\sin\sigma\cos i, \\ \beta = \cos\theta\sin\sigma - \sin\theta\cos\sigma\cos i, \\ \gamma = \sin\theta\sin i, \end{cases}$$

$$\text{(d')} \qquad \begin{cases} \alpha_1 = \sin\theta\cos\sigma - \cos\theta\sin\sigma\cos i, \\ \beta_1 = \sin\theta\sin\sigma + \cos\theta\cos\sigma\cos i, \\ \gamma_1 = -\cos\theta\sin i, \end{cases}$$

$$\text{(d'')} \qquad \begin{cases} \alpha_2 = -\sin\sigma\sin i, \\ \beta_2 = \cos\sigma\sin i, \\ \gamma_2 = \cos i, \end{cases}$$

et l'on sait que θ et σ signifient alors les angles entre la ligne d'intersection des deux plans et les axes des x et des ξ, et i, l'inclinaison mutuelle de ces plans. Les arcs θ et σ s'appellent d'ailleurs longitudes du noeud du plan mobile sur le plan invariable, l'un compté sur le plan fixe, l'autre, sur le plan mobile.

En différentiant les expressions (d), (d') et (d''), toutes les quantités y entrant étant variables, on parvient à des formules qu'il convient de rappeler à cette occasion. Les voici:

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\beta\frac{d\sigma}{dt} - \alpha_1\frac{d\theta}{dt} - \gamma\sin\sigma\frac{di}{dt},$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \alpha\frac{d\sigma}{dt} - \beta_1\frac{d\theta}{dt} + \gamma\cos\sigma\frac{di}{dt},$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\gamma_1\frac{d\theta}{dt} + \sin\theta\cos i\frac{di}{dt},$$

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = -\beta_1\frac{d\sigma}{dt} + \alpha\frac{d\theta}{dt} - \gamma_1\sin\sigma\frac{di}{dt},$$

$$\frac{d\beta_1}{dt} = \alpha_1\frac{d\sigma}{dt} + \beta\frac{d\theta}{dt} + \gamma_1\cos\sigma\frac{di}{dt},$$

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = \gamma\frac{d\theta}{dt} - \cos\theta\cos i\frac{di}{dt},$$

$$\frac{d\alpha_2}{dt} = -\beta_2\frac{d\sigma}{dt} - \gamma_2\sin\sigma\frac{di}{dt},$$

$$\frac{d\beta_2}{dt} = \alpha_2\frac{d\sigma}{dt} + \gamma_2\cos\sigma\frac{di}{dt},$$

$$\frac{d\gamma_2}{dt} = -\sin i\frac{di}{dt}.$$

18. Supposons maintenant que le système mobile de coordonnées soit invariablement lié au plan instantané, de sorte qu'aucun déplacement des points fixes dans ce plan n'ait lieu relativement au système mentionné. Pour distinguer ces coordonnées de celles qui sont rapportées à des axes, mobiles non seulement dans l'espace, mais encore, relativement au système fixé au plan variable, désignons par le caractère barré $\bar{\sigma}$ la valeur de l'angle σ, lorsqu'on le compte à partir d'une direction fixe dans le plan nommé.

Cela étant, nommons $x_1, y_1, z_1, a, b, c, a_1, \ldots$ ce que deviennent $\xi, \eta, \zeta, \alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \ldots$ lorsque, dans les formules respectives, on met partout $\bar{\sigma}$ au lieu de σ, de sorte qu'on a:

$$a = \cos\theta\cos\bar{\sigma} + \sin\theta\sin\bar{\sigma}\cos i,$$

etc. . . .

Désignons ensuite les vitesses de rotation autour des axes formant avec le plan instantané un système invariable, par λ, μ, ν, ce qui nous donnera les expressions

$$\lambda = c\frac{db}{dt} + c_1\frac{db_1}{dt} + c_2\frac{db_2}{dt}$$

$$= -b\frac{dc}{dt} - b_1\frac{dc_1}{dt} - b_2\frac{dc_2}{dt},$$

$$\mu = a\frac{dc}{dt} + a_1\frac{dc_1}{dt} + a_2\frac{dc_2}{dt}$$

$$= -c\frac{da}{dt} - c_1\frac{da_1}{dt} - c_2\frac{da_2}{dt},$$

$$\nu = b\frac{da}{dt} + b_1\frac{da_1}{dt} + b_2\frac{da_2}{dt}$$

$$= -a\frac{db}{dt} - a_1\frac{db_1}{dt} - a_2\frac{db_2}{dt}.$$

En introduisant, dans ces formules, les valeurs des neuf coefficients, exprimées par les trois angles, ainsi que celles de leurs dérivées, il en résultera:

$$(e)\quad \left\{\begin{aligned} \lambda &= \cos\sigma\frac{di}{dt} - \sin\sigma\sin i\frac{d\theta}{dt}, \\ \mu &= \sin\sigma\frac{di}{dt} + \cos\sigma\sin i\frac{d\theta}{dt}, \\ \nu &= -\frac{d\sigma}{dt} + \cos i\frac{d\theta}{dt}, \end{aligned}\right.$$

et, avec ces notations, s'expriment aisément les vitesses suivant les axes liés au plan mobile. En désignant ces composantes par u, v, w, on a les équations connues

$$\mathrm{u} = \mu z_1 - \nu y_1,$$

$$\mathrm{v} = \nu x_1 - \lambda z_1,$$

$$\mathrm{w} = \lambda y_1 - \mu x_1$$

Si l'on y pose, pour obtenir les équations de l'axe instantané de rotation,

$$\mathrm{u} = \mathrm{v} = \mathrm{w} = 0,$$

on trouvera trois équations, dont toutefois deux seulement sont indépendantes, la troisième ne formant qu'une simple conséquence des autres. Mais les équations qu'on obtient ainsi sont en même temps les équations du rayon vecteur rapportées à des coordonnées rectangulaires, pourvu que le point x_1, y_1, z_1 appartienne à la trajectoire.

Par ce que nous venons de dire, il est facile de voir qu'on fera coïncider le rayon vecteur avec l'axe de rotation du plan instantané, si, après avoir fixé la condition

$$z_1 = 0,$$

on établit les liaisons

$$(6) \qquad 0 = -\frac{d\sigma}{dt} + \cos i \frac{d\theta}{dt},$$

$$(7) \qquad 0 = \lambda y_1 - \mu x_1,$$

dont la dernière sera, en effet, identique avec l'équation (5), lorsqu'on y met x_1 et y_1 à la place de ξ et η.

En désignant toujours par r le rayon vecteur, et par w, l'angle qu'il forme avec l'axe des x_1, de façon qu'on ait:

$$x_1 = r\cos w, \qquad y_1 = r\sin w,$$

l'équation (7) se remplace par celle-ci:

$$(8) \qquad 0 = \sin(w - \sigma)\frac{di}{dt} - \cos(w - \sigma)\sin i \frac{d\theta}{dt},$$

dont nous ferons usage prochaînement.

Après avoir établi l'équation (6), ou bien, ce qui revient au même, celles ci:

$$(f) \qquad \begin{cases} 0 = b\dfrac{da}{dt} + b_1\dfrac{da_1}{dt} + b_2\dfrac{da_2}{dt}, \\ 0 = -a\dfrac{db}{dt} - a_1\dfrac{db_1}{dt} - a_2\dfrac{db_2}{dt}, \end{cases}$$

il sera facile de parvenir aux relations

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a\dfrac{dx}{dt} + a_1\dfrac{dy}{dt} + a_2\dfrac{dz}{dt}, \\ \dfrac{dy_1}{dt} = b\dfrac{dx}{dt} + b_1\dfrac{dy}{dt} + b_2\dfrac{dz}{dt}, \\ \quad 0 = c\dfrac{dx}{dt} + c_1\dfrac{dy}{dt} + c_2\dfrac{dz}{dt}, \end{cases}$$

d'où l'on tire réciproquement:

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a\dfrac{dx_1}{dt} + b\dfrac{dy_1}{dt}, \\ \dfrac{dy}{dt} = a_1\dfrac{dx_1}{dt} + b_1\dfrac{dy_1}{dt}, \\ \dfrac{dz}{dt} = a_2\dfrac{dx_1}{dt} + b_2\dfrac{dy_1}{dt}. \end{cases}$$

Dans ces deux systèmes, les coordonnées jouissent de la propriété remarquable que leurs premières dérivées sont liées au moyen de relations de la même forme, n'importe si les a, b, ... sont variables ou constants. C'est en établissant d'abord ces conditions que Hansen parvint aux expressions assez utiles au calcul des formules analytiques donnant les inégalités des planètes, mais qui ne sont plus à tout égard convenables, quand il s'agit d'expressions absolues, c'est-à-dire d'expressions où l'on a évité tout développement suivant les puissances du temps.

En retranchant les équations (10) de celles qu'on va obtenir en formant les différentielles totales des expressions (1), après y avoir remplacé l'angle σ par $\bar{\sigma}$, on retiendra:

$$(11)\quad \begin{cases} 0 = x_1\dfrac{da}{dt} + y_1\dfrac{db}{dt}, \\ 0 = x_1\dfrac{da_1}{dt} + y_1\dfrac{db_1}{dt}, \\ 0 = x_1\dfrac{da_2}{dt} + y_1\dfrac{db_2}{dt}. \end{cases}$$

De chacune de ces équations, on pourrait, en ayant égard à l'équation (6), retrouver la relation (8), mais il s'ensuit encore les rapports

$$da : da_1 : da_2 = db : db_1 : db_2.$$

Pour les vérifier, il faut se rappeler les relations qui découlent immédiatement des équations (a), à savoir:

$$a\frac{da}{dt} + a_1\frac{da_1}{dt} + a_2\frac{da_2}{dt} = 0,$$

$$b\frac{db}{dt} + b_1\frac{db_1}{dt} + b_2\frac{db_2}{dt} = 0$$

Ces équations, formant avec les équations (f) deux systèmes, chacun renfermant deux équations avec trois dérivées, on en peut éliminer une dérivée quelconque, et on retiendra ainsi une relation entre les deux autres dérivées. Eu égard aux équations (c″), ou plutôt aux équations en résultant si l'on remplace α par a, β par b, ..., les relations qu'on déduit de la sorte seront obtenues sous une forme très simple: voici les expressions dont il s'agit:

$$\text{(g)} \qquad \left\{ \begin{aligned} 0 &= c_1\frac{da}{dt} - c\frac{da_1}{dt}, \\ 0 &= c_2\frac{da}{dt} - c\frac{da_2}{dt}, \\ 0 &= c_2\frac{da_1}{dt} - c_1\frac{da_2}{dt}, \end{aligned} \right.$$

$$\text{(g}'\text{)} \qquad \left\{ \begin{aligned} 0 &= c_1\frac{db}{dt} - c\frac{db_1}{dt}, \\ 0 &= c_2\frac{db}{dt} - c\frac{db_2}{dt}, \\ 0 &= c_2\frac{db_1}{dt} - c_1\frac{db_2}{dt} \end{aligned} \right.$$

Maintenant, si l'on écrit l'équation (5) de la manière suivante:

$$0 = \left(c\frac{da}{dt} + c_1\frac{da_1}{dt} + c_2\frac{da_2}{dt}\right)x_1 + \left(c\frac{db}{dt} + c_1\frac{db_1}{dt} + c_2\frac{db_2}{dt}\right)y_1,$$

et qu'on élimine les dérivées de a_1, a_2, b_1, b_2 en vertu des équations (g)

et (g'), on reviendra à la première des équations (11), et de la même manière on retrouvera les deux autres des dites équations.

19. Exprimons maintenant les coordonnées rectangulaires, rapportées aux directions fixes, par le rayon vecteur, par la longitude du point considéré, c'est-à-dire l'angle entre l'axe des x et la projection du rayon vecteur sur le plan immobile, et par la latitude. En nommant l et b ces deux angles, nous aurons:

$$(12)\qquad \begin{cases} x = r\cos b\cos l, \\ y = r\cos b\sin l, \\ z = r\sin b. \end{cases}$$

De l'autre côté, si nous introduisons, dans les équations (1), au lieu de ξ, η, ζ, les valeurs

$$x_1 = r\cos w; \qquad y_1 = r\sin w; \qquad z_1 = 0,$$

et au lieu de α, β, γ, α_1, ... les expressions de a, b, c, a_1, ..., nous obtiendrons les relations

$$(13)\qquad \begin{cases} \cos b\cos l = \cos\theta\cos(w-\sigma) - \cos i\sin\theta\sin(w-\sigma), \\ \cos b\sin l = \sin\theta\cos(w-\sigma) + \cos i\cos\theta\sin(w-\sigma), \\ \sin b = \sin i\sin(w-\sigma), \end{cases}$$

dont les deux premières se remplaceront par les suivantes:

$$(14)\qquad \begin{cases} \cos b\cos(l-\theta) = \cos(w-\sigma), \\ \cos b\sin(l-\theta) = \cos i\sin(w-\sigma). \end{cases}$$

A partir d'ici, je vais employer un caractère spécial $\mathfrak{z}$ pour marquer le sinus de la latitude, de sorte que j'aurai:

$$(15)\qquad \mathfrak{z} = \sin i\sin(w-\sigma);$$

et, en différentiant cette expression, j'obtiens:

$$\frac{d\mathfrak{z}}{dt} = \sin i\cos(w-\sigma)\frac{dw}{dt}$$
$$+ \cos i\sin(w-\sigma)\frac{di}{dt} - \sin i\cos(w-\sigma)\frac{d\sigma}{dt}.$$

Mais, en vertu des équations (6) et (8), les deux derniers termes de droite se détruisent, et on aura:

$$(16)\qquad \frac{d\zeta}{dw} = \sin i \cos(w - \sigma).$$

En partant des équations (12), il sera facile d'obtenir plusieurs relations utiles.

Voici d'abord les suivantes:

$$(17)\qquad \begin{cases} x\dfrac{dy}{dt} - y\dfrac{dx}{dt} = r^2 \cos b^2 \dfrac{dl}{dt}, \\[2ex] x\dfrac{dz}{dt} - z\dfrac{dx}{dt} = r^2 \cos l \dfrac{db}{dt} + r^2 \sin b \cos b \sin l \dfrac{dl}{dt}, \\[2ex] y\dfrac{dz}{dt} - z\dfrac{dy}{dt} = r^2 \sin l \dfrac{db}{dt} - r^2 \sin b \cos b \cos l \dfrac{dl}{dt}. \end{cases}$$

Ensuite, si l'on considère les relations suivantes qu'on déduit facilement:

$$(18)\qquad \begin{cases} x\dfrac{dy}{dt} - y\dfrac{dx}{dt} = c_2\left(x_1\dfrac{dy_1}{dt} - y_1\dfrac{dx_1}{dt}\right), \\[2ex] x\dfrac{dz}{dt} - z\dfrac{dx}{dt} = -c_1\left(x_1\dfrac{dy_1}{dt} - y_1\dfrac{dx_1}{dt}\right), \\[2ex] y\dfrac{dz}{dt} - z\dfrac{dy}{dt} = c\left(x_1\dfrac{dy_1}{dt} - y_1\dfrac{dx_1}{dt}\right), \end{cases}$$

et qu'on se rappelle la formule

$$x_1\frac{dy_1}{dt} - y_1\frac{dx_1}{dt} = r^2\frac{dw}{dt},$$

qu'on obtient immédiatement, si l'on exprime x_1 et y_1 en coordonnées polaires, on parvient aux résultats

$$(19)\qquad \begin{cases} \cos b^2 \dfrac{dl}{dt} = \cos i \dfrac{dw}{dt}, \\[2ex] \dfrac{db}{dt} = (-c_1 \cos l + c \sin l)\dfrac{dw}{dt} \\[2ex] \qquad = -\sin i \cos(l - \theta)\dfrac{dw}{dt}. \end{cases}$$

Dernièrement, des équations (15) et (16), on déduit tout de suite les formules

$$\sin i = \sqrt{\zeta^2 + \left(\frac{d\zeta}{dw}\right)^2},$$

$$\cos i = \sqrt{1 - \zeta^2 - \left(\frac{d\zeta}{dw}\right)^2},$$

dont la seconde, introduite dans la première des équations précédentes, donne naissance à l'expression

(20) $$\frac{dl}{dw} = \frac{\sqrt{1 - \zeta^2 - \left(\frac{d\zeta}{dw}\right)^2}}{1 - \zeta^2}.$$

On pourrait encore remarquer que, si l'on multipliait la seconde des équations (19) par $\cos b$, et qu'on considérât la première des équations (14), on retomberait dans l'équation (16).

20. Passons maintenant à l'hypothèse la plus générale concernant la position de l'axe des ξ dans le plan instantané. Nous ne supposons donc plus que la direction de l'axe dont il s'agit est invariablement liée à ce plan, mais bien qu'elle se déplace dans ce plan, selon une loi quelconque que nous admettons exprimée analytiquement par une fonction du temps, toujours finie et continue. En désignant par N une telle fonction, généralement différente de zéro, notre supposition s'exprime moyennant les relations

(21) $$N = \beta\frac{d\alpha}{dt} + \beta_1\frac{d\alpha_1}{dt} + \beta_2\frac{d\alpha_2}{dt} - \alpha\frac{d\beta}{dt} - \alpha_1\frac{d\beta_1}{dt} - \alpha_2\frac{d\beta_2}{dt},$$

ou bien par celle-ci:

(22) $$N = -\frac{d\sigma}{dt} + \cos i\frac{d\theta}{dt}.$$

En partant de là, on déduit plusieurs formules importantes remplaçant celles que nous venons de trouver dans les deux derniers numéros, pour l'hypothèse: $N = 0$.

On aura d'abord, par un calcul assez simple :

$$(23)\qquad \begin{cases} x\dfrac{d\alpha}{dt} + y\dfrac{d\alpha_1}{dt} + z\dfrac{d\alpha_2}{dt} = N\eta, \\[2ex] x\dfrac{d\beta}{dt} + y\dfrac{d\beta_1}{dt} + z\dfrac{d\beta_2}{dt} = -N\xi, \end{cases}$$

et ensuite :

$$(\gamma)\qquad \begin{cases} \gamma_2\dfrac{d\alpha}{dt} - \gamma\dfrac{d\alpha_2}{dt} = -N\alpha_1, \\[2ex] \gamma_2\dfrac{d\alpha_1}{dt} - \gamma_1\dfrac{d\alpha_2}{dt} = N\alpha, \\[2ex] \gamma_1\dfrac{d\alpha}{dt} - \gamma\dfrac{d\alpha_1}{dt} = N\alpha_2. \end{cases}$$

$$(\gamma')\qquad \begin{cases} \gamma_2\dfrac{d\beta}{dt} - \gamma\dfrac{d\beta_2}{dt} = -N\beta_1, \\[2ex] \gamma_2\dfrac{d\beta_1}{dt} - \gamma_1\dfrac{d\beta_2}{dt} = N\beta, \\[2ex] \gamma_1\dfrac{d\beta}{dt} - \gamma\dfrac{d\beta_1}{dt} = N\beta_2 \end{cases}$$

Puis, si l'on différentie les deux premières des équations (1′), et que l'on porte, dans le résultat, les valeurs (23), il viendra :

$$(24)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt} - N\eta = \alpha\dfrac{dx}{dt} + \alpha_1\dfrac{dy}{dt} + \alpha_2\dfrac{dz}{dt}, \\[2ex] \dfrac{d\eta}{dt} + N\xi = \beta\dfrac{dx}{dt} + \beta_1\dfrac{dy}{dt} + \beta_2\dfrac{dz}{dt}, \end{cases}$$

auxquelles équations il faut ajouter l'équation (3), à savoir :

$$0 = \gamma\frac{dx}{dt} + \gamma_1\frac{dy}{dt} + \gamma_2\frac{dz}{dt}.$$

Des équations que nous venons de mettre en évidence dernièrement, on déduit réciproquement les suivantes :

$$(25)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha\dfrac{d\xi}{dt} + \beta\dfrac{d\eta}{dt} - N(\alpha\eta - \beta\xi), \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = \alpha_1\dfrac{d\xi}{dt} + \beta_1\dfrac{d\eta}{dt} - N(\alpha_1\eta - \beta_1\xi), \\[2ex] \dfrac{dz}{dt} = \alpha_2\dfrac{d\xi}{dt} + \beta_2\dfrac{d\eta}{dt} - N(\alpha_2\eta - \beta_2\xi), \end{cases}$$

en vertu desquelles, retranchées des équations (4), après y avoir égalé à zéro ζ et $\dfrac{d\zeta}{dt}$, on parvient aux résultats

$$(26)\quad \begin{cases} 0 = \xi\dfrac{d\alpha}{dt} + \eta\dfrac{d\beta}{dt} + N(\alpha\eta - \beta\xi), \\[2ex] 0 = \xi\dfrac{d\alpha_1}{dt} + \eta\dfrac{d\beta_1}{dt} + N(\alpha_1\eta - \beta_1\xi), \\[2ex] 0 = \xi\dfrac{d\alpha_2}{dt} + \eta\dfrac{d\beta_2}{dt} + N(\alpha_2\eta - \beta_2\xi) \end{cases}$$

En vertu des expressions (25), il sera facile d'obtenir encore les relations suivantes remplaçant les équations (18):

$$(27)\quad \begin{cases} x\dfrac{dy}{dt} - y\dfrac{dx}{dt} = \gamma_2\left(\xi\dfrac{d\eta}{dt} - \eta\dfrac{d\xi}{dt}\right) + \gamma_2(\xi^2 + \eta^2)N, \\[2ex] z\dfrac{dx}{dt} - x\dfrac{dz}{dt} = \gamma_1\left(\xi\dfrac{d\eta}{dt} - \eta\dfrac{d\xi}{dt}\right) + \gamma_1(\xi^2 + \eta^2)N, \\[2ex] y\dfrac{dz}{dt} - z\dfrac{dy}{dt} = \gamma\left(\xi\dfrac{d\eta}{dt} - \eta\dfrac{d\xi}{dt}\right) + \gamma(\xi^2 + \eta^2)N. \end{cases}$$

Puis, en nommant v l'angle entre le rayon vecteur et l'axe des ξ, ce qui donne:

$$\xi = r\cos v; \qquad \eta = r\sin v,$$

$$\xi\frac{d\eta}{dt} - \eta\frac{d\xi}{dt} = r^2\frac{dv}{dt}; \qquad \xi^2 + \eta^2 = r^2,$$

la première des équations précédentes se change en celle-ci:

$$\cos b^2\frac{dl}{dt} = \gamma_2\frac{dv}{dt} + \gamma_2 N$$

Mais, si l'on se rappelle la relation

$$c_2 = \gamma_2 = \cos i,$$

et qu'on admette la notation

$$N = \frac{dg}{dt},$$

la comparaison du résultat obtenu tout à l'heure à la première des équations (19), nous donne sur le champ:

$$dw = dv + dg.$$

On obtient ensuite, en égalant à zéro la constante arbitraire:

(28) $$w = v + g.$$

Avec la notation adoptée, on tire de l'équation (22'):

$$\frac{dg}{dt} = -\frac{d\sigma}{dt} + \cos i \frac{d\theta}{dt};$$

et puisqu'on a:

$$0 = -\frac{d\sigma'}{dt} + \cos i \frac{d\theta}{dt},$$

il s'ensuivra:

$$\frac{dg}{dt} = \frac{d(\sigma' - \sigma)}{dt},$$

résultat qu'on pouvait d'ailleurs prévoir en vertu de considérations assez simples.

En intégrant, et en mettant la constante d'intégration égale à zéro, il résultera, de l'équation obtenue, la suivante:

(29) $$\sigma' = \sigma + g,$$

d'où l'on tire, en la retranchant de l'équation (28),

$$w - \sigma' = v - \sigma.$$

Par ces relations, il est visible que la quantité g n'est autre chose que l'angle dans le plan instantané entre l'axe fixe et l'axe mobile.

Avec la relation dernièrement trouvée, on obtient les expressions suivantes remplaçant les équations (15) et (16):

$$(30)\qquad \begin{cases} \zeta = \sin i \sin(v - \sigma), \\ \dfrac{d\zeta}{dv} = \sin i \cos(v - \sigma)\dfrac{dw}{dv}, \\ \quad = \sin i \cos(v - \sigma)\left(1 + \dfrac{dg}{dv}\right), \end{cases}$$

et, au lieu de l'équation (8), celle-ci:

$$(31)\qquad 0 = \cos i \sin(v - \sigma)\frac{di}{dt} - \sin i \cos(v - \sigma)\left(\frac{d\sigma}{dt} + \frac{dg}{dt}\right).$$

21. Pour déterminer la position de l'axe des ξ dans le plan instantané, nous allons maintenant admettre une hypothèse spéciale qui entraînera des simplifications assez considérables de nos formules. On parvient à une telle détermination en mettant:

$$\sigma = \theta,$$

ou bien:

$$(32)\qquad g = \sigma - \theta.$$

Cela établi, on obtient de l'équation (22'):

$$(33)\qquad \frac{dg}{dt} = -(1 - \cos i)\frac{d\theta}{dt},$$

d'où l'on conclut d'abord que g est une quantité du deuxième ordre par rapport à l'inclinaison mutuelle des deux plans. Dans le cas des planètes, la différentielle $\frac{dg}{dt}$ est très petite, et cela pour deux raisons: d'abord parce qu'on peut choisir le plan fixe de manière à avoir les inclinaisons toujours assez petites; et encore, parce que les déplacements du noeud sont très lents.

On obtient ensuite, en vertu des équations (14):

$$(34)\qquad \begin{cases} \cos b \cos(l - \theta) = \cos(v - \theta), \\ \cos b \sin(l - \theta) = \cos i \sin(v - \theta); \end{cases}$$

par les équations (30), celles-ci:

$$
(35)\qquad \begin{cases} \zeta = \sin i \sin (v - \theta), \\ \dfrac{d\zeta}{dv} = \sin i \cos (v - \theta)\left(1 - 2 \sin^2 \dfrac{1}{2} i \dfrac{d\theta}{dv}\right); \end{cases}
$$

et enfin, par l'équation (31), la suivante:

$$
(36)\qquad 0 = \cos i \sin (v - \theta) \frac{di}{dt} - \sin i \cos (v - \theta)\left(\frac{d\theta}{dt} + \frac{dg}{dt}\right).
$$

On peut encore signaler les équations suivantes qu'on tire immédiatement des équations (35):

$$
(37)\qquad \begin{cases} \sin i \sin \theta = - \zeta \cos v + \dfrac{\dfrac{d\zeta}{dv} \sin v}{1 - 2 \sin^2 \dfrac{1}{2} i \dfrac{d\theta}{dv}}, \\ \sin i \cos \theta = \zeta \sin v + \dfrac{\dfrac{d\zeta}{dv} \cos v}{1 - 2 \sin^2 \dfrac{1}{2} i \dfrac{d\theta}{dv}}. \end{cases}
$$

Mais les simplifications les plus essentielles des relations précédentes sont celles qu'éprouvent les formules (d), (d') et (d'') par la substitution de θ au lieu de σ. En effet, au lieu d'être fonctions des trois quantités θ, σ, i, les neuf coefficients dont il s'agit ne dépendent plus, l'angle σ étant égal à θ, que de deux variables, et nous aurons:

$$
(\delta)\qquad \begin{cases} \alpha = 1 - \sin^2 \dfrac{1}{2} i (1 - \cos 2\theta), \\ \beta = \sin^2 \dfrac{1}{2} i \sin 2\theta, \\ \gamma = \sin i \sin \theta, \end{cases}
$$

$$
(\delta')\qquad \begin{cases} \alpha_1 = \sin^2 \dfrac{1}{2} i \sin 2\theta, \\ \beta_1 = 1 - \sin^2 \dfrac{1}{2} i (1 + \cos 2\theta), \\ \gamma_1 = - \sin i \cos \theta, \end{cases}
$$

$$(\delta'')\qquad \left\{\begin{aligned} \alpha_2 &= -\sin i \sin\theta,\\ \beta_2 &= \sin i \cos\theta,\\ \gamma_2 &= 1 - 2\sin\frac{1}{2}i^2. \end{aligned}\right.$$

Il pourrait être utile d'avoir les relations entre les α, β, γ, α_1, ... d'un côté et les a, b, c, a_1, ... de l'autre: on les trouve aisément, en introduisant, dans les formules (d), (d') et (d''),

$$\sigma = \bar{\sigma} - g;$$

il résultera ainsi:

$$\begin{aligned} \alpha &= a\cos g + b\sin g,\\ \beta &= b\cos g - a\sin g,\\ \gamma &= c,\\[1ex] \alpha_1 &= a_1\cos g + b_1\sin g,\\ \beta_1 &= b_1\cos g - a_1\sin g,\\ \gamma_1 &= c_1,\\[1ex] \alpha_2 &= a_2\cos g + b_2\sin g,\\ \beta_2 &= b_2\cos g - a_2\sin g,\\ \gamma_2 &= c_2, \end{aligned}$$

ou réciproquement:

$$\begin{aligned} a &= \alpha\cos g - \beta\sin g,\\ b &= \beta\cos g + \alpha\sin g,\\ c &= \gamma \end{aligned}$$

etc.

22. Par les relations que nous venons d'établir, on est parvenu à exprimer les neuf coefficients α, β, ... moyennant deux inconnues θ et i, tandis qu'ils en dépendaient primitivement de trois. En revanche, la fonction g, qui lie les deux systèmes de coefficients, paraît constituée de deux

parties, dont l'une est de nature séculaire et l'autre, un agrégat périodique. Dans les recherches auxquelles nous arriverons plus tard, il conviendra cependant de séparer ces deux parties, et d'en réunir la partie séculaire avec l'angle σ, de manière à avoir:

$$\bar{\sigma} = \sigma + g_0 t, \tag{38}$$

g_0 étant une constante de l'ordre des forces troublantes et du second degré par rapport à l'inclinaison mutuelle des deux plans. L'agrégat périodique faisant l'autre partie de la fonction g, nous la nommons G, et nous aurons ainsi:

$$g = g_0 t + G. \tag{39}$$

Maintenant, si l'on introduit, dans l'équation (32), les valeurs signalées de $\bar{\sigma}$ et de g, on obtiendra immédiatement:

$$\sigma = \theta + G, \tag{40}$$

d'où il est visible que le mouvement moyen de l'angle σ est toujours le même que celui de l'angle θ.

Les expressions des α, β, ... deviendront maintenant celles-ci:

$$(\mathrm{D})\quad \left\{\begin{aligned} \alpha &= \left\{1 - \sin\tfrac{1}{2}i^2(1 - \cos 2\theta)\right\}\cos G - \sin\tfrac{1}{2}i^2 \sin 2\theta \sin G, \\ \beta &= \sin\tfrac{1}{2}i^2 \sin 2\theta \cos G + \left\{1 - \sin\tfrac{1}{2}i^2(1 - \cos 2\theta)\right\}\sin G, \\ \gamma &= \sin i \sin\theta, \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{D}')\quad \left\{\begin{aligned} \alpha_1 &= \sin\tfrac{1}{2}i^2 \sin 2\theta \cos G - \left\{1 - \sin\tfrac{1}{2}i^2(1 + \cos 2\theta)\right\}\sin G, \\ \beta_1 &= \left\{1 - \sin\tfrac{1}{2}i^2(1 + \cos 2\theta)\right\}\cos G + \sin\tfrac{1}{2}i^2 \sin 2\theta \sin G, \\ \gamma_1 &= -\sin i \cos\theta, \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{D}'')\quad \left\{\begin{aligned} \alpha_2 &= -\sin i \sin\theta \cos G - \sin i \cos\theta \sin G, \\ \beta_2 &= \sin i \cos\theta \cos G - \sin i \sin\theta \sin G, \\ \gamma_2 &= \cos i, \end{aligned}\right.$$

d'où il est aisé de voir que les neuf coefficients ne dépendent plus d'autres arguments que de ceux qui apparaissent déjà dans les expressions de θ et de i. En effet, l'intégration qu'exige l'équation (33) n'introduit aucun autre nouvel argument que $g_0 t$, lequel nous avons réuni à l'angle σ. Les termes périodiques se trouvant dans l'expression de g dépendent donc seulement des mêmes arguments que θ et i. C'est évidemment de même quant aux coefficients $\alpha, \beta, \ldots$.

En considérant les relations

$$w - \bar{\sigma} = v - \sigma = v - \theta - G,$$

on aura, en vertu des équations (14),

$$(41) \quad \begin{cases} \cos b \cos(l - \theta) = \cos(v - \theta) \cos G + \sin(v - \theta) \sin G, \\ \cos b \sin(l - \theta) = \cos i \{\sin(v - \theta) \cos G - \cos(v - \theta) \sin G\}, \end{cases}$$

et ensuite, par l'équation (22'),

$$N = g_0$$

Il conviendra de noter encore les formules suivantes, qui découlent des équations (28) et (30):

$$(42) \qquad w = v + g_0 t,$$

$$(30') \quad \begin{cases} \zeta = \sin i \sin(v - \theta - G), \\ \dfrac{d\zeta}{dv} = \sin i \cos(v - \theta - G)\left(1 + g_0 \dfrac{dt}{dv}\right). \end{cases}$$

Au lieu de l'équation (8), nous aurons finalement:

$$(31') \qquad 0 = \sin(v - \theta - G)\frac{di}{dt} - \sin i \cos(v - \theta - G)\frac{d\theta}{dt}.$$

Une remarque générale relativement aux formules dernièrement obtenues. L'agrégat périodique G étant dans les théories des planètes une très petite quantité, on pourrait développer les fonctions $\cos G$ et $\sin G$ suivant les puissances de cet agrégat, et il n'y aurait lieu de mettre en évidence, dans ces puissances, que les premiers termes. Il paraît toutefois superflu d'écrire, à cette place, les formules qu'on obtiendrait ainsi.

Les formules précédentes ne changeraient pas beaucoup si l'on avait mis

$$\sigma = \sigma + \bar{g}v, \tag{43}$$

$$g = gv + G \tag{44}$$

au lieu des équations (38) et (39), $\bar{g}$ étant une nouvelle constante du même ordre que g_0. En effet, l'équation (40), les neuf équations (D), (D'), (D''), ainsi que les équations (41) et (31') et la première des équations (30') restent inaltérées; c'est seulement l'équation (42) et la seconde des équations (30') qui subissent une modification, du reste peu considérable. Nous avons maintenant:

$$w = (1 + \bar{g})v, \tag{45}$$

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{z} &= \sin i \sin(v - \theta - G), \\ \frac{d\mathfrak{z}}{dv} &= (1 + g) \sin i \cos(v - \theta - G), \end{aligned}\right. \tag{46}$$

ainsi que l'expression suivante de la vitesse N:

$$N = \bar{g}\frac{dv}{dt}.$$

23. Le problème que je me propose finalement d'aborder dans le chapitre présent, est celui-ci:

Etant donnée, par un agrégat périodique, la fonction $\mathfrak{z}$, trouver les expressions des fonctions trigonométriques de θ *et de* i.

Mais, comme il s'agit principalement de mettre en évidence les termes élémentaires que nous supposons contenus dans les expressions cherchées, admettons dès le début qu'on ait la fonction $\mathfrak{z}$ donnée par le développement

$$\mathfrak{z} = \iota \sin((1 + \tau)v - \Theta) + \iota_1 \sin((1 + \tau_1)v - S_1) + \ldots, \tag{47}$$

les ι, ainsi que les τ et les S, étant des constantes, dont ι et les premiers ι_1, ι_2, ... sont de l'ordre des inclinaisons des diverses arbitraires planétaires, les τ, de l'ordre des forces troublantes, et les S, des angles quelconques. Quant aux constantes ι et Θ, nous les supposons engendrées par l'intégration d'une équation différentielle du second ordre donnant naissance à la fonction $\mathfrak{z}$.

Etablissons d'abord les formules

$$
(48)\qquad \begin{cases} I\cos(\Omega - \Theta) = \iota + C(\iota_s,\ \tau_s - \tau,\ \Theta - S_1)(v), \\ I\sin(\Omega - \Theta) = -S(\iota_s,\ \tau_s - \tau,\ \Theta - S_1)(v), \end{cases}
$$

et nous aurons:

$$
(49)\qquad \zeta = I\sin((1+\tau)v - \Omega).
$$

Puis, en différentiant cette équation, nous aurons un résultat de la forme

$$
(50)\qquad \frac{d\zeta}{dv} = I\cos((1+\tau)v - \Omega) + (\zeta),
$$

(ζ) étant une fonction de la même nature que la fonction (λ), introduite dans le n° 13.

Maintenant, si nous introduisons, dans les équations (46), les expressions obtenues, nous parviendrons aux résultats que voici:

$$
(51)\qquad \begin{cases} \sin i \sin(v - \theta - G) = I\sin((1+\tau)v - \Omega), \\ \sin i \cos(v - \theta - G) = I\cos((1+\tau)v - \Omega) + ((\zeta)), \end{cases}
$$

où l'on a admis la notation

$$
(52)\qquad ((\zeta)) = \frac{(\zeta)}{1+g} + \left(\frac{1}{1+g} - 1\right) I\cos((1+\tau)v - \Omega)
$$

Des équations (51), on déduit facilement l'expression suivante

$$
(53)\qquad \cos i = \sqrt{1 - I^2 - 2((\zeta))\, I\cos((1+\tau)v - \Omega) - ((\zeta))^2},
$$

formule, en vertu de laquelle la première des équations (19) se transforme en celle-ci:

$$
(54)\qquad dl = \frac{\sqrt{1 - I^2 - 2((\zeta))\, I\cos((1+\tau)v - \Omega) - ((\zeta))^2}}{1 - I^2\sin((1+\tau)v - \Omega)^2}(1+g)\,dv.
$$

Moyennant les deux formules (53) et (54), on parvient à déterminer les deux fonctions $\cos i$ et l en termes connus, toutefois la très petite quantité g, dont on trouve d'ailleurs facilement une valeur approchée, est

encore indéterminée. Ayant trouvé l'expression de l, on formera d'une manière assez directe celles des coordonnées x, y, z, vu qu'on a:

$$\cos b = \sqrt{1 - \mathfrak{z}^2},$$

Mais il conviendra d'exprimer, par des termes trigonométriques connus, aussi les fonctions $\sin i \sin \theta$ et $\sin i \cos \theta$. Pour y arriver, établissons d'abord l'expression de la deuxième dérivée de la fonction $\mathfrak{z}$. On obtient facilement:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\mathfrak{z}}{dv^2} = &-(1+g)\sin i \sin(v - \theta - \Gamma) \\ &+ (1+g)\sin i \sin(v - \theta - \Gamma)\left(\frac{d\theta}{dv} + \frac{d\Gamma}{dv}\right) \\ &+ (1+g)\cos i \cos(v - \theta - \Gamma)\frac{di}{dv};\end{aligned}$$

et, si l'on se rappelle la relation

$$\frac{d\theta}{dv} + \frac{d\Gamma}{dv} = \cos i \frac{d\theta}{dv} - g,$$

on trouvera, en ajoutant à l'expression de $\frac{d^2\mathfrak{z}}{dv^2}$ celle de $\mathfrak{z}$,

$$(55)\qquad \begin{aligned}\frac{d^2\mathfrak{z}}{dv^2} + \mathfrak{z} = &-g(2+g)\sin i \sin(v - \theta - \Gamma) \\ &+ (1+g)\sin i \cos i \sin(v - \theta - \Gamma)\frac{d\theta}{dv} \\ &+ (1+g)\cos i \cos(v - \theta - \Gamma)\frac{di}{dv};\end{aligned}$$

et puisqu'on a:

$$0 = -\sin i \cos i \cos(v - \theta - \Gamma)\frac{d\theta}{dv} + \cos i \sin(v - \theta - \Gamma)\frac{di}{dv},$$

on obtiendra les deux formules

$$(56)\qquad \left\{\begin{aligned}\left(\frac{d^2\mathfrak{z}}{dv^2} + \mathfrak{z}\right)\cos(v - \theta - \Gamma) = &-g(2+g)\sin i \sin(v - \theta - \Gamma)\cos(v - \theta - \Gamma) \\ &+ (1+g)\cos i \frac{di}{dv}, \\ \left(\frac{d^2\mathfrak{z}}{dv^2} + \mathfrak{z}\right)\sin(v - \theta - \Gamma) = &-g(2+g)\sin i \sin(v - \theta - \Gamma)^2 \\ &+ (1+g)\sin i \cos i \frac{d\theta}{dv}.\end{aligned}\right.$$

En multipliant la dernière de ces relations par $\sin i$ et en la divisant par $(1+g)\cos i$, il résultera, en vertu de la première des équations (51),

$$\sin i^2 \frac{d\theta}{dv} = \frac{I \sin((1+\tau)v - \Omega)}{(1+g)\cos i}\left(\frac{d^2\zeta}{dv^2} + \zeta\right) + \frac{g(2+g)I^2 \sin((1+\tau)v - \Omega)^2}{(1+g)\cos i}.$$

Cela étant, nous nous rappelons la formule

$$\frac{dG}{dv} = -(1-\cos i)\frac{d\theta}{dv} - g$$

$$= -\frac{1}{2}\sin i^2\left(1 + \frac{1}{4}\sin i^2 + \ldots\right)\frac{d\theta}{dv} - \bar{g};$$

en y introduisant la valeur précédente de $\sin i^2 \frac{d\theta}{dv}$, ainsi que celles des fonctions $\sin i^2$, $\sin i^4$, ..., nous aurons:

$$(57) \qquad \frac{dG}{dv} = -\frac{1}{2}\frac{1 + \frac{1}{4}I^2 + \ldots}{(1+g)\left(1 - \frac{1}{2}I^2 - \ldots\right)}\left\{ I \sin((1+\tau)v - \Omega)\left(\frac{d^2\zeta}{dv^2} + \zeta\right) + g(2+\bar{g})I^2 \sin((1+\tau)v - \Omega)^2 \right\} - g,$$

d'où il sera facile de déduire, en déterminant la constante $\bar{g}$ de manière à annuler le terme constant dans le développement de $\frac{dG}{dv}$, l'expression de la fonction G en termes périodiques.

Cette fonction évaluée, rien n'empêche plus d'établir, en termes connus, les expressions des fonctions cherchées

$$(58) \qquad \begin{cases} \sin i \sin\theta = -I \sin(\tau v - \Omega + G) + ((\zeta)) \sin(v - G), \\ \sin i \cos\theta = I \cos(\tau v - \Omega + G) + ((\zeta)) \cos(v - G). \end{cases}$$

Ensuite, des équations (41), il sera aisé de tirer les suivantes

$$(59) \qquad \begin{cases} \cos b \cos l = \cos(v - G) + (1 - \cos i)\sin(v - \theta - G)\sin\theta, \\ \cos b \sin l = \sin(v - G) - (1 - \cos i)\sin(v - \theta - G)\cos\theta, \end{cases}$$

d'où l'on obtient:

$$(60)\quad \begin{cases} \cos b \sin (l - v) = - \sin G - (1 - \cos i) \sin (v - \theta - G) \cos (v - \theta), \\ \cos b \cos (l - v) = \cos G - (1 - \cos i) \sin (v - \theta - G) \sin (v - \theta). \end{cases}$$

On conclut facilement de ces dernières relations que la différence $l - v$ s'exprime par un agrégat périodique, tant que G est une petite quantité du même degré que les fonctions $1 - \cos i$ et $1 - \cos b$. On pourra donc parvenir, de deux manières différentes, à la résolution du problème énoncé: en déterminant la fonction l par l'intégration de la formule (54) et encore, en évaluant la fonction G en vertu de l'équation (57). Ayant obtenu, au moyen des équations (58), les fonctions $\sin i \sin \theta$ et $\sin i \cos \theta$, on trouvera, en utilisant les équations (60), les fonctions $\sin G$ et $\cos G$, si la différence $l - v$ est connue, ou bien, cette différence, si l'on a déterminé d'abord la fonction G.

24. Je vais terminer ce chapitre en expliquant quelques termes nouveaux que je crois utile d'introduire.

La hauteur au dessus du plan fixe, à laquelle monte la trace d'une courbe périplégmatique, sera nommée *l'anastème* de cette courbe. Or, l'anastème étant donné, du moins approximativement, par l'expression

$$rI,$$

r et I ayant les valeurs que prennent ces fonctions, lorsque l'argument $(1 + \tau)v - \Omega$ est égal à un multiple impair du quart de la circonférence, j'appelle la fonction I *fonction anastématique* et, l'argument envisagé, *argument anastématique*.

Les hypothèses que nous venons d'admettre, dans les recherches précédentes sur les courbes périplégmatiques, nous ont conduit à exprimer le rayon vecteur ainsi que les coordonnées rectangulaires, rapportées à des directions fixes dans l'espace, comme fonctions de certaines longitudes, dont la signification est immédiatement claire. Ces longitudes, étant employées très fréquemment dans l'astronomie, je les nomme *arguments astronomiques*. Mais, par cette dénomination, j'entends encore tout autre argument dont la différence avec un argument qui par sa nature est immédiatement astronomique, s'exprime par un agrégat périodique. Deux arguments, liés de la sorte l'un à l'autre, seront appelés *arguments isocinétiques*.

Il peut arriver que l'agrégat périodique, formant la différence entre deux arguments isocinétiques, ne dépend que de ces deux arguments eux-mêmes; dans ce cas, je dis que les deux arguments sont *homorythmiques*, parce que tous les deux augmentent, simultanément, d'un multiple de la circonférence. Dans ce sens, les arguments képleriens, l'anomalie vraie, l'anomalie excentrique et l'anomalie moyenne sont des arguments homorythmiques.

On comprend facilement qu'une série trigonométrique dépendant d'un certain argument peut être transformée de manière à ne dépendre plus que d'un autre argument, homorythmique avec celui-là; mais il arrive aussi, même le plus souvent, que des arguments isocinétiques peuvent se remplacer, l'un par l'autre. Au contraire, deux arguments, non isocinétiques ne peuvent pas se remplacer, l'un l'autre.

Envisageons maintenant le cas simple où la fonction diastématique ainsi que la fonction anastématique ont des valeurs constantes. Pour que cela puisse avoir lieu, il faut que les coefficients $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots$, que j'appelle *coefficients diastématiques,* ainsi que les coefficients $\iota_1, \iota_2, \ldots$, que j'appelle *coefficients anastématiques,* aient des valeurs égales à zéro. Il s'ensuit que les fonctions η et I prennent alors les valeurs

$$\eta = \varkappa, \qquad I = \iota,$$

valeurs que je nomme *module diastématique* et *module anastématique.* Dans le cas envisagé, le diastème est constant, mais l'anastème, variable, pourvu qu'on n'ait pas le module diastématique égal à zéro, ce qui entraînerait une valeur constante du rayon vecteur.

En supposant $\varkappa$ et ι différents de zéro, mais toujours, les coefficients diastématiques et les coefficients anastématiques égaux à zéro, les arguments entrant dans les expressions des coordonnées rectangulaires rapportées aux directions fixes, seraient au nombre de trois: la longitude du rayon vecteur comptée dans le plan instantané, la longitude d'une des apsides et finalement, la longitude d'un des noeuds du plan instantané sur le plan fixe.

Le rayon vecteur, ne dépendant que de la différence entre sa longitude et celle de l'apside, différence que je nommerai *argument diastématique,* son expression analytique est visiblement indépendante de la direction à partir de laquelle on compte les arcs; il est même indifférent si cette direction est invariable ou non.

Il en est tout autrement quant aux expressions du mouvement relativement au plan fixe.

Supposons d'abord l'axe des ξ invariablement lié au plan instantané, ce qui nous amène à écrire, dans les formules (49) et (50), w au lieu de v.

Maintenant, si nous considérons les équations (15) et (16), et que nous fassions attention à ce qu'on a:

$$(\zeta) = \tau I \cos((1 + \tau)w - \Theta),$$

vu que la fonction Ω est, dans notre cas, égale à la constante Θ, nous aurons:

$$\sin i \sin(w - \sigma) = I \sin((1 + \tau)w - \Theta),$$

$$\sin i \cos(w - \sigma) = (1 + \tau) I \cos((1 + \tau)w - \Theta)$$

Il s'ensuit que les arguments $w - \sigma$ et $(1 + \tau)w - \Theta$ sont homorythmiques, ce qui est aussi visible du développement suivant, qu'on déduit facilement:

$$w - \sigma = w - (\Theta - \tau w) - \frac{\tau}{2 + \tau} \sin 2(w - (\Theta - \tau w))$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{2 + \tau}\right)^2 \sin 4(w - (\Theta - \tau w)) - \ldots$$

Mais l'argument θ, qu'il faut connaître pour le calcul des coordonnées rectangulaires, d'après les formules (13) n'est homorythmique avec aucun des autres arguments déjà apparus, ni même isocinétique. Le nombre des arguments effectivement distincts ne s'abaisse donc pas au dessous de trois, la direction à partir de laquelle on compte les longitudes étant liée, invariablement, au plan instantané. Et encore, l'argument θ étant l'angle entre la direction fixe et la ligne d'intersection des deux plans, les expressions des coordonnées rectangulaires ne peuvent aucunement être indépendantes de la direction fixe.

Il en serait de même, si l'on faisait tourner, avec la vitesse g_0, l'axe des ξ, dans le plan mobile, de sorte que les longitudes θ et σ devinssent isocinétiques. Mais dans ce cas, les trois arguments auraient été composés de trois éléments, savoir v, $\varsigma v + \Gamma$ et $\tau v - \Theta$, tandis que, dans le cas précédent, les trois arguments dépendaient des quatre éléments: w, $\varsigma w + \Gamma$, $\tau w - \Theta$ et θ.

CHAPITRE III.

Relations entre les arguments astronomiques et le temps.

25. Par une induction admirable, l'immortel Képler parvint, en examinant les observations tychoniennes, à découvrir les lois connues portant à jamais son nom. Mais, ce grand scrutateur, l'adhérant d'une métaphysique, impossible après Newton, et dont les derniers brouillards disparurent en présence des lumières des Kant et des Laplace, méconnut la vraie nature de ses découvertes. Loin d'être l'expression parfaite des lois éternelles et inébranlables, rendant l'image des idées du créateur, son résultat était approximatif et empirique. En effet, les positions d'une planète calculées, pour divers moments, d'après les règles de Képler ne coincident avec les résultats d'observation que pendant un intervalle assez court. Plus cet intervalle s'agrandit, plus inexactes deviennent les positions calculées: un petit nombre de semaines suffisent pour que les différences entre l'observation et le calcul soient mises en évidence. Si l'intervalle dont il s'agit comprend quelques centaines d'années, les écarts du calcul montent à des quantités du même ordre que les erreurs de la théorie de Ptolémée, et si, finalement, la série d'observations s'étend sur un temps de quelques dizaines de siècles, la conception du mouvement elliptique ne porte pas mieux à la connaissance des mouvements effectifs des planètes que ne le font les idées hardies mais grandioses des pythagoriciens, fondateurs de la science et, si l'on doit croire les mythes, partisans de la métempsycose. Il s'ensuit que de nos jours, la théorie de Képler ne paraît, à vrai dire, qu'empirique, même à l'esprit le plus modeste.

Que les lois de Képler aient dominé néanmoins si longtemps l'astronomie théorique, cela tient principalement à la méthode de la variation des constantes arbitraires, méthode inventée par Lagrange et employée, dans la théorie des mouvements des planètes, avec tant de succès par lui-même, par Laplace et plusieurs autres astronomes les plus éminents. Mais en revanche, la nature des variations séculaires, découverte à l'aide de la

méthode dont nous parlions, amenait à considérer des courbes plus générales que l'ellipse comme orbites absolues des planètes

Des découvertes de Képler, il s'ensuit toutefois un résultat, inaltéré par des observations s'étendant sur plusieurs siècles, et dont le maintien se confirme par des considérations théoriques: ce fait, demeuré intact parmi les conceptions de Képler et s'appliquant aussi à la théorie des orbites absolues, le voici:

Si l'on admet, entre le temps et la longitude d'une planète, la relation

$$dt = \frac{r^2}{\sqrt{c}}\,dv,$$

et que l'on porte, dans cette formule, l'expression de r que nous avons donnée dans l'expression (43) du chap. I, la fonction c sera approximativement égale à

$$\mu a(1-\eta^2),$$

μ étant une constante dont la valeur est à peu près égale pour toutes les planètes de notre système solaire.

En conséquence, si l'on désigne par ζ une fonction de t, telle qu'on ait rigoureusement:

$$(1) \qquad d\zeta = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}} \frac{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1-\eta\cos((1-\varsigma)v-\pi))^2}\,dv,$$

le rapport

$$\frac{d\zeta}{dt}$$

sera toujours à peu près égal à l'unité.

C'était pour obtenir la forme indiquée de la fonction c qu'on a admis l'équation (43) du chap. I, exprimant le rayon vecteur dans l'orbite absolue.

26. Il s'agit maintenant de trouver l'intégrale de l'équation (1). Pour y arriver d'une manière aisée, désignons la constante $\sqrt{\mu}a^{-\frac{3}{2}}$ par n, l'argument diastématique $(1-\varsigma)v-\pi$, par F, et introduisons, au lieu de F, un nouvel argument, homorythmique avec F et, en conséquence, astronomique. Désignons le nouvel argument par E, et établissons les relations

$$(2) \qquad \cos F = \frac{\cos E - \eta}{1-\eta\cos E}, \qquad \sin F = \frac{\sqrt{1-\eta^2}\sin E}{1-\eta\cos E};$$

il s'ensuit réciproquement les équations

$$(2')\quad \begin{cases} \cos E = \dfrac{\cos F + \eta}{1 + \eta \cos F}, \qquad \sin E = \dfrac{\sqrt{1 - \eta^2}\sin F}{1 + \eta \cos F}, \\ \dfrac{1}{1 + \eta \cos F} = \dfrac{1 - \eta \cos E}{1 - \eta^2}, \end{cases}$$

dont la dernière entraîne l'expression

$$(3)\qquad r = a(1 - \eta \cos E)$$

remplaçant l'équation (43) du chap. I.

Qu'on remarque l'analogie des relations (2) et (3) avec les relations correspondantes de la théorie elliptique. Seulement, la quantité η n'est plus, dans la théorie des orbites absolues, une constante, mais bien, une fonction élémentaire du type (A).

On déduit d'ailleurs l'équation suivante, aussi analogue à une formule très connue de la théorie elliptique,

$$(4)\qquad \operatorname{tang}\frac{1}{2}F = \sqrt{\frac{1 + \eta}{1 - \eta}}\operatorname{tang}\frac{1}{2}E.$$

Maintenant, si l'on multiple l'équation (1) par $(1 - \varsigma)$, et qu'on désigne, comme dans le chap. I, l'angle $(1 - \varsigma)v - \Gamma$ par f, il viendra:

$$(1 - \varsigma)nd\zeta = \frac{(1 - \eta^2)^{\frac{3}{2}}df}{(1 + \eta \cos F)^2}$$
$$= \frac{(1 - \eta \cos E)^2 df}{\sqrt{1 - \eta^2}}.$$

En différentiant la première des équations (2), on aura facilement, en vertu de la relation

$$F = f - (\pi - \Gamma),$$

la suivante:

$$(df - d(\pi - \Gamma))\sin F = \frac{(1 - \eta^2)\sin E}{(1 - \eta \cos E)^2}dE + \frac{\sin E^2}{(1 - \eta \cos E)^2}d\eta;$$

et, par conséquent, si l'on considère la seconde des dites équations,

$$df = \frac{\sqrt{1-\eta_{\prime}^2}}{1-\eta_{\prime}\cos E}\,dE + \frac{\sin E}{\sqrt{1-\eta_{\prime}^2}\,(1-\eta_{\prime}\cos E)}\,d\eta_{\prime} + d(\pi - \Gamma').$$

Avec cette valeur de df, on déduit de l'expression précédente de $d\zeta$ la suivante:

$$(1-\varsigma)\,n\,d\zeta = (1-\eta_{\prime}\cos E)\,dE + \frac{(1-\eta_{\prime}\cos E)\sin E}{1-\eta_{\prime}^2}\,d\eta_{\prime}$$
$$+ \frac{(1-\eta_{\prime}\cos E)^2}{\sqrt{1-\eta_{\prime}^2}}\,d(\pi-\Gamma').$$

Supposons maintenant:

(5) $$(1-\varsigma)\,n\zeta + A - \pi = E - \eta_{\prime}\sin E - (1-\varsigma)X,$$

A étant une constante arbitraire, introduite par l'intégration; la fonction X s'obtiendra alors en réintégrant la dérivée totale de la formule hypothétique (5), après en avoir retranché la partie donnée par l'équation précédente. On trouvera de la sorte, en considérant la relation

$$\int \eta_{\prime}\cos E\,dE = \eta_{\prime}\sin E - \int \sin E\,d\eta_{\prime},$$

l'expression que voici:

$$(1-\varsigma)X = -\int \frac{(2-\eta_{\prime}\cos E-\eta_{\prime}^2)\sin E}{1-\eta_{\prime}^2}\,d\eta_{\prime}$$
$$-\int \frac{1}{\eta_{\prime}}\left\{\frac{(1-\eta_{\prime}\cos E)^2}{\sqrt{1-\eta_{\prime}^2}} - 1\right\}\eta_{\prime}\,d(\pi-\Gamma').$$

Cette formule, n'étant pas, cependant, assez commode, on la remplace facilement par une autre, mieux préparée au développement, en série trigonométrique, de la fonction cherchée. En effet, si nous considérons les formules

$$d\eta_{\prime} = \cos(\pi-\Gamma')\,d(\eta_{\prime}\cos(\pi-\Gamma')) + \sin(\pi-\Gamma')\,d(\eta_{\prime}\sin(\pi-\Gamma')),$$

$$\eta_{\prime}\,d(\pi-\Gamma') = \cos(\pi-\Gamma')\,d(\eta_{\prime}\sin(\pi-\Gamma')) - \sin(\pi-\Gamma')\,d(\eta_{\prime}\cos(\pi-\Gamma')),$$

très faciles à vérifier, nous aurons, en remplaçant l'argument E par F, au moyen des formules (2'):

$$(6)\qquad (1-\varsigma)X = -\int \frac{\sqrt{1-\eta^2}\{2+\eta\cos F\}\sin F\cos(\pi-\Gamma)d(\eta\cos(\pi-\Gamma))}{(1+\eta\cos F)^2}$$

$$-\int \frac{\sqrt{1-\eta^2}\{2+\eta\cos F\}\sin F\sin(\pi-\Gamma)d(\eta\sin(\pi-\Gamma))}{(1+\eta\cos F)^2}$$

$$-\int \frac{1}{\eta}\left\{\frac{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\eta\cos F)^2}-1\right\}\cos(\pi-\Gamma)d(\eta\sin(\pi-\Gamma))$$

$$+\int \frac{1}{\eta}\left\{\frac{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\eta\cos F)^2}-1\right\}\sin(\pi-\Gamma)d(\eta\cos(\pi-\Gamma)).$$

Pour effectuer les intégrations qu'exige cette formule, il faut avant tout qu'on ait établi le développement de la fonction $(1+\eta\cos F)^{-2}$, suivant multiples de F, et notamment qu'on ait mis en évidence la forme suivante du dit développement:

$$(7)\qquad \frac{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\eta\cos F)^2} = 1 + B_1\cos F + 2B_2\cos 2F + 3B_3\cos 3F + \ldots,$$ [1]

les B étant des fonctions de η seul.

---

[1] On déduit, par un calcul assez simple, les développements

$$B_1 = -2\eta(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{4}{2}\frac{3}{1.2^2}\eta^2+\frac{6}{2}\frac{4.5}{1.2.2^4}\eta^4+\ldots\right),$$

$$B_2 = 3\frac{\eta^2}{2}(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{5}{3}\frac{4}{1.2^2}\eta^2+\frac{7}{3}\frac{5.6}{1.2.2^4}\eta^4+\ldots\right),$$

$$B_3 = -4\frac{\eta^3}{2^2}(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{6}{4}\frac{5}{1.2^2}\eta^2+\frac{8}{4}\frac{6.7}{1.2.2^4}\eta^4+\ldots\right),$$

. . . .

ainsi que l'identité

$$1 = (1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{3}{1}\frac{2}{1.2^2}\eta^2+\frac{5}{1}\frac{3.4}{1.2.2^4}\eta^4+\ldots\right).$$

Si l'on porte, dans l'équation

$$(8)\qquad (1-\varsigma)nd\zeta = \frac{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}df}{(1+\eta\cos F)^2},$$

le développement (7), hypothétique encore, il est vrai, mais qui est très facile à vérifier, on aura, en intégrant et en désignant la constante arbitraire par A,

$$(9)\qquad (1-\varsigma)n\zeta + A - \pi = F + B_1 \sin F + B_2 \sin 2F + \ldots$$
$$- \int D\{B_1 \sin F + B_2 \sin 2F + \ldots\},$$

où l'on a indiqué, par le symbole D, une différentiation se rapportant seulement aux fonctions $\eta\sin(\pi - \Gamma)$, $\eta\cos(\pi - \Gamma)$ et η^2, ainsi qu'à leurs puissances et produits, mais où l'on considère l'angle F comme constant.

Maintenant, si l'on admet la notation

$$(10)\qquad G = (1-\varsigma)n\zeta + A - \pi + (1-\varsigma)X,$$

l'équation (5) prendra la forme bien connue de l'équation de Képler, savoir:

$$(11)\qquad G = E - \eta \sin E;$$

et puisque la relation entre les arcs E et F est la même qu'entre l'anomalie excentrique et l'anomalie vraie, seulement que η, dans les formules (4) et (11), est une fonction élémentaire du type (A), la relation entre G et F doit être celle qu'on connaît déjà de la théorie káplerienne. Il s'ensuit que, si l'on différentie les relations mentionnées, en y considérant η comme constant, on retrouvera les développements connus. Donc, si l'on pose:

$$E - \eta \sin E = \int \frac{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}dF}{1+\eta\cos F},$$

on doit, en intégrant le second membre, traiter η comme une constante.

Les développements des relations entre les trois anomalies ont beaucoup occupé Hansen. Pour lui, cependant, il ne s'agissait que de trouver les coefficients sous une forme permettant de calculer, aisément, leurs valeurs numériques, l'excentricité de l'orbite supposée constante, tandis que, dans la théorie des perturbations absolues, on les demande sous forme de séries

procédant suivant les puissances de η^2. On pourrait, il est vrai, tirer ces développements des expressions de HANSEN, mais on les déduit, plus aisément, d'une manière directe.

27. De la relation

$$E = \arcsin \frac{\sqrt{1 - \eta^2} \sin F}{1 + \eta \cos F},$$

qu'on obtient immédiatement de la deuxième des équations (2'), il s'ensuit, vu qu'on peut maintenant considérer η comme constant, la relation

$$dE = \frac{\sqrt{1 - \eta^2}}{1 + \eta \cos F} dF.$$

En cherchant, de la manière bien connue, les coefficients du développement

$$\frac{\sqrt{1 - \eta^2}}{1 + \eta \cos F} = A_0 + A_1 \cos F + A_2 \cos 2F + \ldots,$$

on trouvera d'abord

$$A_0 = 1,$$

$$A_1 = \frac{2}{\eta}(\sqrt{1 - \eta^2} - 1)$$

$$= -\eta\left(1 + \frac{1}{4}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^4 + \frac{5}{64}\eta^6 + \frac{7}{128}\eta^8 + \ldots\right),$$

et ensuite la formule générale

$$A_s = -\frac{2}{\eta} A_{s-1} - A_{s-2},$$

en vertu de laquelle, on pourrait deduire, de proche en proche, les expressions dont il s'agit.

Mais on obtient aussi les coefficients demandés en vertu de la formule suivante, qui permet le calcul immédiat de chacun d'eux:

$$A_s = (-1)^s 2\left(\frac{\eta}{1 + \sqrt{1 - \eta^2}}\right)^s = (-1)^s 2\left(\frac{1 - \sqrt{1 - \eta^2}}{\eta}\right)^s.$$

On a obtenu de la sorte:

$$A_2 = \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{1}{4}\eta^4 + \frac{5}{32}\eta^6 + \frac{7}{64}\eta^8 + \ldots,$$

$$A_3 = -\frac{1}{4}\eta^3 - \frac{3}{16}\eta^5 - \frac{9}{64}\eta^7 - \frac{7}{64}\eta^9 - \ldots,$$

$$A_4 = \frac{1}{8}\eta^4 + \frac{1}{8}\eta^6 + \frac{7}{64}\eta^8 + \ldots,$$

$$A_5 = -\frac{1}{16}\eta^5 - \frac{5}{64}\eta^7 - \frac{5}{64}\eta^9 - \ldots,$$

$$A_6 = \frac{1}{32}\eta^6 + \frac{3}{64}\eta^8 + \ldots,$$

$$A_7 = -\frac{1}{64}\eta^7 - \frac{7}{256}\eta^9 - \ldots,$$

$$A_8 = \frac{1}{128}\eta^8 + \ldots,$$

$$A_9 = -\frac{1}{256}\eta^9 - \ldots.$$

Ayant obtenu les résultats précédents, il sera facile d'en déduire les coefficients du développement

$$(12) \qquad G - F = B_1 \sin F + B_2 \sin 2F + \ldots,$$

ces coefficients étant les mêmes que nous avons mis en évidence dans l'équation (7). En effet, on déduit, de l'équation mentionnée, l'expression de G, tout à fait comme dans la théorie elliptique, c'est à dire en l'intégrant après avoir multiplié son second membre par dF, et en y considérant η comme une constante.

De l'équation

$$\sin E = \frac{\sqrt{1 - \eta^2}\sin F}{1 + \eta\cos F},$$

on déduit maintenant le développement

$$\sin E = \sin F\{1 + A_1 \cos F + A_2 \cos 2F + \ldots\}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}A_2\right)\sin F + \frac{1}{2}(A_1 - A_3)\sin 2F + \ldots.$$

Après avoir multiplié cette équation par η, nous retranchons le produit de l'expression

$$\mathrm{E} = \mathrm{F} + A_1 \sin \mathrm{F} + \frac{1}{2} A_2 \sin 2\mathrm{F} + \frac{1}{3} A_3 \sin 3\mathrm{F} + \dots,$$

ce qui nous donnera:

$$(12') \qquad \mathrm{G} = \mathrm{E} - \eta \sin \mathrm{E} = \mathrm{F} + \left(\frac{1}{1} A_1 - \eta\left(1 - \frac{1}{2} A_2\right)\right) \sin \mathrm{F}$$
$$+ \left(\frac{1}{2} A_2 - \frac{1}{2}\eta(A_1 - A_3)\right) \sin 2\mathrm{F}$$
$$+ \left(\frac{1}{3} A_3 - \frac{1}{2}\eta(A_2 - A_4)\right) \sin 3\mathrm{F}$$
$$+ \dots.$$

On a donc, généralement,

$$B_s = \frac{1}{s} A_s - \frac{1}{2}\eta(A_{s-1} - A_{s+1}),$$

formule qui ne souffre aucune autre exception que celle qui a lieu lorsque s est égal à l'unité.

L'expression générale de A_s que nous avons signalé un peu plus haut, entraîne la relation suivante entre deux coefficients consécutifs:

$$A_{s+1} = - A_s \frac{1 - \sqrt{1 - \eta^2}}{\eta};$$

en la portant dans l'équation

$$A_{s-1} - A_{s+1} = - 2\left(A_{s+1} + \frac{1}{\eta} A_s\right),$$

qui découle immédiatement d'une formule déjà donnée, il s'ensuivra:

$$A_{s-1} - A_{s+1} = - \frac{2}{\eta} \sqrt{1 - \eta^2} A_s.$$

En vertu de cette valeur, on obtiendra de l'expression précédente de B_s la formule

$$B_s = \left(\frac{1}{s} + \sqrt{1 - \eta^2}\right) A_s,$$

ou bien:

$$B_s = (-1)^s 2\left(\frac{1}{s} + \sqrt{1-\eta^2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{1-\eta^2}}{\eta}\right)^s$$

En mettant, dans cette formule s égal à l'unité, on en tire l'expression finie:

$$B_1 = -2\eta;$$

les autres B seront exprimés au moyen des développements que voici:

$$B_2 = \frac{3}{4}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^4 + \frac{3}{64}\eta^6 + \frac{3}{128}\eta^8 + \ldots,$$

$$B_3 = -\frac{1}{3}\eta^3 - \frac{1}{8}\eta^5 - \frac{1}{16}\eta^7 - \frac{7}{192}\eta^9 - \ldots,$$

$$B_4 = \frac{5}{32}\eta^4 + \frac{3}{32}\eta^6 + \frac{15}{256}\eta^8 + \ldots,$$

$$B_5 = -\frac{3}{40}\eta^5 - \frac{1}{16}\eta^7 - \frac{3}{64}\eta^9 - \ldots,$$

$$B_6 = \frac{7}{192}\eta^6 + \frac{5}{128}\eta^8 + \ldots,$$

$$B_7 = -\frac{1}{56}\eta^7 - \frac{3}{128}\eta^9 - \ldots,$$

$$B_8 = \frac{9}{1024}\eta^8 + \ldots,$$

$$B_9 = -\frac{5}{1152}\eta^9 - \ldots,$$

$$\ldots\ldots$$

Cela fait, il sera facile de retrouver le développement (7). Si, dans ce but, on différentie l'équation (12'), et qu'on introduise, dans le résultat ainsi obtenu, la valeur de $\frac{dE}{dF}$ et celle de $(1-\eta\cos E)$, η étant toujours considéré comme constant, on aura sur le champ l'équation (7), qui se trouve ainsi vérifiée. Mais pour vérifier les coefficients numériques apparais-

sant dans les expressions données plus haut, on pourra mettre, dans l'équation (7), F égal à zéro, ce qui conduit à l'expression

$$\frac{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\eta)^2} = 1 - 2\eta + \frac{3}{2}\eta^2 - \eta^3 + \frac{7}{8}\eta^4 - \frac{3}{4}\eta^5$$

$$+ \frac{11}{16}\eta^6 - \frac{5}{8}\eta^7 + \frac{75}{128}\eta^8 - \frac{35}{64}\eta^9 + \ldots$$

$$= 1 + B_1 + 2B_2 + 3B_3 + \ldots,$$

égalité, d'où l'on conclut facilement l'exactitude de nos chiffres.

En introduisant, dans les divers termes de l'expression (6), le développement obtenu de $(1 + \eta \cos F)^{-2}$, on aura tout de suite des expressions dont l'intégration demandée ne causera plus de difficulté.

Mais on pourra aussi trouver une autre expression de la fonction X, plus facile à mettre en nombres que la formule (6). Dans ce but, comparons les trois formules (9), (10) et (12), et nous arriverons tout d'abord au résultat

$$(13) \qquad (1 - \varsigma)X = \int D\{B_1 \sin F + B_2 \sin 2F + \ldots\},$$

d'où il est immédiatement visible que la fonction X est toujours une très petite quantité du premier ordre par rapport aux forces troublantes et du premier degré par rapport aux coefficients diastématiques.

28. Pour une raison qui sera reconnue dans le numéro prochain, nous allons développer les puissances entières et positives de l'agrégat périodique G — F.

Dans ce but, admettons la notation

$$\alpha = e^{iF},$$

d'où il s'ensuit:

$$\sin F = \frac{1}{2i}(\alpha - \alpha^{-1}), \qquad \sin 2F = \frac{1}{2i}(\alpha^2 - \alpha^{-2}), \quad \ldots.$$

L'expression qu'il s'agit de développer, prend maintenant, n étant un entier, la forme:

$$(14)\quad (G - F)^n = (B_1 \sin F + B_2 \sin 2F + \ldots)^n$$

$$= \frac{1}{(2i)^n}\Big\{[B_1\alpha + B_2\alpha^2 + \ldots]^n$$

$$- \frac{n}{1}[B_1\alpha + B_2\alpha^2 + \ldots]^{n-1}[B_1\alpha^{-1} + B_2\alpha^{-2} + \ldots]$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}[B_1\alpha + B_2\alpha^2 + \ldots]^{n-2}[B_1\alpha^{-1} + B_2\alpha^{-2} + \ldots]^2$$

$$- \ldots\Big\}$$

Commençons par établir le développement

$$[B_1\alpha + B_2\alpha^2 + \ldots]^n = \lambda_n^{(n)}\alpha^n + \lambda_{n+1}^{(n)}\alpha^{n+1} + \ldots,$$

et cherchons à déterminer les coefficients λ.

On s'aperçoit immédiatement des égalités

$$\lambda_1^{(1)} = B_1, \qquad \lambda_2^{(1)} = B_2, \quad \ldots,$$

ainsi que des formules suivantes servant à calculer de proche en proche les divers coefficients:

$$\lambda_n^{(n)} = B_1\lambda_{n-1}^{(n-1)},$$

$$\lambda_{n+1}^{(n)} = B_1\lambda_n^{(n-1)} + B_2\lambda_{n-1}^{(n-1)},$$

$$\lambda_{n+2}^{(n)} = B_1\lambda_{n+1}^{(n-1)} + B_2\lambda_n^{(n-1)} + B_3\lambda_{n-1}^{(n-1)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ces formules étant les plus convenables au calcul des coefficients dont il s'agit, il n'y a pas lieu de chercher des formules donnant les coefficients isolés indépendamment des autres, formules qui deviendraient assez compliquées.

Voici les résultats qu'on a obtenus en calculant les coefficients dont il s'agit de proche en proche:

$$\lambda_2^{(2)} = 4\eta^2,$$

$$\lambda_3^{(2)} = -3\eta^3 - \frac{1}{2}\eta^5 - \frac{3}{16}\eta^7 - \ldots,$$

$$\lambda_4^{(2)} = \frac{91}{48}\eta^4 + \frac{11}{16}\eta^6 + \ldots,$$

$$\lambda_5^{(2)} = -\frac{9}{8}\eta^5 - \frac{31}{48}\eta^7 - \ldots,$$

$$\lambda_6^{(2)} = \frac{1859}{2880}\eta^6 + \ldots,$$

$$\lambda_7^{(2)} = -\frac{29}{80}\eta^7 - \ldots,$$

$$\lambda_3^{(3)} = -8\eta^3,$$

$$\lambda_4^{(3)} = 9\eta^4 + \frac{3}{2}\eta^6 + \ldots,$$

$$\lambda_5^{(3)} = -\frac{59}{8}\eta^5 - \frac{21}{8}\eta^7 - \ldots,$$

$$\lambda_6^{(3)} = \frac{339}{64}\eta^6 + \ldots,$$

$$\lambda_7^{(3)} = -\frac{1097}{480}\eta^7 - \ldots,$$

$$\lambda_4^{(4)} = 16\eta^4,$$

$$\lambda_5^{(4)} = -24\eta^5 - 4\eta^7 - \ldots,$$

$$\lambda_6^{(4)} = \frac{145}{6}\eta^6 + \ldots,$$

$$\lambda_7^{(4)} = -\frac{163}{8}\eta^7 - \ldots,$$

$$\lambda_5^{(5)} = -32\eta^5,$$

$$\lambda_6^{(5)} = 60\eta^6 + \ldots,$$

$$\lambda_7^{(5)} = -\frac{215}{3}\eta^7 - \ldots,$$

$$\lambda_6^{(6)} = 64\eta^6,$$

$$\lambda_7^{(6)} = -144\eta^7 - \ldots,$$

$$\lambda_7^{(7)} = -128\eta^7,$$

Ensuite, nous établissons l'expression

$$[\lambda_n^{(n)}\alpha^n + \lambda_{n+1}^{(n)}\alpha^{n+1} + \dots][\lambda_n^{(n)}\alpha^{-n} + \lambda_{n+1}^{(n)}\alpha^{-n-1} + \dots]$$
$$= \theta_0^{(n)} + \theta_1^{(n)}(\alpha + \alpha^{-1}) + \theta_2^{(n)}(\alpha^2 + \alpha^{-2}) + \dots,$$

les θ étant donnés par les formules

$$\theta_0^{(n)} = (\lambda_n^{(n)})^2 + (\lambda_{n+1}^{(n)})^2 + (\lambda_{n+2}^{(n)})^2 + \dots,$$
$$\theta_1^{(n)} = \lambda_n^{(n)}\lambda_{n+1}^{(n)} + \lambda_{n+1}^{(n)}\lambda_{n+2}^{(n)} + \dots,$$
$$\theta_2^{(n)} = \lambda_n^{(n)}\lambda_{n+2}^{(n)} + \lambda_{n+1}^{(n)}\lambda_{n+3}^{(n)} + \dots,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

Avec les λ donnés plus haut, on a obtenu les résultats que voici:

$$\theta_0^{(1)} = 4\eta^2 + \frac{9}{16}\eta^4 + \frac{13}{144}\eta^6 + \dots,$$
$$\theta_1^{(1)} = -\frac{3}{2}\eta^3 - \frac{1}{2}\eta^5 - \frac{9}{32}\eta^7 - \dots,$$
$$\theta_2^{(1)} = \frac{2}{3}\eta^4 + \frac{47}{128}\eta^6 + \dots,$$
$$\theta_3^{(1)} = -\frac{5}{16}\eta^5 - \frac{39}{160}\eta^7 - \dots,$$
$$\theta_4^{(1)} = \frac{3}{20}\eta^6 + \dots,$$
$$\theta_5^{(1)} = -\frac{7}{96}\eta^7 - \dots,$$

$$\theta_0^{(2)} = 16\eta^4 + 9\eta^6 + \dots,$$
$$\theta_1^{(2)} = -12\eta^5 - \frac{123}{16}\eta^7 - \dots,$$
$$\theta_2^{(2)} = \frac{91}{12}\eta^6 + \dots,$$
$$\theta_3^{(2)} = -\frac{9}{2}\eta^7 - \dots,$$

$$\theta_0^{(3)} = 64\eta^6 + \dots,$$
$$\theta_1^{(3)} = -72\eta^7 - \dots$$

Nous allons encore etablir le développement

$$\{\theta_0^{(n)} + \theta_1^{(n)}(\alpha + \alpha^{-1}) + \ldots\}\{\lambda_m^{(m)}\alpha^m + \lambda_{m+1}^{(m)}\alpha^{m+1} + \ldots\}$$
$$= D_m^{m,n}\alpha^m + D_{m+1}^{m,n}\alpha^{m+1} + D_{m+2}^{m,n}\alpha^{m+2} + \ldots$$
$$+ D_{m-1}^{m,n}\alpha^{m-1} + D_{m-2}^{m,n}\alpha^{m-2} + \ldots,$$

où les coefficients D, ce qu'on conclut facilement, sont formés conformément aux formules suivantes:

$$D_m^{m,n} = \theta_0^{(n)}\lambda_m^{(m)} + \theta_1^{(n)}\lambda_{m+1}^{(m)} + \theta_2^{(n)}\lambda_{m+2}^{(m)} + \ldots,$$
$$D_{m+1}^{m,n} = \theta_1^{(n)}\lambda_m^{(m)} + \theta_0^{(n)}\lambda_{m+1}^{(m)} + \theta_1^{(n)}\lambda_{m+2}^{(m)} + \theta_2^{(n)}\lambda_{m+3}^{(m)} + \ldots,$$
$$D_{m+2}^{m,n} = \theta_2^{(n)}\lambda_m^{(m)} + \theta_1^{(n)}\lambda_{m+1}^{(m)} + \theta_0^{(n)}\lambda_{m+2}^{(m)} + \theta_1^{(n)}\lambda_{m+3}^{(m)} + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$D_{m-1}^{m,n} = \theta_1^{(n)}\lambda_m^{(m)} + \theta_2^{(n)}\lambda_{m+1}^{(m)} + \theta_3^{(n)}\lambda_{m+2}^{(m)} + \ldots,$$
$$D_{m-2}^{m,n} = \theta_2^{(n)}\lambda_m^{(m)} + \theta_3^{(n)}\lambda_{m+1}^{(m)} + \theta_4^{(n)}\lambda_{m+2}^{(m)} + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

En écrivant l'équation (14) de la manière suivante:

$$(\mathrm{G} - \mathrm{F})^n = \frac{1}{(2i)^n}\Big\{[B_1\alpha + B_2\alpha^2 + \ldots]^n \pm [B_1\alpha^{-1} + B_2\alpha^{-2} + \ldots]^n$$
$$- \frac{n}{1}[B_1\alpha + B_2\alpha^2 + \ldots][B_1\alpha^{-1} + B_2\alpha^{-2} + \ldots]$$
$$\times\{[B_1\alpha + B_2\alpha^2 + \ldots]^{n-2} \pm [B_1\alpha^{-1} + B_2\alpha^{-2} + \ldots]^{n-2}\}$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}[B_1\alpha + B_2\alpha^2 + \ldots]^2[B_1\alpha^{-1} + B_2\alpha^{-2} + \ldots]^2$$
$$\times\{[B_1\alpha + B_2\alpha^2 + \ldots]^{n-4} \pm [B_1\alpha^{-1} + B_2\alpha^{-2} + \ldots]^{n-4}\}$$
$$- \ldots\Big\},$$

on parvient immédiatement, en considérant les notations adoptées, au développement

$$
\begin{aligned}
(G-F)^n = {} & \frac{1}{(2i)^n}\left\{D_n^{n,0} - \frac{n}{1} D_n^{n-2,1} + \frac{n(n-1)}{1.2} D_n^{n-4,2} - \ldots\right\}(\alpha^n + \alpha^{-n}) \\
& + \frac{1}{(2i)^n}\left\{D_{n+1}^{n,0} - \frac{n}{1} D_{n+1}^{n-2,1} + \frac{n(n-1)}{1.2} D_{n+1}^{n-4,2} - \ldots\right\}(\alpha^{n+1} \pm \alpha^{-(n+1)}) \\
& + \frac{1}{(2i)^n}\left\{D_{n-1}^{n,0} - \frac{n}{1} D_{n-1}^{n-2,1} + \frac{n(n-1)}{1.2} D_{n-1}^{n-4,2} - \ldots\right\}(\alpha^{n-1} + \alpha^{-(n-1)}) \\
& + \frac{1}{(2i)^n}\left\{D_{n+2}^{n,0} - \frac{n}{1} D_{n+2}^{n-2,1} + \frac{n(n-1)}{1.2} D_{n+2}^{n-4,2} - \ldots\right\}(\alpha^{n+2} \pm \alpha^{-(n+2)}) \\
& + \ldots,
\end{aligned}
$$

et il est aisé de s'assurer qu'on doit prendre les signes supérieurs si n est un nombre pair; dans le cas opposé, il faut choisir les signes inférieurs. Dans le cas d'un nombre pair, il faut évidemment prendre la moitié du terme appartenant aux indices supérieurs o et $\frac{1}{2}n$.

Maintenant, si l'on écrit:

$$(15) \qquad (G-F)^n = B_0^{(n)} + B_1^{(n)} \frac{\cos}{\sin}\{F + B_2^{(n)} \frac{\cos}{\sin}\{2F + \ldots,$$

les B seront donnés au moyen de la formule générale

$$(16) \qquad B_{n\pm\nu}^{(n)} = \pm \frac{1}{2^{n-1}} \left\{ \begin{array}{l} D_{n+\nu}^{n,0} - \frac{n}{1} D_{n+\nu}^{n-2,1} + \frac{n(n-1)}{1.2} D_{n+\nu}^{n-4,2} - \ldots \\ \quad + \left\{ D_{(n-\nu)}^{n,0} - \frac{n}{1} D_{(n-\nu)}^{n-2,1} + \ldots \right\} \end{array} \right\};$$

et quant au signe du second membre, il faut distinguer deux cas: d'abord, si n est un nombre pair, on doit prendre $+$ ou $-$ selon que $\frac{n}{2}$ est un nombre pair ou impair; mais si n est un nombre impair, il faut choisir le signe $+$ si $\frac{n-1}{2}$ est un nombre pair, dans le cas opposé, le signe $-$.

En considérant qu'on a:

$$\theta_0^{(0)} = 1; \qquad \theta_1^{(0)} = \theta_2^{(0)} = \ldots = 0,$$

on obtient immédiatement, de la formule générale, celle-ci:

$$D_\nu^{\mu,0} = \lambda_\nu^{(\mu)},$$

μ étant un entier quelconque.

Ensuite, si m était égal à zéro, on aurait, vu que

$$\lambda_0^{(0)} = 1; \qquad \lambda_1^{(0)} = \lambda_2^{(0)} = \ldots = 0,$$

les valeurs

$$D_0^{0,n} = \theta_0^{(n)},$$

$$D_1^{0,n} = D^{0,n}_{-1} = \theta_1^{(n)},$$

$$D_2^{0,n} = D^{0,n}_{-2} = \theta_2^{(n)},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

En utilisant les formules données plus haut, on a obtenu, avec les valeurs indiquées des λ et des θ, les expressions suivantes:

$$D^{1,1}_{-3} = -\frac{3}{10}\eta^7 - \ldots,$$

$$D^{1,1}_{-2} = \frac{5}{8}\eta^6 + \ldots,$$

$$D^{1,1}_{-1} = -\frac{4}{3}\eta^5 - \frac{31}{32}\eta^7 - \ldots,$$

$$D^{1,1}_{0} = 3\eta^4 + \frac{3}{2}\eta^6 + \ldots,$$

$$D^{1,1}_{1} = -8\eta^3 - \frac{9}{4}\eta^5 - \frac{100}{144}\eta^7 - \ldots,$$

$$D^{1,1}_{2} = 6\eta^4 + \frac{155}{64}\eta^6 + \ldots,$$

$$D^{1,1}_{3} = -\frac{91}{24}\eta^5 - \frac{71}{32}\eta^7 - \ldots,$$

$$D^{1,1}_{4} = \frac{9}{4}\eta^6 + \ldots,$$

$$D^{1,1}_{5} = -\frac{1850}{1440}\eta^7 - \ldots.$$

$$D^{2,1}_{-1} = -\frac{5}{4}\eta^7 - \ldots,$$

$$D^{2,1}_{0} = \frac{8}{3}\eta^6 + \ldots,$$

$$D^{2,1}_{1} = -6\eta^5 - 4\eta^7 - \ldots,$$

$$D_2^{2.1} = \quad 16\eta^4 + \frac{27}{4}\eta^6 + \dots,$$

$$D_3^{2.1} = -18\eta^5 - \frac{273}{32}\eta^7 - \dots,$$

$$D_4^{2.1} = \quad \frac{59}{4}\eta^6 + \dots,$$

$$D_5^{2.1} = -\frac{339}{32}\eta^7 - \dots,$$

$$D_1^{3.1} = \quad \frac{16}{3}\eta^7 - \dots,$$

$$D_2^{3.1} = \quad 12\eta^6 + \dots,$$

$$D_3^{3.1} = -32\eta^5 - 18\eta^7 - \dots,$$

$$D_4^{3.1} = \quad 48\eta^6 + \dots,$$

$$D_5^{3.1} = -\frac{145}{3}\eta^7 - \dots,$$

$$D_3^{4.1} = -24\eta^7 - \dots,$$

$$D_4^{4.1} = \quad 64\eta^6 + \dots,$$

$$D_5^{4.1} = -120\eta^7 - \dots,$$

$$D_5^{5.1} = -128\eta^7 - \dots,$$

$$D_{-1}^{1.2} = -\frac{91}{6}\eta^7 - \dots,$$

$$D_0^{1.2} = \quad 24\eta^6 + \dots,$$

$$D_1^{1.2} = -32\eta^5 - 27\eta^7 - \dots,$$

$$D_2^{1.2} = \quad 36\eta^6 + \dots,$$

$$D_3^{1.2} = -\frac{59}{2}\eta^7 - \dots,$$

$$D_1^{2.2} = -48\eta^7 - \dots,$$

$$D_2^{2.2} = \quad 64\eta^6 + \dots,$$

$$D_3^{2.2} = -96\eta^7 - \dots,$$

$$D_3^{3.2} = -128\eta^7 - \dots,$$

$$D_1^{1.3} = -128\eta^7 - \dots.$$

Voici enfin les $B_{n+\nu}^{(\nu)}$, calculés d'après la formule générale indiquée plus haut, et vérifiés par des multiplications numériques :

$$B_0^{(2)} = 2\eta^2 + \frac{9}{32}\eta^4 + \frac{43}{228}\eta^6 + \ldots,$$

$$B_1^{(2)} = -\frac{3}{2}\eta^3 - \frac{1}{2}\eta^5 - \frac{9}{32}\eta^7 - \ldots,$$

$$B_2^{(2)} = -2\eta^2 + \frac{2}{3}\eta^4 + \frac{47}{128}\eta^6 + \ldots,$$

$$B_3^{(2)} = \frac{3}{2}\eta^3 - \frac{1}{16}\eta^5 - \frac{3}{20}\eta^7 - \ldots,$$

$$B_4^{(2)} = -\frac{91}{96}\eta^4 - \frac{31}{160}\eta^6 - \ldots,$$

$$B_5^{(2)} = \frac{9}{16}\eta^5 + \frac{1}{4}\eta^7 + \ldots,$$

$$B_6^{(2)} = -\frac{1850}{5760}\eta^6 - \ldots,$$

$$B_7^{(2)} = \frac{29}{160}\eta^7 + \ldots,$$

$$B_1^{(3)} = -6\eta^3 - \frac{11}{16}\eta^5 - \frac{119}{384}\eta^7 + \ldots,$$

$$B_2^{(3)} = \frac{9}{2}\eta^4 + \frac{345}{256}\eta^6 + \ldots,$$

$$B_3^{(3)} = 2\eta^3 - \frac{91}{32}\eta^5 - \frac{921}{640}\eta^7 + \ldots,$$

$$B_4^{(3)} = -\frac{9}{4}\eta^4 + \frac{21}{16}\eta^6 + \ldots,$$

$$B_5^{(3)} = \frac{59}{32}\eta^5 - \frac{599}{1920}\eta^7 + \ldots,$$

$$B_6^{(3)} = -\frac{339}{256}\eta^6 + \ldots,$$

$$B_7^{(3)} = \frac{1697}{1920}\eta^7 + \ldots$$

$$B_0^{(4)} = 6\eta^4 + \frac{49}{24}\eta^6 + \ldots,$$

$$B_1^{(4)} = -6\eta^5 - \frac{201}{64}\eta^7 + \ldots,$$

$$B_2^{(4)} = -8\eta^4 + \frac{37}{16}\eta^6 + \ldots,$$

$$B_3^{(4)} = 9\eta^5 + \frac{57}{64}\eta^7 + \ldots,$$

$$B_4^{(4)} = 2\eta^4 - \frac{59}{8}\eta^6 + \ldots,$$

$$B_5^{(4)} = -3\eta^5 + \frac{307}{64}\eta^7 + \ldots,$$

$$B_6^{(4)} = \frac{145}{48}\eta^6 \pm \ldots,$$

$$B_7^{(4)} = -\frac{163}{64}\eta^7 \pm \ldots,$$

$$B_1^{(5)} = -20\eta^5 - \frac{275}{48}\eta^7 + \ldots,$$

$$B_2^{(5)} = \frac{75}{4}\eta^6 \pm \ldots,$$

$$B_3^{(5)} = 10\eta^5 - \frac{205}{16}\eta^7 + \ldots,$$

$$B_4^{(5)} = -15\eta^6 \pm \ldots,$$

$$B_5^{(5)} = -2\eta^5 + \frac{725}{48}\eta^7 + \ldots,$$

$$B_6^{(5)} = \frac{15}{4}\eta^6 + \ldots,$$

$$B_7^{(5)} = -\frac{215}{48}\eta^7 + \ldots,$$

$$B_0^{(6)} = 20\eta^6 + \ldots,$$

$$B_1^{(6)} = -\frac{45}{2}\eta^7 + \ldots,$$

$$B_2^{(6)} = 30\eta^6 + \ldots,$$

$$B_3^{(6)} = \frac{81}{2}\eta^7 + \ldots,$$

$$B_1^{(6)} = \quad 12\eta^6 \pm \ldots,$$

$$B_5^{(6)} = -\frac{45}{2}\eta^7 + \ldots,$$

$$B_6^{(6)} = -\ 2\eta^6 \pm \ldots,$$

$$B_7^{(6)} = \quad \frac{9}{2}\eta^7 + \ldots,$$

$$B_1^{(7)} = -70\eta^7 + \ldots,$$

$$B_3^{(7)} = \quad 42\eta^7 \pm \ldots,$$

$$B_5^{(7)} = -14\eta^7 + \ldots,$$

$$B_7^{(7)} = \quad 2\eta^7 + \ldots.$$

Pour une dernière vérification du calcul, on a utilisé les équations de condition suivantes:

1° n étant un nombre pair,

$$0 = B_0^{(n)} + B_1^{(n)} + B_2^{(n)} + \ldots;$$

2° n étant un nombre impair,

$$0 = B_1^{(n)} + 2B_2^{(n)} + 3B_3^{(n)} + \ldots$$

On obtient la première immédiatement, en faisant F égal à zéro dans l'équation

$$(B_1 \sin F + B_2 \sin 2F + \ldots)^n = B_0^{(n)} + B_1^{(n)} \cos F + \ldots;$$

pour arriver à la seconde, on mettra également F égal à zéro, mais cette fois dans l'équation qu'on obtient en différentiant celle-ci:

$$(B_1 \sin F + B_2 \sin 2F + \ldots)^n = B_1^{(n)} \sin F + B_2^{(n)} \sin 2F + \ldots$$

29. Après avoir établi les développements du dernier numéro, nous allons nous occuper de ceux des fonctions $\sin \lambda G$ et $\cos \lambda G$ suivant certains multiples de F, λ étant un nombre réel quelconque, rationel ou irrationel.

Nous aurons d'abord:

$$e^{i\lambda G} = e^{i\lambda F + i\lambda(G - F)};$$

et si nous admettons l'expression

$$(17)\qquad e^{i(G-F)} = Y_0^{(i)} + Y_1^{(i)}e^{iF} + Y_2^{(i)}e^{2iF} + \dots + Y_{-1}^{(i)}e^{-iF} + Y_{-2}^{(i)}e^{-2iF} + \dots,$$

les coefficients Y, étant des fonctions de λ et de η, seront formés conformément aux formules suivantes, où l'on a désigné par ν un entier quelconque:

$$Y_0^{(i)} = 1 - \frac{\lambda^2}{1.2}B_0^{(2)} + \frac{\lambda^4}{1.2.3.4}B_0^{(4)} - \dots,$$

$$Y_\nu^{(i)} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\lambda}{1}B_\nu^{(1)} - \frac{\lambda^3}{1.2.3}B_\nu^{(3)} + \dots\right\} + \frac{1}{2}\left\{-\frac{\lambda^2}{1.2}B_\nu^{(2)} + \frac{\lambda^4}{1.2.3.4}B_\nu^{(4)} - \dots\right\},$$

$$Y_{-\nu}^{(i)} = -\frac{1}{2}\left\{\frac{\lambda}{1}B_\nu^{(1)} - \frac{\lambda^3}{1.2.3}B_\nu^{(3)} + \dots\right\} + \frac{1}{2}\left\{-\frac{\lambda^2}{1.2}B_\nu^{(2)} + \frac{\lambda^4}{1.2.3.4}B_\nu^{(4)} - \dots\right\}$$

De ces expressions résulte d'abord la relation générale

$$(18)\qquad Y_{-\nu}^{(i)} = Y_\nu^{(-i)},$$

qui découle, du reste, de la remarque qu'on a:

$$\lambda\{B_1 \sin(-F) + B_2 \sin(-2F) + \dots\} = -\lambda\{B_1 \sin F + B_2 \sin 2F + \dots\}$$

En portant, dans les expressions des fonctions Y, les développements des coefficients B que nous avons établis dans le numéro précédent, on arrivera aux résultats suivants:

$$(19)\qquad \begin{cases} Y_\nu^{(i)} = (-1)^{\nu}\{\varepsilon_\nu^{(\nu)}\eta^\nu - \varepsilon_{\nu+2}^{(\nu)}\eta^{\nu+2} + \varepsilon_{\nu+4}^{(\nu)}\eta^{\nu+4} - \dots\}, \\ Y_{-\nu}^{(i)} = (-1)^{\nu}\{\varepsilon_\nu^{(-\nu)}\eta^\nu - \varepsilon_{\nu+2}^{(-\nu)}\eta^{\nu+2} + \varepsilon_{\nu+4}^{(-\nu)}\eta^{\nu+4} - \dots\}, \end{cases}$$

les $\varepsilon_s^{(\nu)}$ étant des polynômes en λ de l'ordre s, dont les expressions algébriques sont données si-dessous:

$$\varepsilon_0^{\lambda,0} = 1,$$

$$\varepsilon_2^{\lambda,0} = \lambda^2,$$

$$\varepsilon_4^{\lambda,0} = \frac{1}{4}\lambda^4 - \frac{9}{64}\lambda^2,$$

$$\varepsilon_6^{\lambda,0} = \frac{1}{36}\lambda^6 - \frac{49}{576}\lambda^4 + \frac{43}{576}\lambda^2,$$

$$\varepsilon_1^{\lambda,1} = \lambda,$$

$$\varepsilon_3^{\lambda,1} = \frac{1}{2}\lambda^3 + \frac{3}{8}\lambda^2,$$

$$\varepsilon_5^{\lambda,1} = \frac{1}{12}\lambda^5 + \frac{1}{8}\lambda^4 - \frac{11}{192}\lambda^3 - \frac{1}{8}\lambda^2,$$

$$\varepsilon_7^{\lambda,1} = \frac{1}{144}\lambda^7 + \frac{1}{64}\lambda^6 - \frac{55}{2304}\lambda^5 - \frac{67}{1024}\lambda^4 + \frac{119}{4608}\lambda^3 + \frac{9}{128}\lambda^2,$$

$$\varepsilon_2^{\lambda,2} = \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{3}{8}\lambda,$$

$$\varepsilon_4^{\lambda,2} = \frac{1}{6}\lambda^4 + \frac{3}{8}\lambda^3 + \frac{1}{6}\lambda^2 - \frac{1}{16}\lambda,$$

$$\varepsilon_6^{\lambda,2} = \frac{1}{48}\lambda^6 + \frac{5}{64}\lambda^5 + \frac{37}{768}\lambda^4 - \frac{115}{1024}\lambda^3 - \frac{47}{512}\lambda^2 + \frac{3}{128}\lambda,$$

$$\varepsilon_3^{\lambda,3} = \frac{1}{6}\lambda^3 + \frac{3}{8}\lambda^2 + \frac{1}{6}\lambda,$$

$$\varepsilon_5^{\lambda,3} = \frac{1}{24}\lambda^5 + \frac{3}{16}\lambda^4 + \frac{91}{384}\lambda^3 + \frac{1}{64}\lambda^2 - \frac{1}{16}\lambda,$$

$$\varepsilon_7^{\lambda,3} = \frac{1}{240}\lambda^7 + \frac{9}{320}\lambda^6 + \frac{41}{768}\lambda^5 - \frac{19}{1024}\lambda^4 - \frac{307}{2560}\lambda^3 - \frac{3}{80}\lambda^2 + \frac{1}{32}\lambda,$$

$$\varepsilon_4^{\lambda,4} = \frac{1}{24}\lambda^4 + \frac{3}{16}\lambda^3 + \frac{91}{384}\lambda^2 + \frac{5}{64}\lambda,$$

$$\varepsilon_6^{\lambda,4} = \frac{1}{120}\lambda^6 + \frac{1}{16}\lambda^5 + \frac{59}{384}\lambda^4 + \frac{7}{64}\lambda^3 - \frac{31}{640}\lambda^2 - \frac{3}{64}\lambda,$$

$$\varepsilon_5^{\lambda,5} = \frac{1}{120}\lambda^5 + \frac{1}{16}\lambda^4 + \frac{59}{384}\lambda^3 + \frac{9}{64}\lambda^2 + \frac{3}{80}\lambda,$$

$$\varepsilon_7^{\lambda,5} = \frac{1}{720}\lambda^7 + \frac{1}{64}\lambda^6 + \frac{145}{2304}\lambda^5 + \frac{307}{3072}\lambda^4 + \frac{599}{23040}\lambda^3 - \frac{1}{16}\lambda^2 - \frac{1}{32}\lambda,$$

$$\varepsilon_6^{\lambda,6} = \frac{1}{720}\lambda^6 + \frac{1}{64}\lambda^5 + \frac{145}{2304}\lambda^4 + \frac{113}{1024}\lambda^3 + \frac{1859}{23040}\lambda^2 + \frac{21}{1152}\lambda,$$

$$\varepsilon_7^{\lambda,7} = \frac{1}{5040}\lambda^7 + \frac{1}{320}\lambda^6 + \frac{43}{2304}\lambda^5 + \frac{163}{3072}\lambda^4 + \frac{1097}{23040}\lambda^3 + \frac{29}{640}\lambda^2 + \frac{1}{112}\lambda.$$

On remarque, pour avoir les ε avec le second indice supérieur négatif, la relation

$$\varepsilon_s^{\lambda,-\nu} = \varepsilon_s^{-\lambda,\nu},$$

qu'on trouve facilement, en portant les expressions (19) dans l'équation (18).

30. Abordons encore une question, étroitement liée à celle que nous avons traitée dans le numéro précédent. Il s'agit maintenant d'établir le développement

(20) $$e^{m(F-G)i} = X_0^{(m)} + X_1^{(m)}e^{Gi} + X_2^{(m)}e^{2Gi} + \ldots + X_{-1}^{(m)}e^{-Gi} + X_{-2}^{(m)}e^{-2Gi} + \ldots,$$

m pouvant être un nombre quelconque, bien que nous n'ayons, généralement, besoin que des formules subsistant pour des valeurs entières du nombre m.

Mais la résolution du problème énoncé est depuis longtemps connue dans toutes ses particularités. En effet, si nous admettons les expressions

(21) $$\begin{cases} X_\nu^{(m)} = \xi_\nu^{m,\nu}\eta^\nu - \xi_{\nu+2}^{m,\nu}\eta^{\nu+2} + \xi_{\nu+4}^{m,\nu}\eta^{\nu+4} - \ldots, \\ X_{-\nu}^{(m)} = \xi_\nu^{m,-\nu}\eta^\nu - \xi_{\nu+2}^{m,-\nu}\eta^{\nu+2} + \xi_{\nu+4}^{m,-\nu}\eta^{\nu+4} - \ldots, \end{cases}$$

les coefficients $\xi_s^{m,\nu}$ seront exprimés moyennant des polynômes en m, de l'ordre s, lesquels on peut mettre en évidence à l'aide des expressions que Le Verrier a données dans le Tome premier des Annales de l'observatoire de Paris (Addition première).

Voici les polynômes dont il s'agit:

$$\xi_0^{m,0} = 1,$$

$$\xi_2^{m,0} = m^2,$$

$$\xi_4^{m.0} = \frac{1}{4} m^4 - \frac{9}{64} m^2,$$

$$\xi_6^{m.0} = \frac{1}{36} m^6 - \frac{49}{576} m^4 + \frac{43}{576} m^2,$$

$$\xi_1^{m.1} = m,$$

$$\xi_3^{m.1} = \frac{1}{2} m^3 + \frac{5}{8} m^2 + \frac{1}{8} m,$$

$$\xi_5^{m.1} = \frac{1}{12} m^5 + \frac{5}{24} m^4 + \frac{13}{192} m^3 - \frac{1}{32} m^2 + \frac{5}{192} m,$$

$$\xi_7^{m.1} = \frac{1}{144} m^7 + \frac{5}{192} m^6 + \frac{5}{2304} m^5 - \frac{437}{9216} m^4 + \frac{247}{9216} m^3 + \frac{421}{9216} m^2 - \frac{107}{9216} m,$$

$$\xi_2^{m.2} = \frac{1}{2} m^2 + \frac{5}{8} m,$$

$$\xi_4^{m.2} = \frac{1}{6} m^4 + \frac{5}{8} m^3 + \frac{2}{3} m^2 + \frac{11}{48} m,$$

$$\xi_6^{m.2} = \frac{1}{48} m^6 + \frac{25}{192} m^5 + \frac{197}{768} m^4 + \frac{593}{3072} m^3 + \frac{157}{1536} m^2 + \frac{17}{384} m,$$

$$\xi_3^{m.3} = \frac{1}{6} m^3 + \frac{5}{8} m^2 + \frac{13}{24} m,$$

$$\xi_5^{m.3} = \frac{1}{24} m^5 + \frac{5}{16} m^4 + \frac{307}{384} m^3 + \frac{27}{32} m^2 + \frac{43}{128} m,$$

$$\xi_7^{m.3} = \frac{1}{240} m^7 + \frac{3}{64} m^6 + \frac{149}{768} m^5 + \frac{387}{1024} m^4 + \frac{2041}{5120} m^3 + \frac{1377}{5120} m^2 + \frac{95}{1024} m,$$

$$\xi_4^{m.4} = \frac{1}{24} m^4 + \frac{5}{16} m^3 + \frac{283}{384} m^2 + \frac{103}{192} m,$$

$$\xi_6^{m.4} = \frac{1}{120} m^6 + \frac{5}{48} m^5 + \frac{187}{384} m^4 + \frac{205}{192} m^3 + \frac{2147}{1920} m^2 + \frac{451}{960} m,$$

$$\xi_5^{m.5} = \frac{1}{120} m^5 + \frac{5}{48} m^4 + \frac{179}{384} m^3 + \frac{7}{8} m^2 + \frac{1097}{1920} m,$$

$$\xi_7^{m.5} = \frac{1}{720} m^7 + \frac{5}{192} m^6 + \frac{445}{2304} m^5 + \frac{6679}{9216} m^4 + \frac{67123}{46080} m^3 + \frac{13807}{9216} m^2 + \frac{5957}{9216} m,$$

$$\xi_6^{m.6} = \frac{1}{720} m^6 + \frac{5}{192} m^5 + \frac{433}{2304} m^4 + \frac{663}{1024} m^3 + \frac{24269}{23040} m^2 + \frac{1223}{1920} m,$$

$$\xi_7^{m.7} = \frac{1}{5040} m^7 + \frac{1}{192} m^6 + \frac{889}{16128} m^5 + \frac{2759}{9216} m^4 + \frac{281743}{322560} m^3 + \frac{59107}{46080} m^2 + \frac{47273}{64512} m$$

Quant aux coefficients avec des indices négatifs, il suffit de faire, pour les obtenir, la remarque que voici:

Par la définition de la fonction $X_\mu^{(m)}$, il est évident qu'on a:

$$X_\mu^{(m)} = X_{-\mu}^{(-m)};$$

or, en introduisant, dans cette équation, les développements (21), on aura sur le champ:

$$\xi_\nu^{(m,-n)} = \xi_\nu^{(-m,n)}.$$

Donc, les coefficients dont le second indice supérieur est négatif, s'obtiennent en mettant, dans les expressions précédentes, $-m$ au lieu de m.

On a encore, évidemment,

$$\xi_\nu^{(-m,-n)} = \xi_\nu^{(m,n)}.$$

Les ξ, ne dépendant que des nombres entiers, on peut les calculer numériquement une fois pour toutes: on en trouve les valeurs, rassemblées dans une table jointe à ce volume.

31. En considérant que les fonctions $X_\mu^{(m)}$ et $Y_\nu^{(n)}$ s'expriment au moyen des formules

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned} X_\mu^{(m)} &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{imF-i(m+\mu)G}\,dG,\\ Y_\nu^{(n)} &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{inG-i(n+\nu)F}\,dF,\end{aligned}\right.$$

il sera facile de trouver une formule destinée à ramener l'une à l'autre, les deux fonctions dont il s'agit.

En effet, si l'on intègre, par parties, la seconde des formules signalées, on trouvera tout d'abord celle-ci:

$$Y_\nu^{(n)} = \frac{1}{\pi}\frac{n}{n+\nu}\int_0^\pi e^{inG-i(n+\nu)F}\,dG,$$

d'où l'on conclut, en la comparant avec l'expression précédente de X, la relation

$$Y_\nu^{(n)} = \frac{n}{n+\nu}X_\nu^{(-n-\nu)}.$$

En substituant, dans cette équation, les expressions de $Y_\nu^{(\lambda)}$ et de $X_\nu^{(-\lambda-\nu)}$, données par les équations (19) et (21), on parvient immédiatement à la formule

$$\varepsilon_s^{\lambda,\nu} = (-1)^\nu \frac{\lambda}{\lambda+\nu}\,\xi_s^{-(\lambda+\nu),\nu}, \tag{23}$$

qui permet de calculer les ε_s, les ξ_s étant donnés. Réciproquement, si les ε_s étaient connus, on trouverait, en utilisant la formule signalée, les ξ_s. Les deux groupes de coefficients étant évalués indépendamment, la formule établie sert à vérifier les calculs.

Supposons, dans un premier exemple, qu'il s'agisse d'évaluer le coefficient $\varepsilon_3^{\lambda.1}$.

On a d'abord, en vertu de l'expression de $\xi_3^{m.1}$:

$$\begin{aligned}\varepsilon_3^{\lambda.1} &= -\frac{\lambda}{\lambda+1}\left\{-\frac{1}{2}(\lambda+1)^3+\frac{5}{8}(\lambda+1)^2-\frac{1}{8}(\lambda+1)\right\}\\ &= \frac{1}{2}\lambda^3+\frac{3}{8}\lambda^2,\end{aligned}$$

c'est à dire, l'expression donnée dans le n° 29

Dans notre second exemple, nous nous proposons de calculer le coefficient $\varepsilon_7^{\lambda.7}$. L'expression du coefficient $\xi_7^{m.7}$ nous donne, en la portant dans l'équation (23), celle-ci:

$$\begin{aligned}\varepsilon_7^{\lambda.7} = \lambda\Big\{&\frac{(\lambda+7)^6}{5040}-\frac{(\lambda+7)^5}{192}+\frac{889(\lambda+7)^4}{16128}-\frac{2759(\lambda+7)^3}{9216}\\ &+\frac{281743(\lambda+7)^2}{322560}-\frac{59197(\lambda+7)}{46080}+\frac{47273}{64512}\Big\},\end{aligned}$$

d'où l'on tire, après avoir réduit les diverses fractions au même dénominateur:

$$\begin{aligned}\varepsilon_7^{\lambda.7} = \frac{\lambda}{322560}\Big\{64\lambda^6 &+ (6.64.7 - 1680)\lambda^5\\ &+(15.64.7^2 - 5.1680.7 + 17780)\lambda^4\\ &+(20.64.7^3 - 10.1680.7^2 + 4.17780.7 - 96565)\lambda^3\\ &+(15.64.7^4 - 10.1680.7^3 + 6.17780.7^2 - 3.96565.7 + 281743)\lambda^2\\ &+(6.64.7^5 - 5.1680.7^4 + 4.17780.7^3 - 3.96565.7^2 + 2.281743.7\\ &\qquad - 414379)\lambda\\ &+ 64.7^6 - 1680.7^5 + 17780.7^4 - 96565.7^3 + 281743.7^2\\ &\qquad - 414379.7 + 236365\Big\}.\end{aligned}$$

Les calculs indiqués effectués, on retrouve l'expression donnée dans le n° 29.

32. Bien que la relation entre les deux arguments F et G, que nous venons d'établir au moyen des équations (9) et (10), ne donne lieu à aucun manque de précision, il n'en est pas ainsi quant à la liaison qui joint la longitude du rayon vecteur, comptée d'une direction fixe, à l'argument diastématique. En effet, l'expression du dit argument étant celle-ci:

$$\mathrm{F} = (1 - \varsigma)v - \Gamma - (\pi - \Gamma),$$

elle paraît dépendre de la direction à partir de laquelle on compte les longitudes, ce qui ne devrait cependant pas avoir lieu. Cette contradiction avec ce que nous venons de dire à l'occasion de la définition de l'argument diastématique (p. 76), n'est toutefois qu'apparente, et tient à ce que la longitude moyenne du périhélie, que nous désignerons dorénavant par ω, a été, dans ce qui précède, exprimée par $\varsigma v + \Gamma$, et qu'on a fait la supposition tacite que l'angle v devient zéro au moment à partir duquel on compte le temps. Mais rien de plus facile que d'éviter l'inconvenient qu'entraîne le manque de netteté signalé tout à l'heure. Il suffit, en effet, de remplacer, dans l'expression de la longitude du périhélie moyen, la constante Γ par $\Gamma - \varsigma\Lambda$, de sorte que nous aurons:

$$\omega = \varsigma(v - \Lambda) + \Gamma. \tag{24}$$

L'argument diastématique s'exprime alors ainsi:

$$\mathrm{F} = v - \omega - (\pi - \Gamma), \tag{25}$$

et puisqu'on a, en omettant les termes périodiques à l'exception de ceux qui sont contenus dans l'agrégat $\pi - \Gamma$:

$$\mathrm{F} = \mathrm{G} = (1 - \varsigma)n\zeta + \Lambda - \Gamma - (\pi - \Gamma),$$

on obtiendra, en faisant ζ égal à zéro:

$$(1 - \varsigma)(v - \Lambda) = 0,$$

d'où il résultera:

$$v = \Lambda; \qquad \omega = \Gamma.$$

Par ces déterminations, on a donné une définition des angles A et Γ, aussi exacte qu'on a pu le faire, avant d'avoir établi la relation entre le temps vrai et le temps réduit ζ, relation dans laquelle on aurait pu comprendre aussi les termes de la fonction X. Plus tard, lorsque nous aurons obtenu cette relation, nous donnerons une définition parfaitement exacte de ces angles.

Ensuite, si nous désignons par π_1 la longitude vraie du périhélie, nous aurons:

$$\pi_1 = \pi + \varsigma(v - A) - \omega + \pi - \Gamma. \tag{26}$$

Finalement, pour arriver à une expression de l'argument anastématique, semblable à l'expression (25), admettons la notation

$$\vartheta = -\tau(v - A) + \Theta, \tag{27}$$

et désignons l'argument dont il s'agit par U; l'expression demandée sera alors:

$$U = v - \vartheta - (\Omega - \Theta). \tag{28}$$

Après avoir encore établi la notation

$$\vartheta_1 = \vartheta + \Omega - \Theta, \tag{29}$$

nous allons mettre les équations (59) du chap. II sous une forme qui nous sera utile dans le courant de nos recherches.

Faisons d'abord

$$1 - \cos i = \frac{1}{2}\sin i^2(1 + \mathfrak{f}),$$

où l'on a posé, pour abréger:

$$\mathfrak{f} = \frac{1}{4}\sin i^2 + \frac{1}{8}\sin i^4 + \ldots; \tag{30}$$

introduisons ensuite cette expression dans les équations (59), et remplaçons finalement les fonctions $\sin i \sin\theta$ et $\sin i \cos\theta$ par leurs expressions tirées des équations (58), savoir:

$$\left\{\begin{aligned} \sin i \sin\theta &= I\sin(\vartheta_1 - G) + ((\zeta))\sin(v - G), \\ \sin i \cos\theta &= I\cos(\vartheta_1 - G) + ((\zeta))\cos(v - G). \end{aligned}\right. \tag{31}$$

Maintenant, si nous mettons, pour abréger:

$$(32) \qquad \mathrm{v} = v - G,$$

nos résultats seront les suivants:

$$(33) \quad \begin{cases} \cos b \sin l = \sin \mathrm{v} - \frac{1}{4}(1 + \mathrm{f}) I^2 \{\sin \mathrm{v} + \sin(\mathrm{v} - 2(\vartheta_1 - G))\} \\ \qquad - \frac{1}{2}(1 + \mathrm{f}) I((\zeta)) \cos \mathrm{v} \sin(\mathrm{v} - \vartheta_1 + G) \\ \cos b \cos l = \cos \mathrm{v} - \frac{1}{4}(1 + \mathrm{f}) I^2 \{\cos \mathrm{v} - \cos(\mathrm{v} - 2(\vartheta_1 - G))\} \\ \qquad + \frac{1}{2}(1 + \mathrm{f}) I((\zeta)) \sin \mathrm{v} \sin(\mathrm{v} - \vartheta_1 + G), \end{cases}$$

On peut remarquer que, dans ces formules, les termes dépendant de $((\zeta))^2$ ont complètement disparu.

Des formules dernièrement mises en évidence, on tire facilement quelques relations dont l'usage peut être très favorable: je vais les déduire.

En vertu des équations (31), on obtient immédiatement la relation

$$(34) \qquad \sin i^2 = I^2 + 2I((\zeta)) \cos(v - \vartheta_1) + ((\zeta))^2,$$

qui est indépendante de l'agrégat périodique G.

Puis, les deux équations mentionnées se remplacent par les suivantes:

$$(35) \quad \begin{cases} \sin i \sin(\theta - \vartheta_1) = -I \sin G + ((\zeta)) \sin(\mathrm{v} - \vartheta_1), \\ \sin i \cos(\theta - \vartheta_1) = \quad I \cos G + ((\zeta)) \cos(\mathrm{v} - \vartheta_1) \end{cases}$$

Nous admettons toujours que G soit une petite quantité du deuxième degré et, que $((\zeta))$ soit très petit par rapport à I: alors, les équations précédentes montrent que la différence $\theta - \vartheta_1$ est un agrégat périodique, d'où il s'ensuit que les deux arguments θ et ϑ_1 sont isocinétiques. Mais puisque ϑ_1 est aussi isocinétique avec ϑ, l'angle θ est aussi isocinétique avec l'angle ϑ

Au lieu des équations (33), on pourra mettre celles-ci:

$$(36)\quad \begin{cases} \cos b \sin(l - \mathrm{v}) = -\frac{1}{4}(1 + \mathrm{f}) I^2 \sin 2(v - \vartheta_1) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{1}{2}(1 + \mathrm{f}) I((\zeta)) \cos 2\mathrm{v} \sin(v - \vartheta_1), \\ \cos b \cos(l - \mathrm{v}) = 1 - \frac{1}{4}(1 + \mathrm{f}) I^2 + \frac{1}{4}(1 + \mathrm{f}) I^2 \cos 2(v - \vartheta_1), \end{cases}$$

d'où l'on conclut que la différence $l - \mathrm{v}$ s'exprime au moyen d'un agrégat périodique et, en conséquence, que les deux angles formant cette différence sont des arguments isocinétiques.

Par les formules du chapitre présent, on a d'abord établi des relations entre l'argument diastématique et le temps réduit; puis, entre la longitude, comptée dans le plan mobile, et l'argument diastématique: la relation entre cette longitude et le temps étant connue, on trouvera finalement, au moyen des formules signalées, les expressions des autres arguments en fonctions du temps.

CHAPITRE IV.

Eléments absolus.

33. Les diverses formules que nous avons mises en évidence dans le chapitre précédent, et qui ont pour but de lier au temps les positions d'un point se mouvant dans une orbite périplégmatique, renferment plusieurs constantes ayant le caractère d'éléments invariables et indépendants les uns des autres. Parmi ces éléments, il y en a six que j'appelle éléments primaires, parce qu'ils figurent comme constantes d'intégration dans la résolution du problème purement abstraite, où l'on cherche le mouvement d'un point dont la masse est nulle, et qui est attiré, selon la loi de Newton, par d'autres points mobiles dont les mouvements sont connus.

Voici la liste des éléments primaires:

A, la longitude absolue du mobile ou de son rayon vecteur;

Γ, la longitude absolue du périhélie;

Θ, la longitude absolue du noeud ascendant;

a, le protomètre;

$\varkappa$, le module diastématique;

ι, le module anastématique.

Quant aux dénominations que je viens d'employer, il y a toutefois quelques observations à faire. J'ai nommé *longitude absolue* la longitude moyenne à l'époque fixe, c'est-à-dire, au temps égal à zéro. Il s'entend par cette détermination que les éléments angulaires ainsi que le protomètre et les éléments modulaires sont des constantes absolues. Ensuite, j'ai introduit la dénomination *protomètre* au lieu de la distance moyenne, à laquelle on serait d'abord porté à penser, vu que celle-ci n'est pas suffisamment exacte. Le mot demi grand axe désignerait, si l'on voulait l'employer, le rayon de la sphère extérieure, entourant la courbe périplégmatique; ce mot n'est donc pas propre à exprimer la notion dont il s'agit.

Mais outre les éléments primaires, les coefficients diastématiques et anastématiques, ainsi que les arguments initiaux liés aux dits coefficients, entrent comme éléments constants dans les formules dont nous venons de parler; je les nommerai *éléments secondaires,* parce qu'ils dérivent, algébriquement, des éléments primaires des points attirants.

Quant aux vitesses des divers arguments, on n'est pas obligé de les compter parmi les éléments, bien qu'elles paraissent, dans les formules que nous avons exposées précédemment, indépendantes des éléments énumérés jusqu'à présent. Mais nous allons voir, dans la suite, que ces vitesses pourront être obtenues par calcul, si les éléments primaires sont connus, et encore, si les forces attractives, ainsi que les éléments des orbites des divers points attirants sont des quantités données.

D'un autre côté, on pourrait, il est vrai, choisir comme éléments primaires le mouvement moyen du mobile, ceux de son périhélie et du noeud ascendant de son orbite sur le plan fixe, mais alors le protomètre, le module diastématique et le module anastématique perdraient leur caractère d'éléments indépendants.

Dans ce qui précède, nous avons déjà eu l'occasion d'apprendre, par quelques exemples, la nature des relations liant les deux genres d'éléments. Nous avons introduit, d'abord comme une simple notation pour abréger l'écriture, le mouvement n, en établissant l'équation

$$n = \sqrt{\mu}\, a^{-\frac{3}{2}},$$

mais cette relation est, néanmoins, d'une importance capitale, vu que les significations des deux quantités a et n se font immédiatement sentir. Du reste, l'équation signalée est l'expression analytique de la troisième loi de Képler, supposé bien entendu, que la quantité μ soit la même pour toutes les planètes, ce qui n'a pas, cependant, rigoureusement lieu.

Dans le chapitre I, n° 5, nous avons donné le type des relations entre les mouvements moyens des périhélies et les modules diastématiques, et nous pouvons prévoir que les relations entre les mouvements moyens des noeuds et les modules anastématiques appartiennent à ce même type.

En remplaçant le protomètre et les deux modules par les mouvements moyens, nous aurons le système suivant d'éléments primaires:

Λ, la longitude absolue du mobile;

Γ, la longitude absolue du périhélie;

Θ, la longitude absolue du noeud;

n, le mouvement moyen du mobile;

ς, le rapport entre le mouvement moyen du périhélie et celui du mobile;

$-\tau$, le rapport entre le mouvement du noeud et celui du mobile.

Mais les éléments primaires, soit qu'on adopte l'un ou l'autre des systèmes signalés, ne sont pas toujours les mieux appropriés à donner une idée nette et immédiate du mouvement. La raison en est que la vitesse de l'argument du terme ayant pour coefficient le module, cette vitesse multipliée par le mouvement moyen du mobile, ne devient identique avec le mouvement moyen du périhélie (ou du noeud) que si le module est plus grand que la somme des coefficients diastématiques (ou anastématiques)

Distinguons, pour séparer les diverses circonstances particulières, les trois cas suivants:

1°. Le module diastématique (ou anastématique) est plus grand que la somme des coefficients diastématiques (ou anastématiques), ces coefficients étant toujours supposés positifs;

2°. Un des coefficients diastématiques (ou anastématiques) est plus grand que la somme des autres coefficients diastématiques (ou anastématiques), à laquelle le module est supposé ajouté;

3°. Ni le module, ni aucun des coefficients, diastématiques ou anastématiques, n'est plus grand que la somme des autres coefficients, le module y compris.

Dans le premier cas, la vitesse de l'argument d'un des termes dépendant des modules est en même temps le mouvement moyen du périhélie (ou du noeud), celui du mobile même étant égal à l'unité. Dans ce cas, qui en effet est celui auquel se rapportent nos formules précédentes, celles-ci restent en vigueur sans aucune modification.

Dans le second cas, les formules dont il s'agit garderont leur caractère analytique inaltéré; il faut seulement qu'on y mette, à la place de $\varkappa$, ς et Γ, les éléments secondaires $\varkappa_n$, σ_n et B_n, $\varkappa_n$ étant le plus grand des coefficients diastématiques, et de même, si les éléments anastématiques appartiennent aussi au second cas, à la place de ι, τ et Θ, les éléments ι_m, τ_m et

s_m, t_m étant le plus grand des coefficients anastématiques. L'angle $\sigma_n nt$ signifie alors le mouvement moyen du périhélie et l'angle $\tau_m nt$ celui du noeud.

Venons maintenant au troisième cas, où aucun des coefficients, inclusivement le module, ne surpasse la somme des autres. Mais dans l'espèce, il faut avant tout élucider, plus en détail qu'on ne l'a fait dans le n° 6, la nature de la vitesse de l'argument si on l'avait exprimé par un seul terme, un agrégat périodique n'ayant aucun de ses coefficients plus grand que la somme des autres. C'est de l'examen de cette question que nous allons nous occuper dans le prochain numéro.

34. Reprenons la formule (12) du chap. I.

Sans doute, les deux termes logarithmiques, séparés l'un de l'autre, ne se développent pas suivant les puissances des rapports α_2, α_3, ..., à moins qu'on n'ait:

$$\alpha_2 + \alpha_3 + \ldots < 1$$

Mais la somme des deux termes mentionnés peut être représentée par un développement suivant les multiples des divers arguments se trouvant déjà dans les expressions qu'il s'agit de développer.

En effet, si nous différentions l'équation (12), il viendra:

$$2\frac{d\theta}{dv} = 2(\lambda_1 - \lambda)$$
$$+ \frac{\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)e^{i[(\lambda_2-\lambda_1)v+b_2-b_1]} + \alpha_3(\lambda_3 - \lambda_1)e^{i[(\lambda_3-\lambda_1)v+b_3-b_1]} + \ldots}{1 + \alpha_2 e^{i[(\lambda_2-\lambda_1)v+b_2-b_1]} + \alpha_3 e^{i[(\lambda_3-\lambda_1)v+b_3-b_1]} + \ldots}$$
$$+ \frac{\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)e^{-i[(\lambda_2-\lambda_1)v+b_2-b_1]} + \alpha_3(\lambda_3 - \lambda_1)e^{-i[(\lambda_3-\lambda_1)v+b_3-b_1]} + \ldots}{1 + \alpha_2 e^{-i[(\lambda_2-\lambda_1)v+b_2-b_1]} + \alpha_3 e^{-i[(\lambda_3-\lambda_1)v+b_3-b_1]} + \ldots},$$

ou bien, en utilisant les notations introduites dans le numéro cité:

$$\frac{d\theta}{dv} = \lambda_1 - \lambda + \frac{(1 + X)\frac{dY}{dv} - Y\frac{dX}{dv}}{(1 + X)^2 + Y^2}. \qquad (1)$$

Ensuite, si nous admettons, pour abréger l'écriture, les notations

$$L_2 = (\lambda_2 - \lambda_1)v + b_2 - b_1,$$
$$L_3 = (\lambda_3 - \lambda_1)v + b_3 - b_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

les fonctions X et Y s'expriment ainsi:

$$X = \alpha_2 \cos L_2 + \alpha_3 \cos L_3 + \ldots,$$

$$Y = \alpha_2 \sin L_2 + \alpha_3 \sin L_3 + \ldots$$

On tire de là les développements

$$\frac{dX}{dv} = -\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1) \sin L_2 - \alpha_3(\lambda_3 - \lambda_1) \sin L_3 - \ldots,$$

$$\frac{dY}{dv} = \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1) \cos L_2 + \alpha_3(\lambda_3 - \lambda_1) \cos L_3 + \ldots;$$

et maintenant, il sera facile de former les suivants:

$$\begin{aligned}(1+X)\frac{dY}{dv} = {} & \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1) \cos L_2 + \alpha_3(\lambda_3 - \lambda_1) \cos L_3 + \ldots \\ & + \frac{1}{2}\alpha_2^2(\lambda_2 - \lambda_1)(1 + \cos 2L_2) + \frac{1}{2}\alpha_3^2(\lambda_3 - \lambda_1)(1 + \cos 2L_3) + \ldots \\ & + \alpha_2\alpha_3(\lambda_2 + \lambda_3 - 2\lambda_1) \cos L_2 \cos L_3 \\ & \qquad + \alpha_2\alpha_4(\lambda_2 + \lambda_4 - 2\lambda_1) \cos L_2 \cos L_4 + \ldots \\ & + \alpha_3\alpha_4(\lambda_3 + \lambda_4 - 2\lambda_1) \cos L_3 \cos L_4 + \ldots \\ & + \ldots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-Y\frac{dX}{dv} = {} & \frac{1}{2}\alpha_2^2(\lambda_2 - \lambda_1)(1 - \cos 2L_2) + \frac{1}{2}\alpha_3^2(\lambda_3 - \lambda_1)(1 - \cos 2L_3) + \ldots \\ & + \alpha_2\alpha_3(\lambda_2 + \lambda_3 - 2\lambda_1) \sin L_2 \sin L_3 \\ & \qquad + \alpha_2\alpha_4(\lambda_2 + \lambda_4 - 2\lambda_1) \sin L_2 \sin L_4 + \ldots \\ & + \alpha_3\alpha_4(\lambda_3 + \lambda_4 - 2\lambda_1) \sin L_3 \sin L_4 + \ldots \\ & + \ldots.\end{aligned}$$

On obtient finalement les expressions

$$(2)\quad (1+X)\frac{dY}{dv} - Y\frac{dX}{dv} = \alpha_2^2(\lambda_2-\lambda_1) + \alpha_3^2(\lambda_3-\lambda_1) + \dots$$
$$+ \alpha_2(\lambda_2-\lambda_1)\cos L_2 + \alpha_3(\lambda_3-\lambda_1)\cos L_3 + \dots$$
$$+ \alpha_2\alpha_3(\lambda_2+\lambda_3-2\lambda_1)\cos(L_2-L_3)$$
$$+ \alpha_2\alpha_4(\lambda_2+\lambda_4-2\lambda_1)\cos(L_2-L_4) + \dots$$
$$+ \alpha_3\alpha_4(\lambda_3+\lambda_4-2\lambda_1)\cos(L_3-L_4) +$$
$$+ \dots,$$

$$(3)\quad (1+X)^2 + Y^2 = 1 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \dots$$
$$+ 2\alpha_2\cos L_2 + 2\alpha_3\cos L_3 + \dots$$
$$+ 2\alpha_2\alpha_3\cos(L_2-L_3) + 2\alpha_2\alpha_4\cos(L_2-L_4) +$$
$$+ 2\alpha_3\alpha_4\cos(L_3-L_4) + \dots$$
$$+ \dots.$$

Cela établi, concevons d'abord le cas simple où tous les coefficients α sont égaux à zéro, à l'exception d'un seul, par exemple α_2.

Nous aurons alors:

$$\frac{d\theta}{dv} = \lambda_1 - \lambda + \frac{\alpha_2(\lambda_2-\lambda_1)(\alpha_2+\cos L_2)}{1+2\alpha_2\cos L_2+\alpha_2^2}.$$

Distinguons trois cas, savoir:

$$\alpha_2 < 1; \qquad \alpha_2 > 1; \qquad \alpha_2 = 1.$$

Si, en premier lieu, α_2 était moindre que l'unité, nous aurions le développement

$$\frac{\alpha_2+\cos L_2}{1+2\alpha_2\cos L_2+\alpha_2^2} = \cos L_2 - \alpha_2\cos 2L_2 + \alpha_2^2\cos 3L_2 + \dots.$$

Avec cette expression, on déduit de la formule précédente, donnant le rapport $\frac{d\theta}{dv}$, celle-ci:

$$\frac{d\theta}{dv} = \lambda_1 - \lambda + \alpha_2(\lambda_2-\lambda_1)\{\cos L_2 - \alpha_2\cos 2L_2 + \alpha_2^2\cos 3L_2 - \dots\}$$

Maintenant, si nous faisons la constante λ, qui est encore à notre disposition, égale à λ_1, que nous intégrions et que nous égalions la constante d'intégration à zéro, c'est-à-dire, la constante b à b_1, notre résultat sera:

$$\text{(a)} \qquad \theta = \alpha_2 \sin L_2 - \frac{1}{2}\alpha_2^2 \sin 2L_2 + \frac{1}{3}\alpha_2^3 \sin 3L_2 \quad \ldots,$$

formule en pleine concordance avec celle qu'on aurait pu tirer immédiatement de l'équation (12) du chap. I.

Passons au deuxième cas. Puisque maintenant α_2 est plus grand que l'unité, nous mettons:

$$\frac{\alpha_2 + \cos L_2}{1 + 2\alpha_2 \cos L_2 + \alpha_2^2} = \frac{1}{\alpha_2}\,\frac{1 + \frac{1}{\alpha_2}\cos L_2}{1 + \frac{2}{\alpha_2}\cos L_2 + \frac{1}{\alpha_2^2}}$$

$$= \frac{1}{\alpha_2}\left\{1 - \frac{1}{\alpha_2}\cos L_2 + \frac{1}{\alpha_2^2}\cos 2L_2 - \ldots\right\}.$$

Avec ce développement, nous aurons, en vertu de l'expression de $\frac{d\theta}{dv}$, la suivante:

$$\frac{d\theta}{dv} = \lambda_1 - \lambda + (\lambda_2 - \lambda_1)\left\{1 - \frac{1}{\alpha_2}\cos L_2 + \frac{1}{\alpha_2^2}\cos 2L_2 - \ldots\right\}$$

Delà, il est visible qu'on doit mettre $\lambda = \lambda_2$, afin que la fonction θ ne contienne que des termes périodiques.

Puis, en intégrant, nous aurons un résultat que nous écrivons, eu égard à l'équation (12) (chap. I), de la manière suivante:

$$\text{(b)} \qquad \theta = b_1 - b + \text{const} - \frac{1}{\alpha_2}\sin L_2 + \frac{1}{2\alpha_2^2}\sin 2L_2 - \ldots$$

Maintenant, si nous faisons la constante d'intégration égale à $b_2 - b_1$, et que nous égalions b à b_2, nous aurons la fonction θ dépourvue de tout terme constant.

Donc, s'il s'agit de mettre l'agrégat périodique

$$A = a_1 \cos(\lambda_1 v + b_1) + a_2 \cos(\lambda_2 v + b_2)$$

sous forme d'un seul terme, nous aurons dans le premier cas:

$$A = a_1 \sqrt{1 + 2\alpha_2 \cos L_2 + \alpha_2^2} \cdot \cos(\lambda_1 v + b_1 + \theta),$$

la fonction θ étant donnée par la formule (a); et, dans le second:

$$A = a_2 \sqrt{1 + \frac{2}{\alpha_2} \cos L_2 + \frac{1}{\alpha_2^2}} \cdot \cos(\lambda_2 v + b_2 + \theta),$$

formule dans laquelle on doit employer le développement (b) de la fonction θ.

Quant au troisième cas, nous voyons immédiatement que l'expression de $\frac{d\theta}{dv}$ sera indépendante de l'argument L_2 et en conséquence, constante. Nous aurons, en effet, lorsque nous égalons α_2 à l'unité:

$$\frac{d\theta}{dv} = \lambda_1 - \lambda + \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1).$$

Donc, si nous égalons λ à $\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)$, b à $\frac{1}{2}(b_1 + b_2)$ et la constante d'intégration à $\frac{1}{2}(b_2 - b_1)$, la fonction θ disparaîtra, et nous retenons:

$$A = a_1 \sqrt{2(1 + \cos L_2)} \cos\left(\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)v + \frac{1}{2}(b_1 + b_2)\right)$$

$$= 2a_1 \cos\frac{1}{2} L_2 \cos\left(\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)v + \frac{1}{2}(b_1 + b_2)\right),$$

résultat qu'on peut facilement vérifier, par le calcul direct.

35. Après avoir envisagé notre problème dans les circonstances particulières les plus simples, revenons au cas général. Nous allons entamer la discussion en établissant le développement de la fonction

$$\frac{1}{\vartheta^2} = \{(1 + X)^2 + Y^2\}^{-1}$$

Dans ce but, faisons d'abord l'observation que la fonction ϑ^2 se met sous les deux formes suivantes:

$$(4)\quad \vartheta^2 = (1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots)^2 - 2\alpha_2(1 - \cos L_2) - 2\alpha_3(1 - \cos L_3) -$$
$$- 2\alpha_2\alpha_3(1 - \cos(L_2 - L_3)) - 2\alpha_2\alpha_1(1 - \cos(L_2 - L_1)) -$$
$$- 2\alpha_3\alpha_1(1 - \cos(L_3 - L_1)) - \dots$$
$$- \dots,$$

$$(5)\quad \vartheta^2 = (1 - \alpha_2 - \alpha_3 \dots)^2 + 2\alpha_2(1 + \cos L_2) + 2\alpha_3(1 + \cos L_3) +$$
$$- 2\alpha_2\alpha_3(1 - \cos(L_2 - L_3)) - 2\alpha_2\alpha_1(1 - \cos(L_2 - L_1)) -$$
$$- 2\alpha_3\alpha_4(1 - \cos(L_3 - L_1)) - \dots$$
$$- \dots$$

La valeur maxima de la fonction ϑ^2, valeur que nous avons désigné, dans le n° 6, par g_2, s'obtient aisément en vertu de la formule (4). Pour y arriver, il suffit en effet de mettre, dans l'équation nommée:

$$L_2 = L_3 = L_1 = \dots = 0,$$

ce qui, si nous admettons la notation

$$N = \alpha_2 + \alpha_3 + \dots,$$

nous donnera la valeur

$$g_2 = (1 + N)^2$$

La détermination de la quantité g_1, c'est-à-dire, de la valeur minima de ϑ^2, est plus compliquée. Certes, en faisant, dans la formule (5):

$$L_2 = L_3 = L_1 = \dots = \pi,$$

π étant la demi-circonférence, on trouvera un résultat qui peut être le minimum de la fonction ϑ^2; mais ce résultat pourrait aussi constituer un maximum relatif, les valeurs des vitesses $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ y étant appropriées. Pour décider la nature du résultat auquel on est parvenu, c'est-à-dire si l'on a trouvé un minimum ou un maximum relatif, il faut examiner le signe que prend la fonction

$$\frac{d^2(\vartheta^2)}{dv^2} = - 2\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)^2 \cos L_2 - 2\alpha_3(\lambda_3 - \lambda_1)^2 \cos L_3 - \dots$$
$$- 2\alpha_2\alpha_3(\lambda_2 - \lambda_3)^2 \cos(L_2 - L_3) - 2\alpha_2\alpha_1(\lambda_2 - \lambda_1)^2 \cos(L_2 - L_1) - \dots$$
$$- 2\alpha_3\alpha_4(\lambda_3 - \lambda_1)^2 \cos(L_3 - L_1) - \dots$$
$$- \dots,$$

lorsqu'on y met

$$L_2 = L_3 = L_4 = \ldots = \pi.$$

Si le résultat d'une telle opération était positif, on pourrait s'arrêter à la valeur minima de ϑ^2, c'est-à-dire, à la quantité g_1; mais si, par contre, on trouvait un résultat négatif, la valeur obtenue de la sorte serait un maximum relatif. Dans ce cas, il faut, pour obtenir la valeur demandée de g_1, égaler à zéro un ou plusieurs des arguments L_2, L_3, L_4, ... Or, en opérant des manières indiquées, il peut arriver qu'on parvienne seulement à une valeur minima relative. Pour obtenir la valeur minima absolue, il faudrait donc la chercher moyennant d'autres procédés, sans doute plus compliqués. Me réservant d'y revenir plus tard, je me borne quant à présent à ne considérer que le cas où le minimum s'obtient, en mettant tous les arguments égaux à π, ce qui entraînera la valeur

$$g_1 = (1 - N)^2$$

Maintenant, si nous nous rappelons les expressions du n° 6, nous parviendrons tout d'abord à l'équation

$$\frac{2{}_{,}\beta}{1 + {}_{,}\beta^2} = \frac{2N}{1 + N^2},$$

qui admet deux racines, savoir:

$${}_{,}\beta = N; \qquad {}_{,}\beta = \frac{1}{N}.$$

Nous avons supposé $N > 1$; donc, pour avoir une valeur de ${}_{,}\beta$, moindre que l'unité, il faut prendre

$${}_{,}\beta = \frac{1}{N}.$$

En introduisant les valeurs trouvées de g_2 et g_1 dans l'équation (14) du chap. I, il viendra:

$$\vartheta^2 = \frac{1 + N^2}{1 + {}_{,}\beta^2}\{1 + 2{}_{,}\beta W + {}_{,}\beta^2\}, \tag{6}$$

où l'on a désigné par W une fonction oscillant entre -1 et $+1$, dont il nous reste à chercher l'expression.

Dans ce but, établissons la moyenne des deux expressions (4) et (5); nous aurons de la sorte une expression nouvelle de ϑ^2 que nous écrivons ainsi :

$$\vartheta^2 = 1 + N^2 + 2N\Big[\frac{a_2}{N}\cos L_2 + \frac{a_3}{N}\cos L_3 + \ldots$$
$$- \frac{a_2 a_3}{N}[1 - \cos(L_2 - L_3)] - \ldots$$
$$- \ldots\Big]$$

En comparant, après avoir remplacé $\frac{2N}{1 + N^2}$ par $\frac{2{}_i\beta}{1 + {}_i\beta^2}$, cette expression de ϑ^2 avec la précédente, on conclut facilement la valeur

$$(7) \qquad W = {}_i\beta\{\alpha_2 \cos L_2 + \alpha_3 \cos L_3 + \ldots$$
$$- \alpha_2\alpha_3[1 - \cos(L_2 - L_3)] - \ldots$$
$$- \ldots\}.$$

Ayant obtenu ce résultat, il sera facile, en utilisant une formule bien connue, d'établir le développement que voici:

$$(8) \quad \frac{1}{\vartheta^2} = \frac{{}_i\beta^2}{1 - {}_i\beta^2}\{1 - 2{}_i\beta W + 2{}_i\beta^2(2W^2 - 1) - 2{}_i\beta^3(4W^3 - 3W) + \ldots\}.$$

Cela étant, nous aurons, en multipliant les expressions (2) et (8), et en introduisant le produit ainsi obtenu dans la formule (1), un résultat de la forme

$$(9) \qquad \frac{d\theta}{dv} = \lambda_1 - \lambda + \lambda_0 + \text{ termes périodiques},$$

la quantité λ_0 étant donnée au moyen de l'expression

$$(10)\ \lambda_0 = \frac{{}_i\beta^2}{1 - {}_i\beta^2}\{\alpha_2^2(1 - \beta^2)(\lambda_2 - \lambda_1) + \alpha_3^2(1 - \beta^2)(\lambda_3 - \lambda_1) + \ldots$$
$$+ 2{}_i\beta^2[\alpha_2^2(\lambda_2 - \lambda_1) + \alpha_3^2(\lambda_3 - \lambda_1) + \ldots][\alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \ldots + \alpha_3\alpha_4 + \ldots]$$
$$- \alpha_2^2\alpha_3^2{}_i\beta^2(\lambda_2 + \lambda_3 - 2\lambda_1) - \alpha_2^2\alpha_4^2{}_i\beta^2(\lambda_2 + \lambda_4 - 2\lambda_1) - \ldots$$
$$\alpha_3^2\alpha_4^2{}_i\beta^2(\lambda_3 + \lambda_4 - 2\lambda_1) - \ldots$$
$$+ \ldots\}.$$

où l'on n'a mis en évidence que la partie qui est engendrée par les premiers termes du développement (8).

Après avoir ainsi déterminé la quantité λ_0, si l'on établit la condition

$$(11) \qquad \lambda_1 - \lambda + \lambda_0 = 0,$$

qu'on intègre l'équation (9), et qu'on désigne la constante d'intégration par $b_1 - b + b_0$, dont la valeur doit être égalée à zéro, la fonction θ sera exprimée par un agrégat périodique sans terme constant.

Maintenant, si l'on désigne par A l'agrégat périodique proposé, de sorte qu'on ait:

$$A = \mathrm{C}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots \end{bmatrix}(v),$$

le résultat de notre transformation sera:

$$(12) \qquad A = a_1 \vartheta \cos(\lambda v + b + \theta).$$

Finalement, la détermination de l'argument initial b s'opère de la manière suivante.

En désignant par A_0, ϑ_0 et θ_0 les valeurs que prennent les fonctions A, ϑ et θ lorsqu'on y met v égal à zéro, nous aurons l'équation de condition

$$A_0 = a_1 \vartheta_0 \cos(b + \theta_0)$$

Ensuite, si l'on établit un nouvel agrégat, savoir:

$$B = \mathrm{S}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots \end{bmatrix}(v)$$

$$= a_1 \vartheta \sin(\lambda v + b + \theta),$$

et qu'on désigne par B_0 la valeur de cet agrégat lorsque v est égal à zéro, on aura:

$$B_0 = a_1 \vartheta_0 \sin(b + \theta_0$$

En vertu des valeurs de A_0, B_0 et θ_0, on parvient à déterminer l'argument initial b, qui en effet sera obtenu au moyen de la formule

$$\text{tang}(b + \theta_0) = \frac{B_0}{A_0}. \tag{13}$$

Le problème de déterminer la vitesse de l'argument d'un terme remplaçant un agrégat périodique est donc résolu, même pour le cas où aucun des coefficients de l'agrégat dont il s'agit ne surpasse la somme des autres.

36. L'application de la théorie exposée dans les deux numéros précédents au troisième cas, énoncé dans le n° 33, s'opère comme nous allons indiquer.

Pour avoir la transformée de l'agrégat

$$\rho = C\begin{bmatrix} \chi & \chi_1 & \ldots \\ 1 - \varsigma & 1 - \sigma_1 & \ldots \\ - B & - B_1 & \ldots \end{bmatrix}(v),$$

on va identifier les coefficients χ, χ_1, χ_2, ... avec les a, de manière que a_1 soit le plus grand entre les coefficients diastématiques, le module y compris; a_2, le plus grand après a_1, et ainsi de suite. Puis, on va remplacer les vitesses λ_1, λ_2, ... par les $1 - \sigma$, et les arguments initiaux b_1, b_2, ... par les $- B$, en ayant soin de mettre la vitesse et l'argument initial appartenant au terme avec le plus grand coefficient au lieu de λ_1 et de b_1, et ainsi de suite. Enfin, on calculera la valeur de λ_0 d'après la formule (10), et celle de b, que nous désignerons par $- B$, d'après la formule (13).

Cela fait, si l'on met $1 - \sigma$ à la place de λ, et $- \pi$, au lieu de $- B + \theta$, et que l'on suppose que χ_n soit le plus grand entre les coefficients diastématiques, il viendra:

$$1 - \sigma = 1 - \sigma_n + \lambda_0 \tag{14}$$

et

$$\rho = \chi_n \vartheta \cos((1 - \sigma)v - \pi), \tag{15}$$

formule, dans laquelle on peut encore égaler le produit $\chi_n \vartheta$ à η.

Mais puisqu'on a, de l'autre côté:

$$\rho = C \begin{bmatrix} \chi_n & \chi_p & \cdots \\ 1 - \sigma - (\sigma_n - \sigma) & 1 - \sigma - (\sigma_p - \sigma) & \cdots \\ - B - (B_n - B) & - B - (B_p - B) & \cdots \end{bmatrix} (v),$$

il s'ensuit, en comparant cette expression avec la précédente:

$$(16) \quad \left| \begin{aligned} \eta \cos(\pi - B) &= C \begin{bmatrix} \chi_n & \chi_p & \cdots \\ \sigma_n - \sigma & \sigma_p - \sigma & \cdots \\ B_n - B & B_p - B & \cdots \end{bmatrix} (v), \\ \eta \sin(\pi - B) &= S \begin{bmatrix} \chi_n & \chi_p & \cdots \\ \sigma_n - \sigma & \sigma_p - \sigma & \cdots \\ B_n - B & B_p - B & \cdots \end{bmatrix} (v). \end{aligned} \right.$$

Il convient d'ajouter, aux formules précédentes, celle-ci:

$$(17) \qquad \vartheta = \frac{1}{\beta} \left\{ 1 + \beta W - \frac{1}{2} \beta^2 (W^2 - 1) + \frac{1}{2} \beta^3 (W^3 - W) - \cdots \right\},$$

qui découle de l'équation (6).

Par les résultats que nous venons d'obtenir — et dont la nature générale n'aurait pas été altérée si l'on avait obtenu une autre valeur de g_1 — il est manifesté que le périhélie, même dans le troisième cas, a un mouvement moyen. La valeur en est σn, et σ est un nombre fini et réel, généralement différent de zéro. C'est de même quant au mouvement du noeud. Seulement dans des cas exceptionnels, il peut arriver que le coefficient σ soit égal à zéro, ce qui rendrait le périhélie (ou le noeud) oscillant entre certaines limites.

Quant à la question des mouvements des périhélies et des noeuds, les auteurs dans le domaine de la mécanique céleste se sont généralement exprimés avec quelque réserve. Seulement M. Stockwell, dans un mémoire important sur les variations séculaires des éléments elliptiques, prétend carrément que les périhélies (ou les noeuds) n'ont aucun mouvement moyen dans le cas désigné dans le n° 33 comme le troisième. Cependant, en

examinant les nombres qu'a donné M. STOCKWELL lui même, on parviendra à une opinion incompatible avec l'avis de l'auteur.[1]

[1] Par le calcul des quantités qu'on a désignées dans le chap. III par π_1 et η, on a trouvé, en empruntant au mémoire de M. STOCKWELL les formules

$$\eta \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \Big\} \pi_1 =$$

$$\begin{matrix} C \\ S \end{matrix} \left[\begin{matrix} 0.0173074 & 0.0161401 & 0.0151823 & 0.0125684 & 0.0053002 & 0.0024585 & 0.0005704 & 0.0000136 \\ 50^\circ 16' 25'' & 10^\circ 19' 32'' & 20^\circ 29' 51'' & 48^\circ 20' 34'' & 15^\circ 25' 0'' & 62^\circ 23' 31'' & 7^\circ 34' 37'' & 1^\circ 42' 47'' \\ 134\ 45\ 2 & 28\ 8\ 55 & 198\ 30\ 9 & 320\ 15\ 1 & 87\ 28\ 13 & 127\ 56\ 54 & 105\ 6\ 59 & 67\ 56\ 42 \end{matrix} \right] (t),$$

où l'unité du temps, qu'on compte à partir de l'epoque 1850.0, est dix mille ans, les nombres suivants:

Epoques	π_1	η
— 10T	69°30'.2	0.019509
0	100 21 .7	0.016771
+ 10T	136 0 .9	0.011535
+ 20T	190 1 .0	0.005428
+ 22T	208 44 .3	0.004470
+ 24T	232 40 .3	0.003838
+ 26T	260 29 .1	0.003696
+ 28T	286 31 .3	0.004072
+ 30T	307 16 .7	0.004816
+ 32T	323 15 .3	0.005757
+ 40T	364 11 .6	0.009764
+ 50T	390 21 .5	0.012081
+ 60T	425 46 .8	0.014354
+ 70T	445 53 .6	0.013058
+ 80T	453 19 .3	0.010855
+ 84T	451 30 .4	0.010389
+ 86T	449 50 .4	0.010367
+ 88T	448 5 .2	0.010515
+ 90T	446 25 .1	0.010836
+ 100T	446 8 .8	0.014566
+ 130T	498 12 .7	0.027424
+ 150T	537 58 .4	0.028590
+ 170T	570 38 .6	0.025428
+ 190T	594 16 .5	0.023194

Dans la première colonne de ce tableau, on a désigné par T un intervalle de mille ans. Or, le temps étant compté à partir de l'an 1850, 10T, par exemple, signifie l'époque 11850.

On conclut par les nombres signalés que la fonction π_1 est soumise à une variation séculaire; il s'ensuit qu'elle renferme, nécessairement, un terme non périodique, terme qui dans le cas actuel ne peut être autre chose qu'une constante multipliée par le temps.

Mais, bien que les périhélies et les noeuds soient généralement affectés de mouvements moyens, ces mouvements n'apparaîtrons pas toujours dans les arguments des divers termes entrant dans les expressions des coordonnées. En effet, dans le troisième cas, aucun argument des termes de la fonction ρ ne sera isocinétique avec la longitude du périhélie, et le mouvement de cette longitude ne figure pas non plus comme argument dans les expressions de η^{2n} et de $\eta^n e^{in\mathrm{F}}$, n étant un nombre entier quelconque. Pour s'en convaincre, on remarquera que les formules du chap. III restent en vigueur lorsqu'on y met σ au lieu de ς et en même temps, B au lieu de Γ. Que ces remplacements soient permis, cela s'entend parce qu'un changement de ς sera compensé par une modification convenable de la fonction π, et qu'il en sera de même relativement à la constante Γ. On pourra donc mettre:

$$\eta^n e^{in\mathrm{F}} = \eta^n e^{in((1-\sigma)v-\pi)}.$$

Mais puisqu'on a, ce qui est immédiatement clair en vertu des équations (16):

$$\eta e^{i\pi} = e^{-i\sigma v}\,\mathrm{E}\begin{bmatrix} \chi_n & \chi_p & \ldots \\ \sigma_n & \sigma_p & \ldots \\ B_n & B_p & \ldots \end{bmatrix}(v),$$

$$\eta e^{-i\pi} = e^{i\sigma v}\,\mathrm{E}\begin{bmatrix} \chi_n & \chi_p & \ldots \\ -\sigma_n & -\sigma_p & \ldots \\ -B_n & -B_p & \ldots \end{bmatrix}(v),$$

il sera aisé de conclure la vérité de ce que nous venons d'énoncer.

On peut ainsi, même dans le troisième cas, utiliser les formules du chap. III, bien qu'elles semblent de prime abord dépendre d'un argument qui disparaîtra finalement des formules.

En conservant la notation

$$\omega = \varsigma(v - A) + \Gamma,$$

on l'emploiera inaltérée dans le premier cas; dans le deuxième, on changera ς en σ_n et Γ en B_n. Dans le troisième cas finalement, on mettra σ à la place de ς et B au lieu de Γ. Dans les deux premiers cas, l'argument ω est isocinétique avec un argument se trouvant déjà dans l'expression primitive de ρ, mais dans le troisième cas, aucun des arguments d'où dépend

la fonction ρ, n'est isocinétique avec ω. Donc, dans ce cas, un argument astronomique est remplacé par un argument non-astronomique.

Cependant, on pourrait aborder le problème de trouver la relation entre le temps et la longitude dans le plan instantané, d'une autre manière que celle employée dans le chap. III: on pourrait, en effet, déjà dans l'équation (43) du chap. I, supprimer la quantité ς, de sorte que le facteur de v serait devenu égal à l'unité au lieu de $1 - \varsigma$. En opérant ainsi, on obtiendrait, au lieu des formules (19) du chap. I, les suivantes:

$$(18)\quad \begin{cases} g = \eta \cos \pi = C \begin{bmatrix} \chi & \chi_1 & \cdot \\ \varsigma & \sigma_1 & \cdot\ \cdot \\ \Gamma & B_1 & \cdot\ \cdot\ \cdot \end{bmatrix} (v), \\ h = \eta \sin \pi = S \begin{bmatrix} \chi & \chi_1 & \cdot\ \cdot \\ \varsigma & \sigma_1 & \\ \Gamma & B_1 & \end{bmatrix} (v). \end{cases}$$

Ayant déterminé les fonctions η et π de la sorte, on aurait trouvé un résultat relativement à η identique avec celui qui découle des équations (19) du chap. I; mais quant à l'angle π, en le tirant des équations (18), on ne le trouverait plus exprimé par un agrégat périodique, mais bien par un tel agrégat augmenté d'un terme de nature séculaire. L'angle π, déterminé de la sorte, serait, en effet, identique avec la longitude vraie du périhélie, longitude que nous avons désignée (p. 106) par π_1.

On pourrait donc penser être parvenu aux formules les plus simples, en adoptant le système (18) avec toutes ses conséquences, mais en faisant un examen comparatif des deux systèmes, les équations (18) et les équations (19) du chap. I, on se convaincra que les variations des fonctions g et h, celles-ci déterminées par les équations (19) du chap. I, sont, dans le premier cas, et même dans le second en y changeant ς en σ_n, moins sensibles que celles des dites fonctions déterminées par les équations (18), naguère mises en évidence. Ainsi, en employant les formules du chap. III, où l'on a partout supposé les fonctions dont il est question déterminées en vertu des équations (19) du chap. I, on fondera les recherches suivantes sur des expressions où les quantités considérées d'abord comme constantes dans les intégrations par parties, sont soumises aux plus petites variations

possibles. C'est pour cette raison qu'on a jugé convenable d'adopter la forme indiquée pour les fonctions dont il s'agit.

En opérant de cette manière, on réduira la fonction X, déterminée par l'équation (13) du chap. précédent, à son minimum, mais on gagnera encore l'avantage de rendre certaines approximations, dans ce qui va suivre, aussi rapides que possible. Dans le troisième cas, cependant, la manière de définir les fonctions g et h que nous avons mise en usage par les équations (16), ne l'emportera pas essentiellement sur celle où l'on a supposé ces fonctions déterminées en vertu des équations (18). On pourra néanmoins, même dans le troisième cas, employer l'équation (43) du chap. I, en y remplaçant ς par σ et Γ par B, mais alors il ne faut pas oublier que les fonctions $\eta\cos(\pi - B)$ et $\eta\sin(\pi - B)$ sont déterminées au moyen des équations (16), c'est-à-dire, par des agrégats périodiques sans terme constant.

37. Il serait de quelque intérêt d'introduire, dans l'équation (43) du chap. I ainsi que dans l'équation (1) du chap. III, au lieu des fonctions g et h leurs valeurs moyennes; on aurait ainsi une courbe périplégmatique en quelque sorte une courbe moyenne représentant l'infinité des spires de la courbe effective. Cherchons à déterminer ces valeurs.

Dans ce but, examinons ce que devient la valeur moyenne d'un agrégat périodique, en formant cette moyenne d'une infinité de valeurs particulières.

En considérant les inégalités

$$-1 < \int_0^x \cos x\,dx < 1, \qquad -1 < \int_0^x \sin x\,dx < 1,$$

et que la valeur moyenne de l'agrégat périodique A, entre les limites 0 et m, est donnée par l'expression

$$\frac{1}{m}\int_0^m A\,dv,$$

on comprendra aisément que la valeur dont il s'agit tend à décroître au fur et à mésure que m augmente. Il s'ensuit que la valeur moyenne d'une infinité de valeurs particulières de A, calculées avec des valeurs équidistantes de la variable indépendante, est égale à zéro. Il est inutile

d'ajouter qu'on a présumé l'intégrale indéterminée $\int A dv$ exprimée par un nombre fini de termes ou bien par une série uniformément convergente.

Maintenant, si nous ne considérons que les deux premiers des cas indiqués vers la fin du n° 33, nous concluons, en vertu du théorème énoncé tout à l'heure, que la valeur moyenne de $\eta \cos(\pi - \Gamma)$ est égale à $\varkappa$ et celle de $\eta \sin(\pi - \Gamma)$, égale à zéro. Dans le deuxième cas, il faut changer $\varkappa$ en $\varkappa_n$ et Γ en B_n.

La valeur moyenne de η^2, que nous allons désigner par η_0^2, n'est pas égale à $\varkappa^2$, mais bien donnée au moyen de la formule

$$\eta_0^2 = \varkappa^2 + \varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 + \dots; \tag{19}$$

cependant, puisque le module $\varkappa$ (ou bien, dans le second cas, le coefficient $\varkappa_n$) est plus grand que la somme des autres coefficients diastématiques, le carré de $\varkappa$ est à fortiori plus grand que la somme des carrés des autres coefficients. Il s'ensuit que la partie prépondérante de η_0 est égale à $\varkappa^2$, de sorte qu'on pourra, lorsqu'il ne s'agit que d'une exactitude limitée, mettre $\varkappa^2$ à la place de η_0^2.

Cela étant, si l'on introduit, dans l'équation (43) du chap. I, au lieu de η^2, $\eta \cos(\pi - \Gamma)$ et $\eta \sin(\pi - \Gamma)$, leurs valeurs moyennes indiquées ci-dessus, on arrivera à l'équation

$$r = \frac{a(1 - \varkappa^2)}{1 + \varkappa \cos((1 - \varsigma)v - \Gamma)},$$

c'est précisément l'équation de la courbe périplématique qu'on a considerée dans le n° 4.

Cette courbe, ayant été employée déjà par Clairaut comme une sorte d'orbite intermédiaire de la lune, je la nommerai *courbe de Clairaut*. Elle n'approche pas, il est vrai, assez de la trajectoire de cet astre pour être adoptée définitivement à cette fin, et en conséquence, elle ne sera pas d'une importance particulière comme orbite intermédiaire, mais elle nous sera toutefois utile, lorsqu'il s'agit d'évaluer, moyennant des approximations successives, la longitude d'une planète dans son plan instantané. En effet, ayant calculé, pour le temps $\tau = \tau_0$,[1] la valeur de f d'après

[1] On doit s'imaginer la variable ζ du chapitre III identifiée avec τ.

les formules du n° 4, on trouve la longitude demandée en vertu de l'expression

$$v = \frac{f + \Gamma}{1 - \varsigma},$$

valeur avec laquelle on passera aux approximations suivantes.

Dans le troisième cas, les valeurs moyennes des fonctions $\eta \cos(\pi - B)$ et $\eta \sin(\pi - B)$ sont, toutes les deux, égalées à zéro, vu que ces fonctions s'expriment au moyen d'agrégats périodiques sans terme constant. Mais avec ces résultats, la courbe de Clairaut devient tout simplement un cercle, ce qui nous indique qu'on doit, dans le cas envisagé, égaler l'angle f à $(1 - \varsigma) a^{-\frac{3}{2}} (\tau - \tau_0)$.

Etant ainsi arrivé à une valeur approchée de la longitude v, dont l'erreur sera, dans les deux premiers cas, inférieure à $\pm \frac{\pi}{2}$, mais dans le troisième cas n'excédera pas les limites $\pm \pi$, on aura, moyennant une approximation nouvelle, une valeur de v très approchée de sa vraie valeur. Pour élucider la portée de cette nouvelle approximation, mettons

$$v = v_0 + \Delta v,$$

v_0 étant la valeur préalable de v.

En introduisant, dans les équations (19) du chap. I, cette expression de v, et en développant suivant les puissances de Δv, il en résultera:

$$(20) \quad \begin{cases} \eta \cos(\pi - \Gamma) = \varkappa + C[\varkappa_s, \ \varsigma - \sigma_s, \ \Gamma - B_s](v_0) \\ \qquad\qquad - \frac{\Delta v}{1} S[\varkappa_s(\varsigma - \sigma_s), \ \varsigma - \sigma_s, \ \Gamma - B_s](v_0) - \dots, \\ \eta \sin(\pi - \Gamma) = - S[\varkappa_s, \ \varsigma - \sigma_s, \ \Gamma - B_s](v_0) \\ \qquad\qquad - \frac{\Delta v}{1} C[\varkappa_n(\varsigma - \sigma_s), \ \varsigma - \sigma_s, \ \Gamma - B_s](v_0) + \dots \end{cases}$$

Dans ces développements, qui dans le premier cas donnent immédiatement les valeurs de η et π, on doit remplacer $\varkappa$ par $\varkappa_n$, ς par σ_n et Γ par B_n pour avoir les formules applicables au second cas. Dans le troisième cas finalement, on déduit des équations (16) les développements que voici:

$$
(21)\quad
\begin{cases}
\eta\cos(\pi - B) = C\left[\begin{matrix} \chi & \chi_1 & \cdot \\ \varsigma - \sigma & \sigma_1 - \sigma & \cdot\,\cdot \\ \Gamma - B & B_1 - B & \cdots \end{matrix}\right](v_0) \\
\qquad - \dfrac{\Delta v}{1} S\left[\begin{matrix} \chi(\varsigma - \sigma) & \chi_1(\sigma_1 - \sigma) & \cdots \\ \varsigma - \sigma & \sigma_1 - \sigma & \cdots \\ \Gamma - B & B_1 - B & \cdots \end{matrix}\right](v_0) - \cdots, \\
\eta\sin(\pi - B) = S\left[\begin{matrix} \chi & \chi_1 & \cdot \\ \varsigma - \sigma & \sigma_1 - \sigma & \cdots \\ \Gamma - B & B_1 - B & \cdot\,\cdot \end{matrix}\right](v_0) \\
\qquad + \dfrac{\Delta v}{1} C\left[\begin{matrix} \chi(\varsigma - \sigma) & \chi_1(\sigma_1 - \sigma) & \cdots \\ \varsigma - \sigma & \sigma_1 - \sigma & \cdot\,\cdot \\ \Gamma - B & B_1 - B & \cdots \end{matrix}\right](v_0) - \cdots.
\end{cases}
$$

De ces expressions, on comprend aisément que l'erreur qu'on commet en négligeant d'abord l'incrément Δv, est toujours une petite quantité du même ordre que les vitesses ς, σ_1, σ_2, ... En conséquence, les valeurs des fonctions η et π qu'on obtient de la sorte ne diffèrent des valeurs exactes que de quantités de l'ordre signalé.

Si l'on établit, avec les valeurs ainsi obtenues, une nouvelle courbe de Clairaut, on en obtiendra une nouvelle valeur de v, dont l'erreur sera une quantité du même ordre que les vitesses ς, σ_1, ...

Dans la troisième approximation, on se procurera une valeur approximative de la fonction X, ainsi que de nouvelles valeurs des fonctions η et π, après quoi on obtiendra l'argument G tellement approché de sa vraie valeur que l'erreur commise sera une quantité du second ordre par rapport aux vitesses ς, σ_1, ... S'il était nécessaire, on pourrait renouveller les opérations indiquées, et on arriverait finalement, par cette voie, à des valeurs de la longitude v et des fonctions η et π, si exactes qu'on voudra.

38. Si la valeur de l'angle v est donnée, celles des fonctions $I\cos(\Omega - \Theta)$ et $I\sin(\Omega - \Theta)$ s'obtiennent sans aucune difficulté. On y arrive en introduisant, dans les formules (48) du chap. II, la valeur de v. Mais il faut

toutefois se rappeler que l'énoncé se divise en trois cas distincts, selon ce que nous venons de dire dans le n° 33.

Dans le premier cas, on emploiera les formules citées sans aucune modification, mais dans le second cas, on y changera ι en ι_n, τ en τ_n et θ en S_n, ι_n étant le plus grand des coefficients anastématiques, le module y compris. Dans le troisième cas finalement, on cherchera d'abord, d'après les règles du n° 35, la valeur du mouvement moyen du noeud. Avec cette valeur, on formera de nouveaux agrégats périodiques, tout en analogie avec les agrégats (16), et on déterminera finalement les fonctions I et Ω, dont la dernière restera alors comprise entre des limites données. Il ne sera pas, cependant, nécessaire de mettre en évidence, dans notre troisième cas, la vitesse moyenne du noeud, vu qu'elle disparaîtra finalement des formules; on pourrait, au contraire, opérer de la manière qu'on a expliquée dans le n° 37, en établissant des équations tout à fait analogues aux équations (18). Les valeurs de la fonction Ω, évaluées au moyen de ces équations, augmentent hors de toute limite, et on aura, au lieu de l'équation (29) du chap. III, celle-ci:

$$\vartheta_1 = \Omega.$$

Quant aux expressions de la longitude du noeud moyen dans les trois cas, on maintiendra, dans le premier cas, la formule (27) du chap. III; dans le second cas, on aura:

$$\vartheta = -\tau_n(v - A) + S_n,$$

et dans le troisième:

$$\vartheta = -\delta(v - A) + S,$$

δ étant le moyen mouvement du noeud, si celui du mobile est égal à l'unité, et S, l'angle constant, déterminé de la manière qu'on a expliquée dans le n° 35. Qu'on se rappelle qu'en vertu des équations (35) du chap. III les angles ϑ_1 et θ sont isocinétiques, d'où il s'ensuit qu'il en sera de même quant aux angles ϑ et θ.

39. Les quantités constantes que nous avons considérées comme éléments d'une orbite absolue, soit parce qu'elles sont supposées introduites par des intégrations, soit parce qu'elles dérivent algébriquement d'éléments d'autres orbites, sont des éléments absolus. Par cette dénomination j'entends

d'ailleurs les éléments restant absolument invariables, et qui, en conséquence, acquerront les mêmes valeurs, si on les détermine au moyen d'observations faites dans un temps ou dans un autre.

Toutefois, les longitudes moyennes étant soumises aux variations dues aux moyens mouvements, ne sont pas des quantités invariables. Aussi n'avons-nous pas pris comme éléments les longitudes moyennes à des époques quelconques; ce sont les longitudes absolues, dont nous avons fixé la notion dans le n° 33, qui sont des éléments absolues véritables, dans le sens rigoureux du mot. Donc, tous les éléments que nous venons de faire entrer dans les formules servant à déterminer, moyennant le calcul, les mouvements dans une orbite absolue, sont des éléments absolus.

Dans la théorie elliptique des planètes au contraire, les éléments sont des quantités variables, savoir, si l'on néglige les perturbations périodiques, les valeurs des fonctions η , π_1 , i et θ, déterminées pour une époque quel conque, et encore, le demi grand axe de l'ellipse variable et la longitude moyenne elliptique à l'époque. On comprend par là, et par ce qui précède, que les différences entre les éléments absolues et les éléments elliptiques à diverses époques puissent être assez considérables. Cependant, une exception existe. En effet, si l'on considère un système d'éléments elliptiques comme étant des éléments soi-disant moyens, le moyen mouvement doit être identique avec le moyen mouvement employé comme élément absolu, et par conséquent, la valeur du demi grand axe doit s'approcher sensiblement de la valeur du protomètre. En appliquant la méthode de la variation des constantes arbitraires, on n'a toutefois pas réussi à mettre hors de doute l'invariabilité de cet élément moyen; le contraire paraît même probable. Pour plus de détails relativement à ce point, il suffit de renvoyer le lecteur à ce que dit M. Tisserand dans son *Traité de la mécanique céleste,* T. I, p. 402.

Déjà par les recherches de Lagrange et de Laplace, on est convaincu que les coefficients diastématiques et les coefficients anastématiques, les modules y compris, sont des quantités assez petites. A un pareil résultat sont aussi parvenus, plusieurs savants postérieurs, à ne citer que Le Verrier et Stockwell. Cependant, les méthodes suivant lesquelles les coefficients mentionnés ont été calculés, n'étant pas exemptes d'objections, il ne paraît pas convenable de fonder, sur l'hypothèse que le résultat obtenu soit aussi le résultat définitif, les développements des forces attirantes, dé

veloppements dont nous allons nous occuper dans les livres prochains. Mais ce qu'on pourra admettre sans aucune hésitation lorsqu'il s'agit des planètes principales, c'est que les fonctions ρ, $\frac{d\rho}{dv}$, ζ et $\frac{d\zeta}{dv}$ restent, pendant un grand nombre de révolutions, des quantités assez petites. Une telle hypothèse est, en effet, incontestable en vertu des données qu'on a obtenues au moyen des observations astronomiques. A cette hypothèse, je vais joindre une autre, aussi confirmée par les observations, savoir que les valeurs de la fonction $\frac{d^2\zeta}{dt^2}$ soient très petites pendant un long intervalle du temps, la fonction $\frac{d\zeta}{dt}$ étant donnée par l'équation (1) du chap. III.

LIVRE SECOND.

Relations entre les arguments appartenant à deux Planètes.

Les valeurs des coordonnées d'un astre, calculées en supposant qu'il se meuve dans une orbite absolue, ne sont pas identiques avec ses coordonnées vraies. Il faut, en effet, pour en avoir les valeurs exactes, ajouter à celles-là des corrections de l'ordre des forces troublantes, corrections qui dépendent, au moins quant à leur plus grande partie, des configurations des planètes. Ces corrections, étant exprimées, on peut le dire presque sans exceptions, par des termes trigonométriques, on les nomme *inégalités périodiques* ou tout simplement *inégalités*. On les obtient par le calcul des attractions des diverses planètes, ce qui nous impose le problème d'exprimer, au moyen de formules algébriques, les forces attirantes, lorsque nous supposons que l'action mutuelle des astres se fasse selon la loie newtonienne. Pour s'acquitter de cette tâche, il y a quelques préparations à faire.

D'abord, les formules dont il s'agit faisant partie de certaines équations différentielles, il convient de leur donner une forme convenable pour rendre les intégrations demandées les plus aisées possibles. Dans ce but, on essayera d'exprimer, moyennant une seule variable, tous les arguments d'où dépendent, dès l'origine, les expressions des forces, problème dont la résolution n'est pas difficile, mais qui amène des développements assez laborieux.

Les questions dont il s'agit se divisent cependant en deux groupes: 1° Etudes sur les relations entre des arguments diastématiques appartenant à deux planètes; 2° Recherches sur les diverses manières d'exprimer les cosinus des multiples de l'angle entre les rayons vecteurs simultanés des deux planètes.

On va traiter ces deux questions dans le livre présent, et on va y ajouter certains systèmes de formules dont on fera usage lorsqu'il s'agit d'exprimer les forces au moyen de développements trigonométriques.

CHAPITRE I.

Relations entre les arguments diastématiques de deux planètes.

40. La différence entre le temps t et la fonction ζ étant désignée par T de façon qu'on ait:

$$t = \zeta + T:$$

la fonction T déterminée de la sorte sera appelée *réduction du temps* et la fonction ζ, *temps réduit.*

En désignant par ζ' et T' deux fonctions, analogues aux précédentes et appartenant à une seconde planète, on aura:

$$t = \zeta' + T';$$

et, en égalant les deux expressions de t, on obtiendra:

$$\zeta = \zeta' + T' - T.$$

Ensuite, si l'on désigne par n et n' les moyens mouvements des deux planètes, et que l'on mette:

$$\mu = \frac{n'}{n},$$

l'équation obtenue peut s'écrire:

$$(1) \qquad n\zeta = \frac{1}{\mu}(n'\zeta' + n'T') - nT.$$

Reprenons maintenant l'équation (10) du n° 26; introduisons-y l'expression de $n\zeta$, et désignons par G′, F′, E′, X′, ... les quantités analogues

a G , F , mais appartenant à la seconde planète: alors, il sera facile d'établir l'équation que voici:

$$G + \pi = (1 - \varsigma)\left(\frac{1}{\mu}(n'\varsigma' + n'T') - nT + X + \frac{A}{1 - \varsigma}\right),$$

ou bien la suivante:

$$(2) \qquad G + \pi - A = \frac{1 - \varsigma}{\mu(1 - \varsigma')}(G' + \pi' - A')$$
$$+ (1 - \varsigma)\left(X - nT - \frac{1}{\mu}(X' - n'T')\right),$$

Pour abréger l'écriture de nos formules, nous admettons les notations:

$$(3) \begin{cases} \varphi = \mu\dfrac{1 - \varsigma'}{1 - \varsigma}; & \varphi' = \dfrac{1}{\mu}\dfrac{1 - \varsigma}{1 - \varsigma'}, \\ \mathrm{L} = \varphi(I' - A) - (I'' - A'); & \mathrm{L}' = \varphi'(I'' - A') - (I' - A), \\ \mathrm{U} = (1 - \varsigma')[\mu(nT - X) - (n'T' - X')]; & \mathrm{U}' = (1 - \varsigma)\left[\dfrac{1}{\mu}(n'T' - X') - (nT - X)\right], \\ \mathrm{V} = \varphi(v - \omega) + \mathrm{L}; & \mathrm{V}' = \varphi'(v' - \omega') + \mathrm{L}', \end{cases}$$

notations qui entraînent les relations

$$(4) \begin{cases} \varphi\varphi' = 1; & \\ \mathrm{L} = -\varphi\mathrm{L}'; & \mathrm{L}' = -\varphi'\mathrm{L}, \\ \mathrm{U} = -\varphi\mathrm{U}'; & \mathrm{U}' = -\varphi'\mathrm{U}. \end{cases}$$

Avec ces notations, l'équation (2) s'écrit de la manière suivante:

$$(5) \qquad G + \pi - A = \varphi'(G' + \pi' - A') + \mathrm{U}',$$

d'où l'on tire, en la multipliant par φ et en ayant égard aux relations (4):

$$(5') \qquad G' + \pi' - A' = \varphi(G + \pi - A) + \mathrm{U}.$$

Des résultats obtenus, on déduit facilement quelques autres, non moins symétriques. En effet, puisqu'on a:

$$G + \pi - A = G + \pi - I' + (I' - A)$$
$$= G + \pi - I' + \varphi'(I'' - A') - \mathrm{L}',$$

et de même:

$$G' + \pi' - A' = G' + \pi' - \Gamma'' + \varsigma(\Gamma' - A) - L,$$

on obtiendra, en vertu des équations (5) et (5′) les suivantes:

$$(6) \qquad G + \pi - \Gamma = \varsigma'(G' + \pi' - \Gamma'') + L' + U',$$

$$(6') \qquad G' + \pi' - \Gamma'' = \varsigma(G + \pi - \Gamma) + L + U.$$

Maintenant, si l'on se rappelle les équations (9) et (10) du n° 26 et l'équation (25) du n° 32, on parviendra facilement aux résultats que voici:

$$(7) \qquad G + \pi - \Gamma = v - \omega + (G - F),$$

$$(7') \qquad G' + \pi' - \Gamma'' = v' - \omega' + (G' - F'),$$

où il faut remplacer les quantités G — F et G′ — F′ par les développements

$$G - F = B_1 \sin F + B_2 \sin 2F + \ldots,$$

$$G' - F' = B'_1 \sin F' + B'_2 \sin 2F' + \ldots,$$

les B'_n étant ce que deviennent les B_n lorsqu'on y change η en η'.

En introduisant les valeurs (7) et (7′) dans les équations (6) et (6′), on obtient:

$$(8) \qquad G + \pi - \Gamma = \varsigma'\{v' - \omega' + G' - F'\} + L' + U'$$
$$= V' + \varsigma'(G' - F') + U',$$

et de même:

$$(8') \qquad G' + \pi' - \Gamma'' = V + \varsigma(G - F) + U.$$

Cela étant, si l'on porte, dans l'équation (20) du n° 30, la valeur

$$F = v - \omega - \pi + \Gamma,$$

on aura un résultat qui peut s'écrire de la manière suivante:

$$(9) \qquad e^{im(v-\omega)} = X_0^{(m)}(\eta)e^{im(G+\pi-\Gamma)} + X_1^{(m)}(\eta)e^{i(m+1)(G+\pi-\Gamma)-i(\pi-\Gamma)} + \ldots$$
$$+ X_{-1}^{(m)}(\eta)e^{i(m-1)(G+\pi-\Gamma)+i(\pi-\Gamma)} + \ldots,$$

où l'on a mis en évidence la fonction diastématique η, qui figure comme variable indépendante dans les expressions des $X_\eta^{(m)}$; et, si l'on changeait v en v', ω en ω', ..., on trouverait le résultat analogue

$$(9')\qquad e^{im(v'-\omega')} = X_0^{(m)}(\eta')e^{im(G'+\pi'+\Gamma')} + \ldots .$$

Finalement, en remplaçant les angles $G + \pi - \Gamma$ et $G' + \pi' - \Gamma'$ par leurs valeurs données au moyen des formules (8) et (8′), on arrivera aux relations cherchées entre les angles $v - \omega$ et $v' - \omega'$.

41. Avant d'effectuer les substitutions indiquées, il convient de chercher de nouvelles relations entre les arguments dont il s'agit. D'abord, admettons la notation

$$(10)\qquad H = F' - G' - \varphi(F - G),$$

en sorte que nous ayons:

$$H = \varphi\{B_1 \sin F + B_2 \sin 2F + \ldots\} - B_1' \sin F' - B_2' \sin 2F' - \ldots .$$

La fonction H, s'écrivant, par la définition, ainsi:

$$H = \varphi(G + \pi) - (G' + \pi') - \varphi(F + \pi) + F' + \pi',$$

on obtient, en vertu de la relation

$$G + \pi = \varphi'(G' + \pi') + A - \varphi' A' + U',$$

qui découle immédiatement de l'équation (5), le résultat

$$(11)\qquad H = -\varphi(F + \pi) + F' + \pi' + \varphi A - A' - U$$

Ensuite, si l'on admet encore la notation

$$(10')\qquad H' = F - G - \varphi'(F' - G'),$$

on parviendra de même à l'expression

$$(11')\qquad H' = -\varphi'(F' + \pi') + F + \pi + \varphi' A' - A - U'.$$

Evidemment, les fonctions H et H′ sont liées entre elles par les relations

$$(12)\qquad H = -\varphi H'; \qquad H' = -\varphi' H .$$

Les relations entre les arguments diastématiques que nous venons d'établir au moyen des équations (11) et (11'), nous rendront des services importants dans la suite. Nous les employerons, cependant, sous une forme, un peu différente. Pour y parvenir considérons les valeurs

$$F + \pi - A = (1 - \varsigma)(v - A); \qquad F' + \pi' - A' = (1 - \varsigma')(v' - A'),$$

qui découlent immédiatement de l'équation (25) du n° 32; en les introduisant dans les équations (11) et (11'), nous arriverons aux résultats

$$(13) \qquad v' - A' = \mu(v - A) + \frac{H + U}{1 - \varsigma'},$$

$$(13') \qquad v - A = \frac{1}{\mu}(v' - A') + \frac{H' + U'}{1 - \varsigma}.$$

On a ainsi obtenu des relations très simples entre les longitudes simultanées de deux planètes. Maintenant, pour obtenir de pareilles relations entre les longitudes ω et ω' des périhélies moyens, il ne faut que se rappeler les formules

$$\varsigma(v - A) = \omega - \Gamma'; \qquad \varsigma'(v' - A') = \omega' - \Gamma'';$$

en multipliant l'équation (13) par ς' et, l'équation (13') par ς, on obtient alors:

$$(14) \qquad \omega' - \Gamma'' = \mu\frac{\varsigma'}{\varsigma}(\omega - \Gamma') + \varsigma'\frac{H + U}{1 - \varsigma'},$$

$$(14') \qquad \omega - \Gamma' = \frac{1}{\mu}\frac{\varsigma}{\varsigma'}(\omega' - \Gamma'') + \varsigma\frac{H' + U'}{1 - \varsigma}.$$

Ici, on peut encore remarquer les relations

$$v' - \omega' - A' + \Gamma'' = \mu\left(v - A - \frac{\varsigma'}{\varsigma}(\omega - \Gamma')\right) + H + U,$$

$$v - \omega - A + \Gamma' = \frac{1}{\mu}\left(v' - A' - \frac{\varsigma}{\varsigma'}(\omega' - \Gamma'')\right) + H' + U'$$

et aussi les suivantes

$$v' - \omega' - A' + \Gamma'' = \mu(1 - \varsigma')(v - A) + H + U,$$

$$v - \omega - A + \Gamma' = \frac{1}{\mu}(1 - \varsigma)(v' - A') + H' + U',$$

qui remplacent, toutes les quatres, les équations (11) et (11').

Au moyen des relations signalées, on parvient à exprimer les arguments V et V′ par les formules

(15) $$V = v' - \omega' - H - U; \qquad V' = v - \omega - H' - U'$$

On voit, puisque les fonctions H, U, H′ et U′ sont exprimées au moyen d'agrégats périodiques, que l'argument V est isocinétique avec l'argument diastématique de la seconde planète, tandis que V′ est isocinétique avec celui de la première.

Par des procédés, entièrement analogues avec ceux par lesquels nous sommes parvenus aux équations (14) et (14′), nous obtenons aussi les relations suivantes entre les fonctions ϑ et ϑ':

(16) $$\vartheta' - \Theta' = \mu\frac{\tau}{\tau}(\vartheta - \Theta) - \tau'\frac{H+U}{1-\varsigma},$$

(16′) $$\vartheta - \Theta = \frac{1}{\mu}\frac{\tau}{\tau}(\vartheta' - \Theta') - \tau\frac{H+U}{1-\varsigma}.$$

42. Revenons maintenant au développement (9), et introduisons-y la valeur de l'angle $G + \pi - \Gamma$ selon l'équation (8). De la sorte, nous aurons immédiatement:

(17) $$\begin{aligned} e^{im(v-\omega)} = \; & X_0^{(m)}(\eta)e^{im[V'+\varphi'(G'-F')+U']} \\ & + X_1^{(m)}(\eta)e^{i(m+1)[V'+\varphi'(G'-F')+U']+i(\pi-\Gamma)} \\ & + X_{-1}^{(m)}(\eta)e^{i(m-1)[V'+\varphi'(G'-F')+U']+i(\pi-\Gamma)} \\ & + X_2^{(m)}(\eta)e^{i(m+2)[V'+\varphi'(G'-F')+U']+2i(\pi-\Gamma)} \\ & + \ldots \end{aligned}$$

et de même:

(17′) $$\begin{aligned} e^{im(v'-\omega')} = \; & X_0^{(m)}(\eta')e^{im[V+\varphi(G-F)+U]} \\ & + \ldots . \end{aligned}$$

Or, en se rappelant le développement (17) du chap. III, et en y mettant, au lieu de λ, les valeurs $m\varphi'$, $(m+1)\varphi'$ ..., il sera facile d'exprimer les fonctions $e^{im(v-\omega)}$ et $e^{im(v'-\omega')}$ au moyen de termes trigonométriques dépendant, dans le premier cas, des arguments $v' - \omega'$ et V′, et dans l'autre, des arguments $v - \omega$ et V.

Dans ce but, admettons les notations

$$(18) \qquad \Pi_{m,m+\mu} = X_\mu^{(m)}(\eta')e^{i(m+\mu)\varsigma(G-F)-i\mu(\pi-\Gamma)},$$

$$(18') \qquad \Pi'_{m,m+\mu} = X_\mu^{(m)}(\eta)e^{i(m+\mu)\varsigma'(G'-F')-i\mu(\pi-\Gamma)},$$

ce qui nous permet d'écrire:

$$(19) \qquad e^{im(v-\omega)} = \Pi'_{m,m}e^{im(V'+U')} + \Pi'_{m,m+1}e^{i(m+1)(V'+U')} + \dots$$
$$+ \Pi'_{m,m-1}e^{i(m-1)(V'+U')} + \dots,$$

$$(19') \qquad e^{im(v'-\omega')} = \Pi_{m,m}e^{im(V+U)} + \dots.$$

Posons ensuite:

$$(20) \qquad \Sigma_\nu^{m,m+\mu}(\eta\,,\,\eta') = X_\mu^{(m)}(\eta)\,Y_\nu^{((m+\mu)\varsigma')}(\eta')e^{-i\nu(\pi'-\Gamma')-i\mu(\pi-\Gamma)},$$

$$(20') \qquad \Sigma_\nu^{m,m+\mu}(\eta'\,,\,\eta) = X_\mu^{(m)}(\eta')\,Y_\nu^{((m+\mu)\varsigma)}(\eta)e^{-i\nu(\pi-\Gamma)-i\mu(\pi'-\Gamma')},$$

et maintenant, les fonctions $\Pi_{m,m+\mu}$ et $\Pi'_{m,m+\mu}$ s'exprimeront au moyen des formules

$$(21) \quad \Pi_{m,m+\mu} = \Sigma_0^{m,m+\mu}(\eta',\eta) + \Sigma_1^{m,m+\mu}(\eta',\eta)e^{i(v-\omega)} + \Sigma_2^{m,m+\mu}(\eta',\eta)e^{2i(v-\omega)} + \dots$$
$$+ \Sigma_{-1}^{m,m+\mu}(\eta',\eta)e^{-i(v-\omega)} + \Sigma_{-2}^{m,m+\mu}(\eta',\eta)e^{-2i(v-\omega)} + \dots,$$

$$(21') \quad \Pi'_{m,m+\mu} = \Sigma_0^{m,m+\mu}(\eta\,,\,\eta') + \Sigma_1^{m,m+\mu}(\eta\,,\,\eta')e^{i(v'-\omega')} + \dots$$

Ayant égard aux formules (19) et (21) du chap. III, on parviendra finalement aux expressions suivantes donnant les fonctions Σ:

$$(22,\text{a}) \quad \Sigma_\nu^{m,m+\mu}(\eta\,,\,\eta') = (-1)^\nu e^{-i\nu(\pi'-\Gamma')-i\mu(\pi-\Gamma)}$$
$$\times\left\{\xi_\mu^{m,\mu}\eta^\mu - \xi_{\mu+2}^{m,\mu}\eta^{\mu+2} + \dots\right\}$$
$$\times\left\{\varepsilon_\nu^{(m+\mu)\varsigma',\nu}\eta'^\nu - \varepsilon_{\nu+2}^{(m+\mu)\varsigma',\nu}\eta'^{\nu+2} + \dots\right\}$$
$$= (-1)^\nu\eta^\mu\eta'^\nu e^{-i\nu(\pi'-\Gamma')-i\mu(\pi-\Gamma)}$$
$$\times\left\{\xi_\mu^{m,\mu}\varepsilon_\nu^{(m+\mu)\varsigma',\nu} - \xi_{\mu+2}^{m,\mu}\varepsilon_\nu^{(m+\mu)\varsigma',\nu}\eta^2 - \xi_\mu^{m,\mu}\varepsilon_{\nu+2}^{(m+\mu)\varsigma',\nu}\eta'^2\right.$$
$$+ \xi_{\mu+4}^{m,\mu}\varepsilon_\nu^{(m+\mu)\varsigma',\nu}\eta^4 + \xi_{\mu+2}^{m,\mu}\varepsilon_{\nu+2}^{(m+\mu)\varsigma',\nu}\eta^2\eta'^2 + \xi_\mu^{m,\mu}\varepsilon_{\nu+4}^{(m+\mu)\varsigma',\nu}\eta'^4$$
$$\left. - \dots\right\},$$

$$(22,\mathrm{b})\quad \Sigma_{\nu}^{m,m-\mu}(\eta,\eta') = (-1)^{\nu}\eta^{\mu}\eta'^{\nu}e^{-\nu i(\pi'-\Gamma')+\mu i(\pi-\Gamma)}$$
$$\times\Big\{\xi_{\mu}^{m,-\mu}\varepsilon_{\nu}^{(m-\mu)\varsigma',\nu}-\xi_{\mu+2}^{m,-\mu}\varepsilon_{\nu}^{(m-\mu)\varsigma',\nu}\eta^{2}-\xi_{\mu}^{m,-\mu}\varepsilon_{\nu+2}^{(m-\mu)\varsigma',\nu}\eta'^{2}$$
$$+\xi_{\mu+4}^{m,-\mu}\varepsilon_{\nu}^{(m-\mu)\varsigma',\nu}\eta^{4}+\xi_{\mu+2}^{m,-\mu}\varepsilon_{\nu+2}^{(m-\mu)\varsigma',\nu}\eta^{2}\eta'^{2}+\xi_{\mu}^{m,-\mu}\varepsilon_{\nu+4}^{(m-\mu)\varsigma',\nu}\eta'^{4}$$
$$-\ldots\Big\},$$

$$(22,\mathrm{c})\quad \Sigma_{-\nu}^{m,m+\mu}(\eta,\eta') = (-1)^{\nu}\eta^{\mu}\eta'^{\nu}e^{\nu i(\pi'-\Gamma')-\mu i(\pi-\Gamma)}$$
$$\times\Big\{\xi_{\mu}^{m,\mu}\varepsilon_{\nu}^{(m+\mu)\varsigma',-\nu}-\xi_{\mu+2}^{m,\mu}\varepsilon_{\nu}^{(m+\mu)\varsigma',-\nu}\eta^{2}-\xi_{\mu}^{m,\mu}\varepsilon_{\nu+2}^{(m+\mu)\varsigma',-\nu}\eta'^{2}$$
$$+\xi_{\mu+4}^{m,\mu}\varepsilon_{\nu}^{(m+\mu)\varsigma',-\nu}\eta^{4}+\xi_{\mu+2}^{m,\mu}\varepsilon_{\nu+2}^{(m+\mu)\varsigma',-\nu}\eta^{2}\eta'^{2}+\xi_{\mu}^{m,\mu}\varepsilon_{\nu+4}^{(m+\mu)\varsigma',-\nu}\eta'^{4}$$
$$-\ldots\Big\},$$

$$(22,\mathrm{d})\quad \Sigma_{-\nu}^{m,m-\mu}(\eta,\eta') = (-1)^{\nu}\eta^{\mu}\eta'^{\nu}\varepsilon^{\nu i(\pi'-\Gamma')+\mu i(\pi-\Gamma)}$$
$$\times\Big\{\xi_{\mu}^{m,-\mu}\varepsilon_{\nu}^{(m-\mu)\varsigma',-\nu}-\xi_{\mu+2}^{m,-\mu}\varepsilon_{\nu}^{(m-\mu)\varsigma',-\nu}\eta^{2}-\xi_{\mu}^{m,-\mu}\varepsilon_{\nu+2}^{(m-\mu)\varsigma',-\nu}\eta'^{2}$$
$$+\xi_{\mu+4}^{m,-\mu}\varepsilon_{\nu}^{(m-\mu)\varsigma',-\nu}\eta^{4}+\xi_{\mu+2}^{m,-\mu}\varepsilon_{\nu+2}^{(m-\mu)\varsigma',-\nu}\eta^{2}\eta'^{2}$$
$$+\xi_{\mu}^{m,-\mu}\varepsilon_{\nu+4}^{(m-\mu)\varsigma',-\nu}\eta'^{4}$$
$$-\ldots\Big\},$$

$$(22',\mathrm{a})\quad \Sigma_{\nu}^{m,m+\mu}(\eta',\eta) = (-1)^{\nu}\eta'^{\mu}\eta^{\nu}e^{-\nu i(\pi-\Gamma)-\mu i(\pi'-\Gamma')}$$
$$\times\Big\{\xi_{\mu}^{m,\mu}\varepsilon_{\nu}^{(m+\mu)\varsigma,\nu}-\xi_{\mu+2}^{m,\mu}\varepsilon_{\nu}^{(m+\mu)\varsigma,\nu}\eta'^{2}-\xi_{\mu}^{m,\mu}\varepsilon_{\nu+2}^{(m+\mu)\varsigma,\nu}\eta^{2}$$
$$+\xi_{\mu+4}^{m,\mu}\varepsilon_{\nu}^{(m+\mu)\varsigma,\nu}\eta'^{4}+\xi_{\mu+2}^{m,\mu}\varepsilon_{\nu+2}^{(m+\mu)\varsigma,\nu}\eta'^{2}\eta^{2}+\xi_{\mu}^{m,\mu}\varepsilon_{\nu+4}^{(m+\mu)\varsigma,\nu}\eta^{4}$$
$$-\ldots\Big\},$$

$$(22',\mathrm{b})\quad \Sigma_{\nu}^{m,m-\mu}(\eta',\eta) = (-1)^{\nu}\eta'^{\mu}\eta^{\nu}e^{-\nu i(\pi-\Gamma)+\mu i(\pi'-\Gamma')}$$
$$\times\Big\{\xi_{\mu}^{m,-\mu}\varepsilon_{\nu}^{(m-\mu)\varsigma,\nu}-\xi_{\mu+2}^{m,-\mu}\varepsilon_{\nu}^{(m-\mu)\varsigma,\nu}\eta'^{2}-\xi_{\mu}^{m,-\mu}\varepsilon_{\nu+2}^{(m-\mu)\varsigma,\nu}\eta^{2}$$
$$+\xi_{\mu+4}^{m,-\mu}\varepsilon_{\nu}^{(m-\mu)\varsigma,\nu}\eta'^{4}+\xi_{\mu+2}^{m,-\mu}\varepsilon_{\nu+2}^{(m-\mu)\varsigma,\nu}\eta'^{2}\eta^{2}+\xi_{\mu}^{m,-\mu}\varepsilon_{\nu+4}^{(m-\mu)\varsigma,\nu}\eta^{4}$$
$$-\ldots\Big\},$$

$$(22',\mathrm{c})\quad \Sigma_{-\nu}^{m,m+\mu}(\eta',\eta) = (-1)^{\nu}\eta'^{\mu}\eta^{\nu}e^{\nu i(\pi-\Gamma)-\mu i(\pi'-\Gamma')}$$
$$\times\Big\{\xi_{\mu}^{m,\mu}\varepsilon_{\nu}^{(m+\mu)\varsigma,-\nu}-\xi_{\mu+2}^{m,\mu}\varepsilon_{\nu}^{(m+\mu)\varsigma,-\nu}\eta'^{2}-\xi_{\mu}^{m,\mu}\varepsilon_{\nu+2}^{(m+\mu)\varsigma,-\nu}\eta^{2}$$
$$+\xi_{\mu+4}^{m,\mu}\varepsilon_{\nu}^{(m+\mu)\varsigma,-\nu}\eta'^{4}+\xi_{\mu+2}^{m,\mu}\varepsilon_{\nu+2}^{(m+\mu)\varsigma,-\nu}\eta'^{2}\eta^{2}+\xi_{\mu}^{m,\mu}\varepsilon_{\nu+4}^{(m+\mu)\varsigma,-\nu}\eta^{4}$$
$$-\ldots\Big\},$$

$$(22',\mathrm{d})\quad \Sigma_\nu^{m,m-\mu}(\eta',\eta) = (-1)^\nu \eta'^\mu \eta^\nu e^{\nu i(\pi-\Gamma)+\mu i(\pi'-\Gamma')}$$

$$\times \{ \xi_\mu^{m,-\mu} \varepsilon_\nu^{(m-\mu)\varphi,-\nu} - \xi_{\mu+2}^{m,-\mu} \varepsilon_\nu^{(m-\mu)\varphi,-\nu} \eta'^2 - \xi_\mu^{m,-\mu} \varepsilon_{\nu+2}^{(m-\mu)\varphi,-\nu} \eta^2$$

$$+ \xi_{\mu+4}^{m,-\mu} \varepsilon_\nu^{(m-\mu)\varphi,-\nu} \eta'^4 + \xi_{\mu+2}^{m,-\mu} \varepsilon_{\nu+2}^{(m-\mu)\varphi,-\nu} \eta'^2 \eta^2$$

$$+ \xi_\mu^{m,-\mu} \varepsilon_{\nu+4}^{(m-\mu)\varphi,-\nu} \eta^4$$

$$- \ldots \}.$$

En vertu des transformations indiquées, on est parvenu à exprimer les fonctions $\cos m(v-\omega)$ et $\sin m(v-\omega)$ par les arguments V' et $v'-\omega'$, ainsi que les fonctions $\cos m(v'-\omega')$ et $\sin m(v'-\omega')$ par les arguments V et $v-\omega$, sauf les arguments d'où dépendent les fonctions $\eta e^{i(\pi-\Gamma)}$ et $\eta' e^{i(\pi'-\Gamma')}$. Ce but atteint, on pourrait s'en contenter. A certains égards toutefois, il pourrait être utile d'avoir mis en évidence les développements (19) et (19'), en y supposant des valeurs négatives de m, ce qui revient à avoir formé les coefficients des développements

$$(19'')\qquad e^{-im(v-\omega)} = \Pi'_{-m,-m} e^{-im(V'+U')} + \Pi'_{-m,-m-1} e^{-i(m+1)(V'+U')} + \ldots$$

$$+ \Pi'_{-m,-m+1} e^{-i(m-1)(V'+U')} + \ldots,$$

$$(19''')\qquad e^{-im(v'-\omega')} = \Pi_{-m,-m} e^{-im(V+U)} + \ldots$$

Evidemment, si l'on admet:

$$(21'')\qquad \Pi_{-m,-m+\mu} = \Sigma_0^{-m,-m+\mu}(\eta',\eta) + \Sigma_1^{-m,-m+\mu}(\eta',\eta) e^{i(v-\omega)} + \ldots$$

$$+ \Sigma_{-1}^{-m,-m+\mu}(\eta',\eta) e^{-i(v-\omega)} + \ldots,$$

$$(21''')\qquad \Pi'_{-m,-m+\mu} = \Sigma_0^{-m,-m+\mu}(\eta,\eta') + \ldots,$$

les fonctions $\Sigma^{-m,-m+\mu}$ seront données moyennant les formules

$$\Sigma_\nu^{-m,-m+\mu}(\eta,\eta') = X_\mu^{(-m)}(\eta)\, Y_\nu^{(-m+\mu\varphi')}(\eta') e^{-\nu i(\pi-\Gamma)-\mu i(\pi'-\Gamma')},$$

$$\Sigma_\nu^{-m,-m+\mu}(\eta',\eta) = X_\mu^{(-m)}(\eta')\, Y_\nu^{(-m+\mu\varphi)}(\eta) e^{-\nu i(\pi'-\Gamma')-\mu i(\pi-\Gamma)}.$$

En considérant toutefois les relations

$$X_\mu^{(-m)} = X_{-\mu}^{(m)}; \qquad Y_\nu^{(-\lambda)} = Y_{-\nu}^{(\lambda)},$$

on mettra immédiatement les formules précédentes sous les formes

(20″) $$\Sigma_\nu^{-m,-m+n}(\eta, \eta') = X^{(m)}_n(\eta)\, Y^{(m-n)\varsigma}_{-\nu}(\eta')\, e^{\nu i(\pi-\Gamma')+ni(\pi-\Gamma)},$$

(20‴) $$\Sigma_\nu^{-m,-m+n}(\eta', \eta) = X^{(m)}_n(\eta')\, Y^{(m-n)\varsigma}_{\nu}(\eta)\, e^{\nu i(\pi-\Gamma')+ni(\pi-\Gamma)},$$

d'où l'on tire, en les comparant avec les formules (20) et (20′), les relations suivantes

(23) $$\Sigma_\nu^{-m,-m+n}(\eta, \eta')\, e^{\nu i(\pi-\Gamma')+ni(\pi-\Gamma)} = \Sigma_\nu^{m,m-n}(\eta, \eta')\, e^{-\nu i(\pi-\Gamma')-ni(\pi-\Gamma)},$$

(23′) $$\Sigma_\nu^{-m,-m+n}(\eta', \eta)\, e^{\nu i(\pi-\Gamma')+ni(\pi-\Gamma)} = \Sigma_{-\nu}^{m,m-n}(\eta', \eta)\, e^{-\nu i(\pi-\Gamma')-ni(\pi-\Gamma)}.$$

Il paraît inutile de mettre en évidence la continuation des équations (22), en attribuant des valeurs négatives à l'indice m.

43. Dans le courant du calcul, il peut se montrer, la nécessité de convertir un développement suivant les multiples des arguments v', V′ et ω' en un autre, dépendant des arguments v, V et ω. Voici la manière d'opérer les transformations y relatives.

Prenons pour point de départ l'équation

(24) $$e^{\alpha i \mathrm{H}} = e^{\alpha i(\mathrm{G}-\mathrm{I})}\, e^{\alpha i(\mathrm{F}-\mathrm{G})},$$

α étant un nombre quelconque.

En désignant par λ le produit $\alpha\varphi$, et en développant les deux facteurs, dont est composé le second membre de l'équation précédente, nous aurons:

$$\begin{aligned} e^{\alpha i \mathrm{H}} = \Big\{ & Y_0^{(\lambda)}(\eta) + Y_1^{(\lambda)}(\eta)e^{i\mathrm{F}} + Y_2^{(\lambda)}(\eta)e^{2i\mathrm{F}} + \dots \\ & + Y_{-1}^{(\lambda)}(\eta)e^{-i\mathrm{F}} + Y_{-2}^{(\lambda)}(\eta)e^{-2i\mathrm{F}} + \dots \Big\} \\ \times \Big\{ & X_0^{(\alpha)}(\eta') + X_1^{(\alpha)}(\eta')e^{i\mathrm{G}} + X_2^{(\alpha)}(\eta')e^{2i\mathrm{G}} + \dots \\ & + X_{-1}^{(\alpha)}(\eta')e^{-i\mathrm{G}} + X_{-2}^{(\alpha)}(\eta')e^{-2i\mathrm{G}} + \dots \Big\}. \end{aligned}$$

Le premier des facteurs mis en évidence s'écrit ainsi:

$$Y_0^{(\lambda)}(\eta) + Y_1^{(\lambda)}(\eta)\, e^{i(\pi-\Gamma')+i(v-\omega)} + \dots,$$

et le second, en vertu de l'équation (8′), de la manière suivante:

$$X_0^{(\alpha)}(\eta') + X_1^{(\alpha)}(\eta')\, e^{i(\pi-\Gamma')+i(\mathrm{V}+\Gamma)+\alpha i(\mathrm{G}-\mathrm{I})} + \dots,$$

donc, en développant les exponentielles dépendant de la différence G — F, nous aurons pour l'expression du facteur dont il s'agit:

$$
\begin{aligned}
& X_0^{(\omega)}(\eta') \\
& + X_1^{(\omega)}(\eta')e^{-i(\pi'-\Gamma')+i(V+U)} \left| \begin{aligned} Y_0^{(\varsigma)}(\eta) + Y_1^{(\varsigma)}(\eta)e^{-i(\pi-\Gamma)+i(v-\omega)} + \ldots \\ + Y_{-1}^{(\varsigma)}(\eta)e^{i(\pi-\Gamma)-i(v-\omega)} + \ldots \end{aligned} \right| \\
& + X_{-1}^{(\omega)}(\eta')e^{i(\pi'-\Gamma')-i(V+U)} \left| \begin{aligned} Y_0^{(\varsigma)}(\eta) + Y_{-1}^{(\varsigma)}(\eta)e^{-i(\pi-\Gamma)+i(v-\omega)} + \ldots \\ + Y_1^{(\varsigma)}(\eta)e^{i(\pi-\Gamma)-i(v-\omega)} + \ldots \end{aligned} \right| \\
& + X_2^{(\omega)}(\eta')e^{-2i(\pi'-\Gamma')+2i(V+U)} \left| \begin{aligned} Y_0^{(2\varsigma)}(\eta) + Y_1^{(2\varsigma)}(\eta)e^{-i(\pi-\Gamma)+i(v-\omega)} + \ldots \\ + Y_{-1}^{(2\varsigma)}(\eta)e^{i(\pi-\Gamma)-i(v-\omega)} + \ldots \end{aligned} \right| . \\
& + \ldots .
\end{aligned}
$$

Maintenant, si nous écrivons:

$$
\begin{aligned}
(25) \qquad e^{i\omega H} = E_0 + E_1 e^{i(V+U)} + E_2 e^{2i(V+U)} + \ldots \\
+ E_{-1}e^{-i(V+U)} + E_{-2}e^{-2i(V+U)} + \ldots,
\end{aligned}
$$

et que nous admettions le développement

$$
\begin{aligned}
(26) \qquad E_s = D_0^{(s)}(\eta', \eta) + D_1^{(s)}(\eta', \eta)e^{i(v-\omega)} + D_2^{(s)}(\eta', \eta)e^{2i(v-\omega)} + \ldots \\
+ D_{-1}^{(s)}(\eta', \eta)e^{-i(v-\omega)} + D_{-2}^{(s)}(\eta', \eta)e^{-2i(v-\omega)} + \ldots,
\end{aligned}
$$

s et r étant des nombres entiers, les fonctions $D_r^{(s)}$ seront exprimées au moyen de la formule

$$
\begin{aligned}
(27) \qquad D_r^{(s)}(\eta', \eta) = X_s^{(\omega)}(\eta')e^{-si(\pi'-\Gamma')-ri(\pi-\Gamma)} \\
\times \{ Y_0^{(\lambda)}(\eta)\, Y_r^{(s\varsigma)}(\eta) + Y_1^{(\lambda)}(\eta)\, Y_{r-1}^{(s\varsigma)}(\eta) + \ldots \\
+ Y_{-1}^{(\lambda)}(\eta)\, Y_{r+1}^{(s\varsigma)}(\eta) + \ldots \}.
\end{aligned}
$$

Il nous reste encore à exprimer, par un développement suivant les puissances de η^2 et de η'^2, le coefficient de l'exponentielle imaginaire qui entre dans la formule précédente. Si, à cette fin, nous nous rappelons les équations (19) et (21) du chap. III du livre précédent, et que nous admettions les notations

$$
(28)\qquad\left\{
\begin{aligned}
e_{r,0} &= \sum_{n=0}^{n=r} \varepsilon_n^{\lambda,n}\varepsilon_r^{s\varsigma,r-n} \\
e_{r,1} &= \sum_{n=0}^{n=r} \left\{\varepsilon_n^{\lambda,n}\varepsilon_{r+2}^{s\varsigma,r-n} + \varepsilon_{n+2}^{\lambda,n}\varepsilon_r^{s\varsigma,r-n}\right\} \\
e_{r,2} &= \sum_{n=0}^{n=r} \left\{\varepsilon_n^{\lambda,n}\varepsilon_{r+4}^{s\varsigma,r-n} + \varepsilon_{n+2}^{\lambda,n}\varepsilon_{r+2}^{s\varsigma,r-n} + \varepsilon_{n+4}^{\lambda,n}\varepsilon_r^{s\varsigma,r-n}\right\} \\
&\ldots,
\end{aligned}
\right.
$$

nous parvenons à exprimer la fonction D au moyen de la formule suivante

$$
(29)\qquad D_r^{(s)}(\eta', \eta) = (-1)^r \eta'^s \eta^r e^{i[s(\omega'-\Gamma')-r(\pi-\Gamma)]}
$$

$$
\times \left\{\Xi_s^{\lambda,s} e_{r,0} - \Xi_s^{\lambda,s} e_{r,1}\eta^2 - \Xi_{s+2}^{\lambda,s} e_{r,0}\eta'^2 + \ldots\right\}.
$$

Ainsi, on a établi le développement de la fonction $e^{i\alpha H}$ suivant les multiples de V et de $v - \omega$, mais on parvient à ce même résultat d'une autre voie, que je vais indiquer rapidement.

En partant de l'équation (24), on écrira immédiatement celle-ci:

$$
\begin{aligned}
e^{i\alpha H} = \{ & Y_0^{(\lambda)}(\eta) + Y_1^{(\lambda)}(\eta)e^{iF} + Y_2^{(\lambda)}(\eta)e^{2iF} + \ldots \\
& + Y_{-1}^{(\lambda)}(\eta)e^{-iF} + Y_{-2}^{(\lambda)}(\eta)e^{-2iF} + \ldots \} \\
\times \{ & Y_0^{(\mu)}(\eta') + Y_1^{(\mu)}(\eta')e^{i(\pi-\Gamma')-i(v'-\omega')} + \ldots \\
& + Y_{-1}^{(\mu)}(\eta')e^{-i(\pi-\Gamma')+i(v'-\omega')} + \ldots \},
\end{aligned}
$$

et si l'on y introduit les valeurs des différents $e^{im(v'-\omega')}$ selon l'équation (19'), on tombera sur l'expression suivante de la fonction E_s:

$$
\begin{aligned}
E_s = \{ & Y_0^{(\lambda)}(\eta) + Y_1^{(\lambda)}(\eta)e^{iF} + \ldots \\
& + Y_{-1}^{(\lambda)}(\eta)e^{-iF} + \ldots \} \\
\times \{ & Y_1^{(\mu)}(\eta')e^{i(\pi-\Gamma')}H_{-1,s} + Y_2^{(\mu)}(\eta')e^{2i(\pi-\Gamma')}H_{-2,s} + \ldots \\
& + Y_{-1}^{(\mu)}(\eta')e^{-i(\pi-\Gamma')}H_{1,s} + Y_{-2}^{(\mu)}(\eta')e^{-2i(\pi-\Gamma')}H_{2,s} + \ldots \};
\end{aligned}
$$

seulement, si l'entier s est égal à zéro, on doit employer la formule que voici:

$$
\begin{aligned}
E_0 = \{ & \Upsilon_0^{(\lambda)}(\eta) + \Upsilon_1^{(\lambda)}(\eta) e^{iF} + \ldots \\
& + \Upsilon_{-1}^{(\lambda)}(\eta) e^{-iF} + \ldots \} \\
\times \{ & \Upsilon_0^{(\mu)}(\eta') + \Upsilon_1^{(\mu)}(\eta') e^{i(\pi'-\Gamma')} \Pi_{-1.0} + \Upsilon_2^{(\mu)}(\eta') e^{2i(\pi-\Gamma')} \Pi_{-2.0} + \ldots \\
& + \Upsilon_{-1}^{(\mu)}(\eta') e^{-i(\pi-\Gamma')} \Pi_{1.0} + \Upsilon_{-2}^{(\mu)}(\eta') e^{-2i(\pi-\Gamma')} \Pi_{2.0} + \ldots \}.
\end{aligned}
$$

Ensuite, si l'on porte, dans les formules obtenues, les expressions des divers $\Pi_{m,s}$, tirées de la formule générale (21), qu'on effectue les multiplications indiquées et qu'on rassemble finalement tous les termes multipliés par $e^{ri(v-\omega)}$, on parviendra à l'expression de la fonction $D_r^{(s)}(\eta', \eta)$ qui suit:

$$
D_r^{(s)}(\eta', \eta) =
$$

$$
\begin{aligned}
& e^{-ri(\pi-\Gamma')}\, \Upsilon_r^{(\lambda)}(\eta) \left\{ \begin{array}{ll} \Upsilon_1^{(\mu)}(\eta') \Sigma_0^{-1.s}(\eta', \eta) e^{i(\pi-\Gamma')} & + \Upsilon_{-1}^{(\mu)}(\eta') \Sigma_0^{1.s}(\eta', \eta) e^{-i(\pi-\Gamma')} \\ + \Upsilon_2^{(\mu)}(\eta') \Sigma_0^{-2.s}(\eta', \eta) e^{2i(\pi-\Gamma')} & + \Upsilon_{-2}^{(\mu)}(\eta') \Sigma_0^{2.s}(\eta', \eta) e^{-2i(\pi-\Gamma')} \\ + \ldots & + \ldots \end{array} \right\} \\
+ & e^{-(r-1)i(\pi-\Gamma')}\, \Upsilon_{r-1}^{(\lambda)}(\eta) \left\{ \begin{array}{ll} \Upsilon_1^{(\mu)}(\eta') \Sigma_1^{-1.s}(\eta', \eta) e^{i(\pi-\Gamma')} & + \Upsilon_{-1}^{(\mu)}(\eta') \Sigma_1^{1.s}(\eta', \eta) e^{-i(\pi-\Gamma')} \\ + \Upsilon_2^{(\mu)}(\eta') \Sigma_1^{-2.s}(\eta', \eta) e^{2i(\pi-\Gamma')} & + \Upsilon_{-2}^{(\mu)}(\eta') \Sigma_1^{2.s}(\eta', \eta) e^{-2i(\pi-\Gamma')} \\ + \ldots & + \ldots \end{array} \right\} \\
+ & e^{-(r+1)i(\pi-\Gamma')}\, \Upsilon_{r+1}^{(\lambda)}(\eta) \left\{ \begin{array}{ll} \Upsilon_1^{(\mu)}(\eta') \Sigma_{-1}^{-1.s}(\eta', \eta) e^{i(\pi-\Gamma')} & + \Upsilon_{-1}^{(\mu)}(\eta') \Sigma_{-1}^{1.s}(\eta', \eta) e^{-i(\pi'-\Gamma')} \\ + \Upsilon_2^{(\mu)}(\eta') \Sigma_{-1}^{-2.s}(\eta', \eta) e^{2i(\pi-\Gamma')} & + \Upsilon_{-2}^{(\mu)}(\eta') \Sigma_{-1}^{2.s}(\eta', \eta) e^{-2i(\pi'-\Gamma')} \\ + \ldots & + \ldots \end{array} \right\} \\
+ & e^{-(r-2)i(\pi-\Gamma')}\, \Upsilon_{r-2}^{(\lambda)}(\eta) \left\{ \begin{array}{ll} \Upsilon_1^{(\mu)}(\eta') \Sigma_2^{-1.s}(\eta', \eta) e^{i(\pi-\Gamma')} & + \Upsilon_{-1}^{(\mu)}(\eta') \Sigma_2^{1.s}(\eta', \eta) e^{-i(\pi'-\Gamma')} \\ + \Upsilon_2^{(\mu)}(\eta') \Sigma_2^{-2.s}(\eta', \eta) e^{2i(\pi-\Gamma')} & + \Upsilon_{-2}^{(\mu)}(\eta') \Sigma_2^{2.s}(\eta', \eta) e^{-2i(\pi'-\Gamma')} \\ + \ldots & + \ldots \end{array} \right\} \\
+ & \ldots
\end{aligned}
$$

Dans le cas où l'on a s égal à zéro, il faut encore ajouter à l'expression précédente le terme

$$
\Upsilon_r^{(\lambda)}(\eta)\, \Upsilon_0^{(\mu)}(\eta') e^{-ri(\pi-\Gamma')}.
$$

Finalement, pour que ressorte tout le facteur exponentiel, on va remplacer les fonctions Σ par les expressions qu'on a obtenues en vertu de l'équation (20′); on trouvra de la sorte le résultat

$$(30)\qquad D_{\mathrm{r}}^{(\mathrm{s})}(\eta', \eta) = e^{\mathrm{r}i(\pi-\Gamma) - \mathrm{s}i(\pi-\Gamma')}$$

$$\times \left| \begin{array}{l} Y_{\mathrm{r}}^{(\lambda)}(\eta)\, Y_0^{(\mathrm{s}\varphi)}(\eta) + Y_{\mathrm{r}-1}^{(\lambda)}(\eta)\, Y_1^{(\mathrm{s}\varphi)}(\eta) + \ldots \\ \qquad\qquad + Y_{\mathrm{r}+1}^{(\lambda)}(\eta)\, Y_{-1}^{(\mathrm{s}\varphi)}(\eta) + \ldots \end{array} \right|$$

$$\times \left| \begin{array}{ll} \quad X_{\mathrm{s}+1}^{(1)}(\eta')\, Y_1^{(\omega)}(\eta') & + X_{\mathrm{s}-1}^{(1)}(\eta')\, Y_{-1}^{(\omega)}(\eta') \\ + X_{\mathrm{s}+2}^{(2)}(\eta')\, Y_2^{(\omega)}(\eta') & + X_{\mathrm{s}-2}^{(2)}(\eta')\, Y_{-2}^{(\omega)}(\eta') \\ + \ldots & + \ldots \end{array} \right|,$$

auquel s'ajoute, dans le cas de s = 0, la partie

$$(30,\mathrm{a})\qquad e^{\mathrm{r}i(\pi-\Gamma)}\, Y_{\mathrm{r}}^{(\lambda)}(\eta)\, Y_0^{(\omega)}(\eta')$$

Je ne tiens pas nécessaire de développer algébriquement la formule (30), vu que les développements numériques de son deuxième et de son troisième facteur s'obtiennent très aisément, l'un suivant les puissances de η^2 et l'autre suivant celles de η'^2. Les expressions de ces facteurs établies, on parviendra immédiatement à la forme de l'équation (29).

En changeant η en η', η' en η et φ en φ', et en désignant par λ' le produit $\alpha\varphi'$, on écrira immédiatement les équations

$$(25')\qquad e^{i\alpha\mathrm{H}'} = E_0' + E_1' e^{i(\mathrm{V}'+\mathrm{U}')} + E_2' e^{2i(\mathrm{V}'+\mathrm{U}')} + \ldots$$
$$+ E'_{-1} e^{-i(\mathrm{V}'+\mathrm{U}')} + E'_{-2} e^{-2i(\mathrm{V}'+\mathrm{U}')} + \ldots,$$

$$(26')\qquad E_{\mathrm{s}}' = D_0^{(\mathrm{s})}(\eta, \eta') + D_1^{(\mathrm{s})}(\eta, \eta') e^{i(v'-\omega')} + D_2^{(\mathrm{s})}(\eta, \eta') e^{2i(v'-\omega')} + \ldots$$
$$+ D_{-1}^{(\mathrm{s})}(\eta, \eta') e^{-i(v'-\omega')} + D_{-2}^{(\mathrm{s})}(\eta, \eta') e^{-2i(v'-\omega')} + \ldots,$$

$$(27')\qquad D_{\mathrm{r}}^{(\mathrm{s})}(\eta, \eta') = X_{\mathrm{s}}^{(\omega)}(\eta) e^{-\mathrm{s}i(\pi-\Gamma) + \mathrm{r}i(\pi-\Gamma')}$$
$$\times \left\{ Y_0^{(\lambda')}(\eta')\, Y_{\mathrm{r}}^{(\mathrm{s}\varphi')}(\eta') + Y_1^{(\lambda')}(\eta')\, Y_{\mathrm{r}-1}^{(\mathrm{s}\varphi')}(\eta) + \ldots \right.$$
$$\left. + Y_{-1}^{(\lambda')}(\eta')\, Y_{\mathrm{r}+1}^{(\mathrm{s}\varphi')}(\eta) + \ldots \right\},$$

parfaitement analogues aux équations (25), (26) et (27).

44. Après avoir établi les résultats du numéro précédent, il sera très facile d'opérer la conversion y énoncée. En effet, si l'on désigne par p et q deux nombres réels, positifs ou négatifs, il s'agit de trouver le développement, suivant les multiples des arguments V et $(v - \omega)$, de la fonction

$$e^{pi(V+U)+qi(v-\omega)},$$

ou réciproquement, celui de la fonction

$$e^{pi(V+U)+qi(v-\omega)}$$

suivant les multiples de V′ et de $(v' - \omega')$. Ces deux conversions étant tout-à-fait semblables, nous ne nous occuperons que de la seconde.

Quant au second facteur de l'expression dont il s'agit, on parvient immédiatement à son développement en vertu de l'équation (19); celui du premier facteur, qu'on peut mettre sous la forme

$$e^{pi(v-\omega-H)} = e^{pi(v'-\omega'+\varepsilon H)},$$

s'obtient en utilisant l'équation (25′). On conclut ainsi, en admettant la formule

$$(31) \qquad e^{pi(V+U)+qi(v-\omega)} = P'_{p,q}e^{qi(V'+U')} + P'_{p,q+1}e^{(q+1)i(V'+U')} + \dots$$
$$+ P'_{p,q-1}e^{(q-1)i(V'+U')} + \dots,$$

l'expression suivante des fonctions $P'_{p,q+k}$, k étant un entier positif ou négatif:

$$(32) \qquad P'_{p,q+k} = e^{pi(v'-\omega')}\{E'_k H'_{q,q} + E'_{k-1} H'_{q,q+1} + E'_{k-2} H'_{q,q+2} + \dots$$
$$+ E'_{k+1} H'_{q,q-1} + E'_{k+2} H'_{q,q-2} + \dots\}.$$

Ensuite, si l'on introduit, dans la formule indiquée, les expressions des fonctions E' et H' selon les équations (26′) et (21′), et que l'on suppose:

$$(33) \qquad P'_{p,q+k} = e^{pi(v'-\omega')}\{S_0^{q,k}(\eta, \eta') + S_1^{q,k}(\eta, \eta')e^{i(v-\omega)} + S_2^{q,k}(\eta, \eta')e^{2i(v-\omega)} + \dots$$
$$+ S_{-1}^{q,k}(\eta, \eta')e^{-i(v-\omega)} + S_{-2}^{q,k}(\eta, \eta')e^{-2i(v-\omega)} + \dots\}$$

les fonctions $S_l^{q,k}$, l étant un nouvel entier, seront données au moyen de la formule

(34) $$S_l^{q,k}(\eta\,,\,\eta') =$$

$$D_l^{(k)}(\eta,\eta')\Sigma_0^{q,q}(\eta,\eta') + D_{l+1}^{(k)}(\eta,\eta')\Sigma_{-1}^{q,q}(\eta,\eta') + D_{l+2}^{(k)}(\eta,\eta')\Sigma_{-2}^{q,q}(\eta,\eta') + \ldots$$

$$+ D_{l-1}^{(k)}(\eta,\eta')\Sigma_1^{q,q}(\eta,\eta') + D_{l-2}^{(k)}(\eta,\eta')\Sigma_2^{q,q}(\eta,\eta') + \ldots$$

$$+ D_l^{(k-1)}(\eta,\eta')\Sigma_0^{q,q+1}(\eta,\eta') + D_{l+1}^{(k-1)}(\eta,\eta')\Sigma_{-1}^{q,q+1}(\eta,\eta') + D_{l+2}^{(k-1)}(\eta,\eta')\Sigma_{-2}^{q,q+1}(\eta,\eta') + \ldots$$

$$+ D_{l-1}^{(k-1)}(\eta,\eta')\Sigma_1^{q,q+1}(\eta,\eta') + D_{l-2}^{(k-1)}(\eta,\eta')\Sigma_2^{q,q+1}(\eta,\eta') + \ldots$$

$$+ D_l^{(k+1)}(\eta,\eta')\Sigma_0^{q,q-1}(\eta,\eta') + D_{l+1}^{(k+1)}(\eta,\eta')\Sigma_{-1}^{q,q-1}(\eta,\eta') + D_{l+2}^{(k+1)}(\eta,\eta')\Sigma_{-2}^{q,q-1}(\eta,\eta') + \ldots$$

$$+ D_{l-1}^{(k+1)}(\eta,\eta')\Sigma_1^{q,q-1}(\eta,\eta') + D_{l-2}^{(k+1)}(\eta,\eta')\Sigma_2^{q,q-1}(\eta,\eta') + \ldots$$

$$+ D_l^{(k-2)}(\eta,\eta')\Sigma_0^{q,q+2}(\eta,\eta') + D_{l+1}^{(k-2)}(\eta,\eta')\Sigma_{-1}^{q,q+2}(\eta,\eta') + D_{l+2}^{(k-2)}(\eta,\eta')\Sigma_{-2}^{q,q+2}(\eta,\eta') + \ldots$$

$$+ D_{l-1}^{(k-2)}(\eta,\eta')\Sigma_1^{q,q+2}(\eta,\eta') + D_{l-2}^{(k-2)}(\eta,\eta')\Sigma_2^{q,q+2}(\eta,\eta') + \ldots$$

$$+ \ldots\ldots$$

Pour mettre en évidence le facteur exponentiel, on devra introduire, dans la formule précédente, les valeurs des fonctions $D(\eta\,,\,\eta')$ et $\Sigma(\eta\,,\,\eta)$, telles qu'on les obtient en vertu des équations (27') et (20), en y mettant des valeurs spéciales au lieu des indices r, s, m, μ et ν. On parvient ainsi à un résultat de la forme générale

(35) $$S_l^{q,k}(\eta\,,\,\eta') = (-1)^k\eta^{q}\eta'^{k}e^{[illegible]}R_{k,l}^{(q)}(\eta\,,\,\eta'),$$

$R(\eta\,,\,\eta')$ étant un développement suivant les puissances ascendantes de η^2 et de η'^2. Je ne juge pas, toutefois, nécessaire de chercher les coefficients de ces développements, en les représentant au moyen des formules générales, vu qu'on les obtient assez aisément par des procédés purement numériques, tandis que leurs expressions algébriques seraient très compliquées.

Par des considérations tout à fait semblables aux précédentes, ou bien, en changeant η en η', η' en η, etc., dans les formules (31)—(35), on obtient les expressions suivantes que je mets en évidence, seulement pour fixer les notations à employer:

$$(31') \qquad e^{pi(V+U)+qi(v-\omega)} = P_{p,q}e^{qi(V+U)} + P_{p,q+1}e^{(q+1)i(V+U)} + \ldots$$
$$+ P_{p,q-1}e^{(q-1)i(V+U)} + \ldots,$$

$$(33') \qquad P_{p,q+k} = e^{pi(v-\omega)}\{S_0^{q,k}(\eta', \eta) + S_1^{q,k}(\eta', \eta)e^{i(v-\omega)} + \ldots$$
$$+ S_{-1}^{q,k}(\eta', \eta)e^{-i(v-\omega)} + \ldots\},$$

$$(35') \qquad S_l^{q,k}(\eta', \eta) = (-1)^k \eta^l \eta'^k e^{-li(\pi-\Gamma)-ki(\pi'-\Gamma')} R_{k,l}^{(q)}(\eta', \eta).$$

45. Je vais aborder un dernier problème appartenant aux matières du chapitre présent, savoir le développement de l'exponentielle

$$e^{mi(V+U)}$$

suivant les arguments $G + \pi - \Gamma$ et $G' + \pi' - \Gamma'$.

On parvient assez facilement à la résolution de ce problème en considérant les relations

$$V + U = v' - \omega' - H,$$
$$v' - \omega' = G' + \pi' - \Gamma' + F' - G',$$
$$- H = \varphi(F - G) - (F' - G')$$

En effet, la somme de ces égalités donne tout d'abord:

$$V + U = G' + \pi' - \Gamma' + \varphi(F - G),$$

d'où l'on conclut ensuite:

$$(36) \qquad e^{im(V+U)} = e^{mi(G'+\pi'-\Gamma')}\{X_0^{(m\varphi)}(\eta) + X_1^{(m\varphi)}(\eta)e^{-i(\pi-\Gamma)+i(G+\pi-\Gamma)} + \ldots$$
$$+ X_{-1}^{(m\varphi)}(\eta)e^{i(\pi-\Gamma)-i(G+\pi-\Gamma)} + \ldots\},$$

ce qui est, évidemment, le développement cherché.

On trouve également la formule analogue

$$(36') \qquad e^{mi(V+U)} = e^{mi(G+\pi-\Gamma)}\{X_0^{(m\varphi')}(\eta') + X_1^{(m\varphi')}(\eta')e^{-i(\pi'-\Gamma')+i(G'+\pi'-\Gamma')} + \ldots$$
$$+ X_{-1}^{(m\varphi')}(\eta')e^{i(\pi'-\Gamma')-i(G'+\pi'-\Gamma')} + \ldots\};$$

et en vertu des expressions signalées on déduira, eu égard aux équations

(9) et (9'), les développements des fonctions $e^{i(m(V+\Gamma)+n(\Gamma-\omega))}$ et $e^{i(m(V'+\Gamma')+n(\Gamma'-\omega'))}$ suivant les arguments $G+\pi-\Gamma$ et $G'+\pi'-\Gamma'$.

Finalement, je mentionnerai l'expression

$$(37)\qquad \begin{aligned} e^{-i\alpha H} = \Big\{ & X_0^{(\lambda)}(\eta) + X_1^{(\lambda)}(\eta) e^{-i(\pi-\Gamma)+i(G+\pi-\Gamma)} + \dots \\ & + X_{-1}^{(\lambda)}(\eta) e^{i(\pi-\Gamma)-i(G+\pi-\Gamma)} + \dots \Big\} \\ \times \Big\{ & X_0^{(\alpha)}(\eta') + X_{-1}^{(\alpha)}(\eta') e^{-i(\pi'-\Gamma')+i(G'+\pi'-\Gamma')} + \dots \\ & + X_1^{(\alpha)}(\eta') e^{i(\pi'-\Gamma')-i(G'+\pi'-\Gamma')} + \dots \Big\}, \end{aligned}$$

qui dérive, immédiatement, de la définition, et où l'on a placé λ au lieu du produit $\alpha\varphi$. On en tire, en remplaçant α par $\alpha\varphi'$, et en désignant le nouveau produit $\alpha\varphi'$ par λ':

$$(38)\qquad \begin{aligned} e^{i\alpha H} = \Big\{ & X_0^{(\alpha)}(\eta) + X_1^{(\alpha)}(\eta) e^{-i(\pi-\Gamma)+i(G+\pi-\Gamma)} + \dots \\ & + X_{-1}^{(\alpha)}(\eta) e^{i(\pi-\Gamma)-i(G+\pi-\Gamma)} + \dots \Big\} \\ \times \Big\{ & X_0^{(\lambda')}(\eta') + X_{-1}^{(\lambda')}(\eta') e^{-i(\pi'-\Gamma')+i(G'+\pi'-\Gamma')} + \dots \\ & + X_1^{(\lambda')}(\eta') e^{i(\pi'-\Gamma')-i(G'+\pi'-\Gamma')} + \dots \Big\}, \end{aligned}$$

développement qu'on pourrait d'ailleurs trouver en changeant, dans l'équation (37), α en $-\alpha$, η en η', φ en φ', etc.

46. La dérivée de la fonction H par rapport à une des variables v ou v' s'exprime d'une manière remarquable qui mérite d'être mentionnée. Pour y parvenir, rappelons-nous les relations

$$G + \pi = (1-\varsigma)(n\zeta + X) + A; \qquad F + \pi = v - \varsigma(v - A),$$

d'où il vient:

$$G - F = (1-\varsigma)(n\zeta - v + X + A).$$

Avec cette expression et l'expression analogue de $G' - F'$, on déduit la valeur suivante de la fonction H:

$$H = \varphi(1-\varsigma)(n\zeta - v + X + A) - (1-\varsigma')(n'\zeta' - v' + X' + A'),$$

d'où l'on tire par différentiation

$$\frac{dH}{dv} = \varphi(1-\varsigma)\frac{dv}{dv}\left(\frac{n\,d\zeta}{dv} - 1 + \frac{dX}{dv}\right) - (1-\varsigma')\left(\frac{n'\,d\zeta'}{dv} - 1 + \frac{dX'}{dv}\right).$$

Le rapport $\frac{dv'}{dv}$, qu'il faut remplacer par son expression en termes connus, s'obtient de l'équation (13'). On en tire, en effet:

(39)
$$\frac{dv'}{dv} = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{1-\varsigma}\left(\frac{dH'}{dv'} + \frac{dU'}{dv'}\right)$$
$$= \frac{1}{\mu} - \frac{\varsigma}{1-\varsigma}\left(\frac{dH}{dv} + \frac{dU}{dv}\right),$$

et si l'on porte cette valeur dans l'équation précédente, on obtiendra, en considérant la valeur

$$\frac{\varsigma(1-\varsigma)}{\mu} = 1 - \varsigma',$$

l'équation que voici:

$$\frac{dH}{dv} = (1-\varsigma')\left\{\frac{n\,d\zeta}{dv} - 1 + \frac{dX}{dv} - \left(\frac{n'\,d\zeta'}{dv'} - 1 + \frac{dX'}{dv'}\right)\right\}$$
$$- \left(\frac{n\,d\zeta}{dv} - 1 + \frac{dX}{dv}\right)\left(\frac{dH}{dv} + \frac{dU}{dv}\right).$$

Mais en vertu des notations qu'on a employées dans les n°s 25 et 26, on aura, en écrivant:

$$\rho = \eta \cos F; \qquad \rho' = \eta' \cos F',$$

les valeurs

$$\frac{n\,d\zeta}{dv} = \frac{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\rho)^2}; \qquad \frac{n'\,d\zeta'}{dv'} = \frac{(1-\eta'^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\rho')^2}.$$

En les introduisant dans l'équation précédente, on parvient au résultat

(40)
$$\frac{1}{1-\varsigma}\frac{dH}{dv} = -\frac{\varsigma}{1-\varsigma}\frac{dH'}{dv'}$$
$$= \frac{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\rho)^2} - \frac{(1-\eta'^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\rho')^2} + \frac{d(X-X')}{dv}$$
$$- \left(\frac{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\rho)^2} - 1 + \frac{dX}{dv}\right)\left(\frac{dH}{dv} + \frac{dU'}{dv'}\right),$$

duquel on tire, sans peine, l'expression de $\frac{dH}{dv}$ ou bien celle de $\frac{dH'}{dv'}$. En

négligeant les termes dépendant des fonctions X, X' et U, ainsi que le produit de $\frac{dH}{dv}$ par ς', termes qui réellement sont peu considérables, on retient:

$$(41) \qquad \frac{dH'}{dr} - \mu\frac{dH}{dr} = -\left\{\left(\frac{1-\eta'^2}{1-\eta^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1+\rho'}{1+\rho}\right)^2 - 1\right\}$$

On aura de même:

$$(41') \qquad \frac{dH'}{dr} - \frac{1}{\mu}\frac{dH}{dr} = -\left\{\left(\frac{1-\eta^2}{1-\eta'^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1+\rho}{1+\rho'}\right)^2 - 1\right\}$$

Ces deux équations pourront, dans certaines occasions, être assez utiles.

CHAPITRE II.

Expressions se rapportant à l'angle entre les rayons vecteurs de deux planètes.

47. L'angle que forment les rayons vecteurs simultanés de deux planètes s'exprime d'abord par les coordonnées rectangulaires de ces astres, ces coordonnées ayant la même origine que les coordonnées polaires. En effet, soient x, y, z les coordonnées rectangulaires, rapportées à des axes fixes dans l'espace, et r le rayon vecteur d'une planète; x', y', z' et r', les coordonnées rectangulaires et le rayon vecteur d'une autre; soit enfin H l'angle compris entre r et r', le cosinus de cet angle sera alors donné par la formule

$$(1) \qquad \cos H = \frac{xx' + yy' + zz'}{rr'}.$$

En utilisant toujours les notations du n° 19, et en désignant par l' et b' la longitude et la latitude de la seconde planète, ainsi que par $\mathfrak{z}'$ le sinus de la latitude, l'expression signalée prend la forme

$$(2) \qquad \cos H = \cos b \cos b' \cos l \cos l' + \cos b \cos b' \sin l \sin l' + \mathfrak{z}\mathfrak{z}'.$$

Maintenant, si l'on reprend les équations (33) du n° 32, ainsi que l'équation (49) du n° 23, et qu'on établisse de pareilles équations se rapportant à la seconde planète, en désignant par v', f', I', etc. les quantités y relatives, on parviendra, après la substitution, dans l'équation (2), des valeurs mentionnées, à un résultat de la forme

$$(3) \qquad \cos H = \cos(\mathrm{v} - \mathrm{v}') + \mathrm{h},$$

où l'on a supposé:

$$(4) \qquad \mathrm{h} = \mathrm{h}_0 + \mathrm{h}_1((\zeta)) + \mathrm{h}'_1((\zeta')) + \mathrm{h}_2((\zeta))((\zeta')),$$

les coefficients h_0, h_1, h'_1 et h_2 étant donnés par les formules que voici:

$$(5,a)\quad h_0 = -\frac{1}{4}(1+f)I^2[\cos(v-v') - \cos(v+v'-2(\vartheta_1 - G))]$$
$$-\frac{1}{4}(1+f')I'^2[\cos(v-v') - \cos(v+v'-2(\vartheta'_1 - G'))]$$
$$+\frac{1}{2}II'[\cos(v-v'-(\vartheta_1-\vartheta')+G-G')$$
$$-\cos(v+v'-(\vartheta_1+\vartheta')+G+G')]$$
$$+\frac{1}{16}(1+f)(1+f')I^2I'^2\{\cos(v-v') - \cos(v+v'-2(\vartheta_1-G))$$
$$-\cos(v+v'-2(\vartheta'_1-G'))$$
$$+\cos(v-v'-2(\vartheta_1-\vartheta'_1-G+G'))\},$$

$$(5,b)\quad h_1 = \frac{1}{2}(1+f)I\sin(v-v')\sin(v-\vartheta_1+G)$$
$$-\frac{1}{8}(1+f)(1+f')II'^2[\sin(v-v')$$
$$-\sin(v+v'-2(\vartheta'_1-G'))]\sin(v-\vartheta_1+G),$$

$$(5,c)\quad h'_1 = -\frac{1}{2}(1+f')I'\sin(v-v')\sin(v'-\vartheta'_1+G')$$
$$+\frac{1}{8}(1+f)(1+f')I^2I'[\sin(v-v')$$
$$+\sin(v+v'-2(\vartheta_1-G))]\sin(v'-\vartheta'_1+G'),$$

$$(5,d)\quad h_2 = \frac{1}{4}(1+f)(1+f')II'\cos(v-v')\sin(v-\vartheta_1+G)\sin(v'-\vartheta'_1+G').$$

Avec l'expression de h_0 que nous venons de signaler, on déduit les suivantes:

$$(6,a)\quad h_0^2 = \frac{1}{16}\{(1+f)^2I^4 + (1+f')I'^4 + (4+(1+f)(1+f'))I^2I'^2$$
$$-\frac{1}{2}(1+f)(1+f')I^2I'^2((1+f)I^2+(1+f')I'^2)\}$$
$$-\frac{1}{8}II'\{2(1+f)I^2 + 2(1+f')I'^2$$
$$-\frac{1}{2}(1+f)(1+f')I^2I'^2\}\cos(\vartheta_1 - G - (\vartheta'_1 - G'))$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$+\tfrac{1}{16}(1+\mathrm{f})(1+\mathrm{f}')I^2I'^2\cos 2(\vartheta_1-G-(\vartheta_1'-G'))$$

$$+\tfrac{1}{32}\Big\{((1+\mathrm{f})I^2+(1+\mathrm{f}')I'^2)^2$$

$$-\tfrac{1}{2}(1+\mathrm{f})(1+\mathrm{f}')I^2I'^2((1+\mathrm{f})I^2+(1+\mathrm{f}')I'^2)\Big\}\cos 2(\mathrm{v}-\mathrm{v}')$$

$$+\tfrac{1}{32}(1+\mathrm{f})^2I^4\left(1-\tfrac{1}{2}(1+\mathrm{f}')I'^2\right)\cos 2(\mathrm{v}+\mathrm{v}'-2(\vartheta_1-G))$$

$$+\tfrac{1}{32}(1+\mathrm{f}')^2I'^4\left(1-\tfrac{1}{2}(1+\mathrm{f})I^2\right)\cos 2(\mathrm{v}+\mathrm{v}'-2(\vartheta_1'-G'))$$

$$-\tfrac{1}{16}\Big\{(1+\mathrm{f})^2I^4+(4+(1+\mathrm{f})(1+\mathrm{f}'))I^2I'^2$$

$$-\tfrac{1}{2}(1+\mathrm{f})^2(1+\mathrm{f}')I^4I'^2\Big\}\cos 2(\mathrm{v}-\vartheta_1+G)$$

$$-\tfrac{1}{16}\Big\{(1+\mathrm{f})^2I^4$$

$$+(1+\mathrm{f})(1+\mathrm{f}')I^2I'^2\left(1-\tfrac{1}{2}(1+\mathrm{f})I^2-\tfrac{1}{4}(1+\mathrm{f}')I'^2\right)\Big\}\cos 2(\mathrm{v}'-\vartheta_1+G)$$

$$-\tfrac{1}{16}\Big\{(1+\mathrm{f}')^2I'^4$$

$$+(1+\mathrm{f})(1+\mathrm{f}')I^2I'^2\left(1-\tfrac{1}{2}(1+\mathrm{f}')I'^2-\tfrac{1}{4}(1+\mathrm{f})I^2\right)\Big\}\cos 2(\mathrm{v}-\vartheta_1'+G')$$

$$-\tfrac{1}{16}\Big\{(1+\mathrm{f}')^2I'^4+(4+(1+\mathrm{f})(1+\mathrm{f}'))I^2I'^2$$

$$-\tfrac{1}{2}(1+\mathrm{f})(1+\mathrm{f}')^2I^2I'^4\Big\}\cos 2(\mathrm{v}'-\vartheta_1'+G')$$

$$+\tfrac{1}{64}I^2I'^2\Big\{8+(1+\mathrm{f})(1+\mathrm{f}')((1+\mathrm{f})I^2+(1+\mathrm{f}')I'^2)\Big\}\cos 2(\mathrm{v}-\mathrm{v}'-(\vartheta_1-G)+\vartheta_1'-G')$$

$$+\tfrac{1}{64}I^2I'^2\Big\{8+(1+\mathrm{f})(1+\mathrm{f}')(4-(1+\mathrm{f})I^2+(1+\mathrm{f}')I'^2)\Big\}\cos 2(\mathrm{v}+\mathrm{v}'-(\vartheta_1-G)-(\vartheta_1'-G'))$$

$$-\tfrac{1}{32}II'\Big\{4(1+\mathrm{f})I^2+4(1+\mathrm{f}')I'^2$$

$$-(1+\mathrm{f})(1+\mathrm{f}')I^2I'^2\Big\}\cos\left(2(\mathrm{v}-\mathrm{v}')-(\vartheta_1-G)+\vartheta_1'-G'\right)$$

$$+\tfrac{1}{16}II'\Big\{2(1+\mathrm{f})I^2+4(1+\mathrm{f}')I'^2$$

$$-(1+\mathrm{f})(1+\mathrm{f}')I^2I'^2\Big\}\cos\left(2\mathrm{v}-(\vartheta_1-G)-(\vartheta_1'-G')\right)$$

$$+\tfrac{1}{16}II'\Big\{4(1+\mathrm{f})I^2+2(1+\mathrm{f}')I'^2$$

$$-(1+\mathrm{f})(1+\mathrm{f}')I^2I'^2\Big\}\cos\left(2\mathrm{v}'-(\vartheta_1-G)-(\vartheta_1'-G')\right)$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$\frac{1}{64}(1+\mathrm{f})^2(1+\mathrm{f}')I^4I'^2\cos(2v - 2(\theta_1 - G) + \theta'_1 - G')$$

$$-\frac{1}{64}(1+\mathrm{f})(1+\mathrm{f}')^2I^2I'^4\cos(2v' + \theta_1 - G - 2(\theta'_1 - G'))$$

$$+\frac{1}{8}(1+\mathrm{f})I^3I'\cos(2v - 3(\theta_1 - G) + \theta'_1 - G')$$

$$+\frac{1}{8}(1+\mathrm{f}')II'^3\cos(2v' + \theta_1 - G - 3(\theta'_1 - G'))$$

$$-\frac{1}{32}(1+\mathrm{f})I^3I'\{4-(1+\mathrm{f}')I'^2\}\cos(2(v+v') - 3(\theta_1 - G) - (\theta'_1 - G'))$$

$$-\frac{1}{32}(1+\mathrm{f}')II'^3\{4-(1+\mathrm{f})I^2\}\cos(2(v+v') - (\theta_1 - G) - 3(\theta'_1 - G')),$$

$$(6, b)\quad h_0^3 = -\frac{3}{256}\{3I^6 + 29I^4I'^2 + 29I^2I'^4 + 3I'^6\}\cos(v - v')$$

$$+\frac{3}{64}II'\{3I^4+10I^2I'^2+3I'^4\}\cos(v - v' - (\theta_1 - G) + (\theta'_1 - G'))$$

$$-\frac{21}{128}I^2I'^2(I^2+I'^2)\cos(v - v' - 2(\theta_1 - G) + 2(\theta'_1 - G'))$$

$$-\frac{3}{128}I^2I'^2(I^2+I'^2)\cos(v - v' + 2(\theta_1 - G) - 2(\theta'_1 - G'))$$

$$+\frac{3}{128}II'\{3I^4+8I^2I'^2+3I'^4\}\cos(v - v' + \theta_1 - G - (\theta'_1 - G'))$$

$$+\frac{3}{64}I^3I'^3\cos(v - v' - 3(\theta_1 - G) + 3(\theta'_1 - G'))$$

$$-\frac{3}{64}II'\{3I^4+11I^2I'^2+3I'^4\}\cos(v + v' - (\theta_1 - G) - (\theta'_1 - G'))$$

$$+\frac{3}{256}I^2(3I^4 + 28I^2I'^2 + 16I'^4)\cos(v + v' - 2(\theta_1 - G))$$

$$+\frac{3}{256}I'^2(16I^4 + 28I^2I'^2 + 3I'^4)\cos(v + v' - 2(\theta'_1 - G'))$$

$$+\frac{3}{256}I^4I'^2\cos(v + v' - 4(\theta_1 - G) + 2(\theta'_1 - G'))$$

$$+\frac{3}{256}I^2I'^4\cos(v + v' + 2(\theta_1 - G) - 4(\theta'_1 - G'))$$

$$-\frac{3}{128}I^3I'\{3I^2 + 4I'^2\}\cos(v + v' - 3(\theta_1 - G) + (\theta'_1 - G'))$$

$$-\frac{3}{128}II'^3\{4I^2 + 3I'^2\}\cos(v + v' + \theta_1 - G - 3(\theta'_1 - G'))$$

$$-\frac{1}{256}\{I^6 + 3I^4I'^2 + 3I^2I'^4 + I'^6\}\cos 3(v - v')$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$+\frac{3}{128} II'\{I^4 + 2I^2I'^2 + I'^4\}\cos(3(v - v') - (\vartheta_1 - G) + \vartheta'_1 - G')$$

$$-\frac{3}{64} I^2I'^2(I^2 + I'^2)\cos(3(v - v') - 2(\vartheta_1 - G) + 2(\vartheta'_1 - G'))$$

$$+\frac{1}{32} I^3I'^3\cos(3(v - v') - 3(\vartheta_1 - G) + 3(\vartheta'_1 - G'))$$

$$+\frac{3}{256} I^2(I^4 + 2I^2I'^2 + I'^4)\cos(v - 3v' + 2(\vartheta_1 - G))$$

$$+\frac{3}{256} I'^2(13I^4 + 10I^2I'^2 + I'^4)\cos(v - 3v' + 2(\vartheta'_1 - G'))$$

$$-\frac{3}{128} II'\{3I^4 + 4I^2I'^2 + I'^4\}\cos(v - 3v' + \vartheta_1 - G + \vartheta'_1 - G')$$

$$+\frac{3}{64} I^2I'^4\cos(v - 3v' - 2(\vartheta_1 - G) + 4(\vartheta'_1 - G'))$$

$$-\frac{3}{64} II'^3\{3I^2 + I'^2\}\cos(v - 3v' - (\vartheta_1 - G) + 3(\vartheta'_1 - G'))$$

$$+\frac{3}{256} I'^2(I^4 + 2I^2I'^2 + I'^4)\cos(3v - v' - 2(\vartheta'_1 - G'))$$

$$+\frac{3}{256} I^2(I^4 + 10I^2I'^2 + 13I'^4)\cos(3v - v' - 2(\vartheta_1 - G))$$

$$-\frac{3}{128} II'\{I^4 + 4I^2I'^2 + I'^4\}\cos(3v - v' - (\vartheta_1 - G) - (\vartheta'_1 - G'))$$

$$+\frac{3}{64} I^4I'^2\cos(3v - v' - 4(\vartheta_1 - G) + 2(\vartheta'_1 - G'))$$

$$-\frac{3}{64} I^3I'\{I^2 + 3I'^2\}\cos(3v - v' - 3(\vartheta_1 - G) + \vartheta'_1 - G')$$

$$-\frac{3}{256} I^4(I^2 + I'^2)\cos(v + 3v' - 4(\vartheta_1 - G))$$

$$-\frac{3}{256} I'^4(9I^2 + I'^2)\cos(v + 3v' - 4(\vartheta'_1 - G'))$$

$$+\frac{3}{128} I^3I'(3I^2 + 2I'^2)\cos(v + 3v' - 3(\vartheta_1 - G) - (\vartheta'_1 - G'))$$

$$+\frac{3}{128} II'^5\cos(v + 3v' + \vartheta_1 - G - 5(\vartheta'_1 - G'))$$

$$-\frac{3}{128} I^2I'^2(7I^2 + 3I'^2)\cos(v + 3v' - 2(\vartheta_1 - G) - 2(\vartheta'_1 - G'))$$

$$+\frac{3}{64} II'^3\{4I^2 + I'^2\}\cos(v + 3v' - (\vartheta_1 - G) - 3(\vartheta'_1 - G'))$$

$$-\frac{3}{256} I^4(I^2 + 9I'^2)\cos(3v + v' - 4(\vartheta_1 - G))$$

(Cette formule se continue à la page suivante.)

$$- \tfrac{3}{256} I'^4 (I^2 + I'^2) \cos(3v + v' - 4(\vartheta_1' - G'))$$

$$+ \tfrac{3}{128} I^5 I' \cos(3v + v' - 5(\vartheta_1 - G) + \vartheta_1' - G')$$

$$+ \tfrac{3}{128} II'^3 (2I^2 + 3I'^2) \cos(3v + v' - (\vartheta_1 - G) - 3(\vartheta_1' - G'))$$

$$- \tfrac{3}{128} I^2 I'^2 (3I^2 + 7I'^2) \cos(3v + v' - 2(\vartheta_1 - G) - 2(\vartheta_1' - G'))$$

$$+ \tfrac{3}{64} I^3 I' \{I^2 + 4I'^2\} \cos(3v + v' - 3(\vartheta_1 - G) - (\vartheta_1' - G'))$$

$$+ \tfrac{1}{256} I^6 \cos(3(v + v') - 6(\vartheta_1 - G))$$

$$+ \tfrac{1}{256} I'^6 \cos(3(v + v') - 6(\vartheta_1' - G'))$$

$$+ \tfrac{15}{256} I^4 I'^2 \cos(3(v + v') - 4(\vartheta_1 - G) - 2(\vartheta_1' - G'))$$

$$- \tfrac{3}{128} I^5 I' \cos(3(v + v') - 5(\vartheta_1 - G) - (\vartheta_1' - G'))$$

$$- \tfrac{3}{128} II'^5 \cos(3(v + v') - (\vartheta_1 - G) - 5(\vartheta_1' - G'))$$

$$+ \tfrac{15}{256} I^2 I'^4 \cos(3(v + v') - 2(\vartheta_1 - G) - 4(\vartheta_1' - G'))$$

$$- \tfrac{5}{64} I^3 I'^3 \cos(3(v + v') - 3(\vartheta_1 - G) - 3(\vartheta_1' - G')).$$

Dans cette dernière expression, dont chaque terme est du sixième degré, on a mis l'unité au lieu des facteurs $1 + \mathrm{f}$ et $1 + \mathrm{f}'$, vu que les quantités f et f' sont du deuxième degré et que nous omettons généralement les termes d'un degré plus élevé que le sixième.

On aurait pu encore, dans l'expression de h_0^3, changer v et v' en v et v', et supprimer les quantités G et G', parce qu'elles sont du deuxième degré. C'est pour garder l'uniformité des arguments que j'ai évité un tel changement, du reste sans importance.

48. Après avoir obtenu les expressions de h_0, h_0^2 et h_0^3, nous passons à chercher le développement de la fonction $\cos n\mathrm{H}$, n étant un nombre entier.

D'abord, si n est un nombre pair, on exprimera la fonction dont il s'agit moyennant la formule

$$\cos nH = 1 - \frac{n^2}{1.2} \sin H^2 + \frac{n^2(n^2 - 2^2)}{1.2.3.4} \sin H^4 - \ldots;$$

et si l'on y introduit la valeur

$$\sin H^2 = \sin(\mathrm{v} - \mathrm{v}')^2 - 2\mathrm{h}\cos(\mathrm{v} - \mathrm{v}') - \mathrm{h}^2,$$

qui dérive immédiatement de l'équation (3), il viendra:

$$\begin{aligned}\cos nH &= \cos n(\mathrm{v} - \mathrm{v}') \\ &\quad + \left\{ \frac{n^2}{1.2} - 2\frac{n^2(n^2-2^2)}{1.2.3.4}\sin(\mathrm{v}-\mathrm{v}')^2 \right. \\ &\qquad \left. + 3\frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{1.2.3.4.5.6}\sin(\mathrm{v}-\mathrm{v}')^4 - \ldots \right\}\{2\mathrm{h}\cos(\mathrm{v}-\mathrm{v}') + \mathrm{h}^2\} \\ &\quad + \ldots\end{aligned}$$

Evidemment, on pourrait de cette formule tirer les coefficients des diverses puissances de $-(2\mathrm{h}\cos(\mathrm{v}-\mathrm{v}') + \mathrm{h}^2)$ sous forme d'agrégats périodiques ne dépendant pas d'autres arguments que des multiples du seul angle $\mathrm{v} - \mathrm{v}'$; mais on y parvient plus promptement de la manière suivante.

Il est aisé de voir que, si l'on désigne $\sin H^2$ par x, la formule précédente peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned}\cos nH = \cos n(\mathrm{v} - \mathrm{v}') - \frac{d\cos nH}{dx}(2\mathrm{h}\cos(\mathrm{v}-\mathrm{v}') + \mathrm{h}^2) \\ + \frac{1}{1.2}\frac{d^2\cos nH}{dx^2}(2\mathrm{h}\cos(\mathrm{v}-\mathrm{v}') + \mathrm{h}^2)^2 - \ldots,\end{aligned}$$

sous réserve, toutefois, qu'après avoir opéré les différentiations demandées, on remplace H par $\mathrm{v} - \mathrm{v}'$.

Or, la première dérivée de $\cos n\mathrm{H}$ par rapport à x s'exprime moyennant la formule

$$\frac{d\cos nH}{dx} = -n\frac{\sin nH}{\sin 2H},$$

d'où l'on conclut, si l'on écrit $2m$ au lieu de n et que m soit un nombre impair:

$$\frac{d\cos 2mH}{dx} = -2m\{1 + 2\cos 4H + 2\cos 8H + \ldots + 2\cos 2(m-1)H\};$$

dans le cas opposé, savoir si m est un nombre pair, l'expression de notre dérivée devient:

$$\frac{d \cos 2mH}{dx} = -4m\{\cos 2H + \cos 6H + \ldots + \cos 2(m-1)H\}$$

On est donc arrivé à exprimer la fonction $\cos nH$, en tant qu'elle dépend de la première puissance de h, et dans le cas d'une valeur paire du nombre n.

En différentiant, par rapport à x, les équations dernièrement obtenues, et en remplaçant les termes se produisant dans les seconds membres, par leurs expressions tirées des équations mentionnées elles-mêmes, il résultera:

a) m étant un nombre pair,

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \cos 2mH}{dx^2} = \; & 8m(1 + 3 + 5 + \ldots + m - 1) \\ & + 16m(3 + 5 + \ldots + m - 1) \cos 4H \\ & + 16m(5 + \ldots + m - 1) \cos 8H \\ & + \ldots \\ & + 16m(m-1) \cos 2(m-2)H;\end{aligned}$$

b) m étant un nombre impair;

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \cos 2mH}{dx^2} = \; & 16m(2 + 4 + 6 + \ldots + m - 1) \cos 2H \\ & + 16m(4 + 6 + \ldots + m - 1) \cos 6H \\ & + \ldots \\ & + 16m(m-1) \cos 2(m-2)H\end{aligned}$$

Rien n'empêche de continuer ces formules, les déduisant par des opérations successives. Cependant, les dérivées supérieures devenant assez compliquées, je n'ai pas jugé convenable de poursuivre leur développement.

C'est de même quant aux dites fonctions appartenant aux valeurs impaires de n. Bien qu'on ait, n étant un nombre impair:

$$\cos nH = \cos H \left\{ 1 - \frac{n^2 - 1^2}{1 . 2} \sin H^2 + \frac{(n^2 - 1^2)(n^2 - 3^2)}{1 . 2 . 3 . 4} \sin H^4 - \ldots \right\},$$

et qu'on en puisse déduire un résultat de la forme

$$\cos nH = \cos n(\mathrm{v} - \mathrm{v}') + \left\{ 1 - \frac{n^2 - 1^2}{1 \cdot 2} \sin(\mathrm{v} - \mathrm{v}')^2 + \ldots \right\} \mathrm{h}$$
$$+ \left\{ \frac{n^2 - 1^2}{1 \cdot 2} - 2 \frac{(n^2 - 1^2)(n^2 - 2^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \sin(\mathrm{v} - \mathrm{v}')^2 + \ldots \right\} 2\mathrm{h} \cos(\mathrm{v} - \mathrm{v}')^2$$
$$+ \ldots,$$

les opérations algébriques pour mettre en évidence, sous forme d'agrégats périodiques, les coefficients des diverses puissances de h, seraient assez laborieuses, notamment si n était un grand nombre. La méthode que je viens d'indiquer pour le développement des fonctions dont il s'agit, n'est donc pas, à tout égard, satisfaisante, bien qu'elle en donne, très facilement, les premiers termes.[1]

Mais la complication, qui paraît inhérente à notre problème, ne tient pas autant à la nature des coefficients qu'il s'agit d'établir, qu'à la manière indiquée de les déterminer. En effet, si, au lieu de chercher ces coefficients par des formules algébriques, qui les donnent indépendamment, les uns des autres, on se sert d'un algorithme au moyen duquel on les déduit de proche en proche, les résultats s'obtiendront assez facilement, du moins si le nombre n n'est pas très grand. C'est par une telle méthode que nous allons résoudre, dans le numéro prochain, notre problème.

49. Admettons que la fonction $\cos nH$ soit donnée par le développement fini:

$$(7) \qquad \cos nH = \cos n(\mathrm{v} - \mathrm{v}') + \Psi_{n,1}\mathrm{h} + \Psi_{n,2}\mathrm{h}^2 + \ldots + \Psi_{n,n}\mathrm{h}^n,$$

les Ψ étant des fonctions dépendant uniquement de l'angle $\mathrm{v} - \mathrm{v}'$; en multipliant cette équation, membre par membre, par celle-ci:

$$\cos H = \cos(\mathrm{v} - \mathrm{v}') + \mathrm{h},$$

[1] On pourrait toutefois chercher les developpements demandés au moyen de la formule

$$\cos nH = (\cos nH)_{H=\mathrm{v}-\mathrm{v}'} + \frac{1}{1}\mathrm{h}\left(\frac{d \cos nH}{d \cos H}\right)_{H=\mathrm{v}-\mathrm{v}'} + \frac{1}{1 \cdot 2}\mathrm{h}^2\left(\frac{d^2 \cos nH}{(d \cos H)^2}\right)_{H=\mathrm{v}-\mathrm{v}'} + \ldots.$$

et on obtiendrait ainsi les coefficients des diverses puissances de h tout-à-fait identiques avec ceux qu'on va trouver dans le numéro prochain.

et en comparant le résultat avec les développements semblables de $\cos(n-1)H$ et de $\cos(n+1)H$, on parvient aux équations de condition que voici:

$$\begin{aligned}
\Psi_{n+1,1} + \Psi_{n-1,1} &= 2\cos n(v-v') + 2\Psi_{n,1}\cos(v-v'),\\
\Psi_{n+1,2} + \Psi_{n-1,2} &= 2\Psi_{n,1} + 2\Psi_{n,2}\cos(v-v'),\\
\Psi_{n+1,3} + \Psi_{n-1,3} &= 2\Psi_{n,2} + 2\Psi_{n,3}\cos(v-v'),\\
\ldots\quad & \quad\ldots\\
\Psi_{n+1,n-1} + \Psi_{n-1,n-1} &= 2\Psi_{n,n-2} + 2\Psi_{n,n-1}\cos(v-v'),\\
\Psi_{n+1,n} &= 2\Psi_{n,n-1} + 2\Psi_{n,n}\cos(v-v'),\\
\Psi_{n+1,n+1} &= 2\Psi_{n,n}.
\end{aligned}$$

Or, puisqu'on a, ce qui est facile à voir,

$$\Psi_{1,1} = 1;\qquad \Psi_{2,1} = 4\cos(v-v');\qquad \Psi_{2,2} = 2,$$

on formera sans difficulté les expressions suivantes:

$$\begin{aligned}
\Psi_{3,1} &= 3 + 6\cos 2(v-v'),\\
\Psi_{3,2} &= 12\cos(v-v'),\\
\Psi_{3,3} &= 4,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{4,1} &= 8\cos(v-v') + 8\cos 3(v-v'),\\
\Psi_{4,2} &= 16 + 24\cos 2(v-v'),\\
\Psi_{4,3} &= 32\cos(v-v'),\\
\Psi_{4,4} &= 8,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{5,1} &= 5 + 10\cos 2(v-v') + 10\cos 4(v-v'),\\
\Psi_{5,2} &= 60\cos(v-v') + 40\cos 3(v-v'),\\
\Psi_{5,3} &= 60 + 80\cos 2(v-v'),\\
\Psi_{5,4} &= 80\cos(v-v'),\\
\Psi_{5,5} &= 16,
\end{aligned}$$

$$\Psi_{6,1} = 12\cos(v - v') + 12\cos 3(v - v') + 12\cos 5(v - v'),$$

$$\Psi_{6,2} = 54 + 96\cos 2(v - v') + 60\cos 4(v - v'),$$

$$\Psi_{6,3} = 288\cos(v - v') + 160\cos 3(v - v'),$$

$$\Psi_{6,4} = 192 + 240\cos 2(v - v'),$$

$$\Psi_{6,5} = 192\cos(v - v'),$$

$$\Psi_{6,6} = 32,$$

$$\Psi_{7,1} = 7 + 14\cos 2(v - v') + 14\cos 4(v - v') + 14\cos 6(v - v'),$$

$$\Psi_{7,2} = 168\cos(v - v') + 140\cos 3(v - v') + 84\cos 5(v - v'),$$

. . . .

$$\Psi_{8,1} = 16\cos(v - v') + 16\cos 3(v - v') + 16\cos 5(v - v') + 16\cos 7(v - v'),$$

. . . .

$$\Psi_{9,1} = 9 + 18\cos 2(v - v') + 18\cos 4(v - v') + 18\cos 6(v - v') + 18\cos 8(v - v'),$$

. . . .

Il serait facile de continuer assez loin ces formules: cependant, les expressions signalées étant plus que suffisantes aux théories des planètes, je les arrête ici.

50. En introduisant, dans l'équation (7), les valeurs des $\Psi_{n,m}$ ainsi que les expressions des h^m que nous avons données dans le n° 47, on obtiendra les expressions des fonctions $\cos nH$; et puisqu'on a mis en évidence les expressions de h_0, h_0^2 et h_0^3, on aura, en négligeant les termes dépendant des fonctions $((\zeta))$ et $((\zeta'))$, qui sont de l'ordre des forces troublantes, les expressions des fonctions demandées contenant les termes du sixième degré inclusivement.

Mais dans les théories des planètes principales, il suffira généralement de ne considérer que les termes du degré zéro ainsi que ceux du deuxième degré par rapport aux fonctions anastématiques; ces termes, je les rassemblerai donc, séparément des autres, dans le tableau suivant, après

avoir remplacé ϑ_1 par $\vartheta + \Omega - \Theta$ et ϑ'_1 par $\vartheta' + \Omega' - \Theta'$ et, adopté les notations

$$\bar\vartheta - G = \vartheta; \qquad \bar\vartheta' - G' = \vartheta'$$

Voici les termes dont il s'agit:

$$\cos H = \left\{1 - \frac{1}{4}I^2 - \frac{1}{4}I'^2\right\}\cos(\mathrm{v} - \mathrm{v}')$$

$$+ \frac{1}{4}I^2\cos(\mathrm{v} + \mathrm{v}' - 2\vartheta - 2(\Omega - \Theta))$$

$$+ \frac{1}{4}I'^2\cos(\mathrm{v} + \mathrm{v}' - 2\vartheta' - 2(\Omega' - \Theta'))$$

$$+ \frac{1}{2}II'\cos(\mathrm{v} - \mathrm{v}' - (\bar\vartheta - \bar\vartheta') - (\Omega - \Theta) + \Omega' - \Theta')$$

$$- \frac{1}{2}II'\cos(\mathrm{v} + \mathrm{v}' - (\vartheta + \vartheta') - (\Omega - \Theta) - (\Omega' - \Theta')),$$

$$\cos 2H = -\frac{1}{2}I^2 - \frac{1}{2}I'^2$$

$$+ \left\{1 - \frac{1}{2}I^2 - \frac{1}{2}I'^2\right\}\cos 2(\mathrm{v} - \mathrm{v}')$$

$$+ \frac{1}{2}I^2\cos(2\mathrm{v} - 2\vartheta - 2(\Omega - \Theta))$$

$$+ \frac{1}{2}I'^2\cos(2\mathrm{v} - 2\vartheta' - 2(\Omega' - \Theta'))$$

$$+ \frac{1}{2}I^2\cos(2\mathrm{v}' - 2\bar\vartheta - 2(\Omega - \Theta))$$

$$+ \frac{1}{2}I'^2\cos(2\mathrm{v}' - 2\bar\vartheta' - 2(\Omega' - \Theta'))$$

$$+ II'\cos(2(\mathrm{v} - \mathrm{v}') - (\vartheta - \vartheta) - (\Omega - \Theta) + \Omega' - \Theta')$$

$$- II'\cos(2\mathrm{v} - (\vartheta + \vartheta') - (\Omega - \Theta) - (\Omega' - \Theta'))$$

$$- II'\cos(2\mathrm{v}' - (\vartheta + \vartheta') - (\Omega - \Theta) - (\Omega' - \Theta'))$$

$$+ II'\cos(\vartheta - \vartheta' + \Omega - \Theta - (\Omega' - \Theta')),$$

$$\cos 3H = -\tfrac{3}{2}(I^2 + I'^2)\cos(v - v')$$
$$+ \left\{1 - \tfrac{3}{4}I^2 - \tfrac{3}{4}I'^2\right\}\cos 3(v - v')$$
$$+ \tfrac{3}{4}I^2 \cos(v - 3v' + 2\vartheta + 2(\Omega - \Theta))$$
$$+ \tfrac{3}{4}I'^2 \cos(v - 3v' + 2\vartheta' + 2(\Omega' - \Theta'))$$
$$+ \tfrac{3}{4}I^2 \cos(3v - v' - 2\vartheta - 2(\Omega - \Theta))$$
$$+ \tfrac{3}{4}I'^2 \cos(3v - v' - 2\vartheta' - 2(\Omega' - \Theta'))$$
$$+ \tfrac{3}{4}I^2 \cos(v + v' - 2\vartheta - 2(\Omega - \Theta))$$
$$+ \tfrac{3}{4}I'^2 \cos(v + v' - 2\vartheta' - 2(\Omega' - \Theta'))$$
$$+ \tfrac{3}{2}II' \cos(v - v' - (\vartheta - \vartheta') - (\Omega - \Theta) + \Omega' - \Theta')$$
$$+ \tfrac{3}{2}II' \cos(v - v' + \vartheta - \vartheta' + \Omega - \Theta - (\Omega' - \Theta'))$$
$$+ \tfrac{3}{2}II' \cos(3(v - v') - (\vartheta - \vartheta') - (\Omega - \Theta) + \Omega' - \Theta')$$
$$- \tfrac{3}{2}II' \cos(v - 3v' + \vartheta + \vartheta' + \Omega - \Theta + \Omega' - \Theta')$$
$$- \tfrac{3}{2}II' \cos(3v - v' - \vartheta - \vartheta' - (\Omega - \Theta) - (\Omega' - \Theta'))$$
$$- \tfrac{3}{2}II' \cos(v + v' - \vartheta - \vartheta' - (\Omega - \Theta) - (\Omega' - \Theta')),$$

$$\cos 4H = I^2 - I'^2$$
$$- 2(I^2 + I'^2)\cos 2(v - v')$$
$$+ \left\{1 - I^2 - I'^2\right\}\cos 4(v - v')$$
$$+ I^2 \cos(2v - 2\vartheta - 2(\Omega - \Theta))$$
$$+ I'^2 \cos(2v - 2\vartheta' - 2(\Omega' - \Theta'))$$
$$+ I^2 \cos(2v - 4v' + 2\vartheta + 2(\Omega - \Theta))$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$+ I'^2 \cos(2v - 4v' + 2\vartheta' + 2(\Omega' - \Theta'))$$

$$+ I^2 \cos(4v - 2v' - 2\vartheta - 2(\Omega - \Theta))$$

$$+ I'^2 \cos(4v - 2v' - 2\vartheta' - 2(\Omega' - \Theta'))$$

$$+ I^2 \cos(2v' - 2\vartheta - 2(\Omega - \Theta))$$

$$+ I'^2 \cos(2v' - 2\vartheta' - 2(\Omega' - \Theta'))$$

$$+ 2II' \cos(2(v - v') - (\vartheta - \vartheta') - (\Omega - \Theta) + \Omega' - \Theta')$$

$$+ 2II' \cos(4(v - v') - (\vartheta - \vartheta') - (\Omega - \Theta) + \Omega' - \Theta')$$

$$+ 2II' \cos(2(v - v') + \vartheta - \vartheta' + \Omega - \Theta - (\Omega' - \Theta'))$$

$$- 2II' \cos(2v - 4v' + \vartheta + \vartheta' + \Omega - \Theta + \Omega' - \Theta')$$

$$- 2II' \cos(4v - 2v' - (\vartheta + \vartheta') - (\Omega - \Theta) - (\Omega' - \Theta'))$$

$$- 2II' \cos(2v - (\vartheta + \vartheta') - (\Omega - \Theta) - (\Omega' - \Theta'))$$

$$- 2II' \cos(2v' - (\vartheta + \vartheta') - (\Omega - \Theta) - (\Omega' - \Theta'))$$

$$+ 2II' \cos(\vartheta - \vartheta' + \Omega - \Theta - (\Omega' - \Theta')).$$

$$\cos 5H = -\tfrac{5}{2}(I^2 + I'^2)\cos(v - v')$$

$$-\tfrac{5}{2}(I^2 + I'^2)\cos 3(v - v')$$

$$+\left\{1 - \tfrac{5}{4}I^2 - \tfrac{5}{4}I'^2\right\}\cos 5(v - v')$$

$$+\tfrac{5}{4}I^2 \cos(v - 3v' + 2\vartheta + 2(\Omega - \Theta))$$

$$+\tfrac{5}{4}I'^2 \cos(v - 3v' + 2\vartheta' + 2(\Omega' - \Theta'))$$

$$+\tfrac{5}{4}I^2 \cos(3v - v' - 2\vartheta - 2(\Omega - \Theta))$$

$$+\tfrac{5}{4}I'^2 \cos(3v - v' - 2\vartheta' - 2(\Omega' - \Theta'))$$

$$+\tfrac{5}{4}I^2 \cos(3v - 5v' + 2\vartheta + 2(\Omega - \Theta))$$

$$+\tfrac{5}{4}I'^2 \cos(3v - 5v' + 2\vartheta' + 2(\Omega' - \Theta'))$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$+ \frac{5}{4} I^2 \cos(5v - 3v' - 2\vartheta - 2(\Omega - \Theta))$$

$$+ \frac{5}{4} I'^2 \cos(5v - 3v' - 2\vartheta' - 2(\Omega' - \Theta'))$$

$$+ \frac{5}{4} I^2 \cos(v + v' - 2\vartheta - 2(\Omega - \Theta))$$

$$+ \frac{5}{4} I'^2 \cos(v + v' - 2\vartheta' - 2(\Omega' - \Theta'))$$

$$+ \frac{5}{2} II' \cos(v - v' - (\vartheta - \vartheta') - (\Omega - \Theta) + \Omega' - \Theta')$$

$$+ \frac{5}{2} II' \cos(3(v - v') - (\vartheta - \vartheta') - (\Omega - \Theta) + \Omega' - \Theta')$$

$$+ \frac{5}{2} II' \cos(5(v - v') - (\vartheta - \vartheta') - (\Omega - \Theta) + \Omega' - \Theta')$$

$$+ \frac{5}{2} II' \cos(v - v' + \vartheta - \vartheta' + \Omega - \Theta - (\Omega' - \Theta'))$$

$$+ \frac{5}{2} II' \cos(3(v - v') + \vartheta - \vartheta' + \Omega \quad \Theta - (\Omega' - \Theta')$$

$$- \frac{5}{2} II' \cos(v - 3v' + \vartheta + \vartheta' + \Omega - \Theta + \Omega' - \Theta')$$

$$- \frac{5}{2} II' \cos(3v - v' - (\vartheta + \vartheta') - (\Omega - \Theta) - (\Omega' - \Theta'))$$

$$- \frac{5}{2} II' \cos(3v - 5v' + \vartheta + \vartheta' + \Omega - \Theta + \Omega' - \Theta)$$

$$- \frac{5}{2} II' \cos(5v - 3v' - (\vartheta + \vartheta') - (\Omega - \Theta) - (\Omega' - \Theta'))$$

$$- \frac{5}{2} II' \cos(v + v' - (\vartheta + \vartheta') - (\Omega - \Theta) - (\Omega' - \Theta'))$$

$$\cos 6H = - \frac{3}{2}(I^2 + I'^2)$$

$$- 3(I^2 + I'^2) \cos 2(v - v')$$

$$- 3(I^2 + I'^2) \cos 4(v - v')$$

$$+ \left\{ 1 - \frac{3}{2} I^2 - \frac{3}{2} I'^2 \right\} \cos 6(v - v')$$

$$+ \frac{3}{2} I^2 \cos(2v - 2\vartheta - 2(\Omega - \Theta))$$

Cette formule se continue à la page suivante

$$+\tfrac{3}{2}I'^2\cos(2\mathrm{v}-2\vartheta'-2(\Omega'-\Theta'))$$

$$+\tfrac{3}{2}I^2\cos(2\mathrm{v}'-2\bar{\vartheta}-2(\Omega-\Theta))$$

$$+\tfrac{3}{2}I'^2\cos(2\mathrm{v}'-2\vartheta'-2(\Omega'-\Theta'))$$

$$+\tfrac{3}{2}I^2\cos(4\mathrm{v}-2\mathrm{v}'-2\vartheta-2(\Omega-\Theta))$$

$$+\tfrac{3}{2}I'^2\cos(4\mathrm{v}-2\mathrm{v}'-2\vartheta'-2(\Omega'-\Theta'))$$

$$+\tfrac{3}{2}I^2\cos(2\mathrm{v}-4\mathrm{v}'+2\vartheta+2(\Omega-\Theta))$$

$$+\tfrac{3}{2}I'^2\cos(2\mathrm{v}-4\mathrm{v}'+2\bar{\vartheta}'+2(\Omega'-\Theta'))$$

$$+\tfrac{3}{2}I^2\cos(6\mathrm{v}-4\mathrm{v}'-2\vartheta-2(\Omega-\Theta))$$

$$+\tfrac{3}{2}I'^2\cos(6\mathrm{v}-4\mathrm{v}'-2\bar{\vartheta}'-2(\Omega'-\Theta'))$$

$$+\tfrac{3}{2}I^2\cos(4\mathrm{v}-6\mathrm{v}'+2\vartheta+2(\Omega-\Theta))$$

$$+\tfrac{3}{2}I'^2\cos(4\mathrm{v}-6\mathrm{v}'+2\bar{\vartheta}'+2(\Omega'-\Theta'))$$

$$+3II'\cos(2(\mathrm{v}-\mathrm{v}')-(\vartheta-\bar{\vartheta}')-(\Omega-\Theta)+\Omega'-\Theta')$$

$$+3II'\cos(4(\mathrm{v}-\mathrm{v}')-(\vartheta-\bar{\vartheta}')-(\Omega-\Theta)+\Omega'-\Theta')$$

$$+3II'\cos(6(\mathrm{v}-\mathrm{v}')-(\bar{\vartheta}-\bar{\vartheta}')-(\Omega-\Theta)+\Omega'-\Theta')$$

$$+3II'\cos(2(\mathrm{v}-\mathrm{v}')+\vartheta-\vartheta'+\Omega-\Theta-(\Omega'-\Theta'))$$

$$+3II'\cos(4(\mathrm{v}-\mathrm{v}')+\vartheta-\bar{\vartheta}'+\Omega-\Theta-(\Omega'-\Theta'))$$

$$-3II'\cos(2\mathrm{v}-(\vartheta+\vartheta')-(\Omega-\Theta)-(\Omega'\quad\Theta'))$$

$$-3II'\cos(2\mathrm{v}'-(\bar{\vartheta}+\vartheta')-(\Omega-\Theta)-(\Omega'-\Theta'))$$

$$-3II'\cos(4\mathrm{v}-2\mathrm{v}'-(\vartheta+\bar{\vartheta}')-(\Omega-\Theta)-(\Omega'-\Theta'))$$

$$-3II'\cos(2\mathrm{v}-4\mathrm{v}'+\bar{\vartheta}+\bar{\vartheta}'+\Omega-\Theta+\Omega'-\Theta')$$

$$-3II'\cos(6\mathrm{v}-4\mathrm{v}'-(\bar{\vartheta}+\vartheta')-(\Omega-\Theta)-(\Omega'-\Theta'))$$

$$-3II'\cos(4\mathrm{v}-6\mathrm{v}'+(\bar{\vartheta}+\vartheta')+(\Omega-\Theta)+\Omega'-\Theta')$$

$$+3II'\cos(\vartheta-\vartheta'+\Omega-\Theta-(\Omega'-\Theta')).$$

Dans les expressions suivantes, je ne retiens que les termes les plus importants, c'est-à-dire ceux dont les arguments renferment seulement des multiples tels qu'on ait:

$$p + q \overline{<} 2,$$

p étant le facteur de v et q, celui de v'.

$$\begin{aligned}
\cos 7H = &-\tfrac{7}{2}(I^2 + I'^2)\cos(\mathrm{v} - \mathrm{v}') \\
&+ \tfrac{7}{4}I^2\cos(\mathrm{v} + \mathrm{v}' - 2\bar{\vartheta} - 2(\Omega - \Theta)) \\
&+ \tfrac{7}{4}I'^2\cos(\mathrm{v} + \mathrm{v}' - 2\bar{\vartheta}' - 2(\Omega' - \Theta')) \\
&+ \tfrac{7}{2}II'\cos(\mathrm{v} - \mathrm{v}' - (\bar{\vartheta} - \bar{\vartheta}') - (\Omega - \Theta) + \Omega' - \Theta') \\
&+ \tfrac{7}{2}II'\cos(\mathrm{v} - \mathrm{v}' + (\bar{\vartheta} - \bar{\vartheta}') + \Omega - \Theta - (\Omega' - \Theta')) \\
&- \tfrac{7}{2}II'\cos(\mathrm{v} + \mathrm{v}' - (\vartheta + \vartheta') - (\Omega - \Theta) - (\Omega' - \Theta')),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos 8H = &- 2(I^2 + I'^2) \\
&+ 2I^2\cos 2(\mathrm{v} - \bar{\vartheta} - (\Omega - \Theta)) \\
&+ 2I'^2\cos 2(\mathrm{v} - \bar{\vartheta}' - (\Omega' - \Theta')) \\
&+ 2I^2\cos 2(\mathrm{v}' - \bar{\vartheta} - (\Omega - \Theta)) \\
&+ 2I'^2\cos 2(\mathrm{v}' - \bar{\vartheta}' - (\Omega' - \Theta')) \\
&- 4II'\cos(2\mathrm{v} - (\bar{\vartheta} + \bar{\vartheta}') - (\Omega - \Theta) - (\Omega' - \Theta')) \\
&- 4II'\cos(2\mathrm{v}' - (\vartheta + \vartheta') - (\Omega - \Theta) - (\Omega' - \Theta')) \\
&+ 4II'\cos(\bar{\vartheta} - \vartheta' + \Omega - \Theta - (\Omega' - \Theta')),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos 9H = &-\tfrac{9}{2}(I^2 + I'^2)\cos(\mathrm{v} - \mathrm{v}') \\
&+ \tfrac{9}{4}I^2\cos(\mathrm{v} + \mathrm{v}' - 2\bar{\vartheta} - 2(\Omega - \Theta))
\end{aligned}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$+\frac{9}{4}I'^2\cos(\mathrm{v}+\mathrm{v}'-2\vartheta'-2(\Omega'-\Theta'))$$

$$+\frac{9}{2}II'\cos(\mathrm{v}-\mathrm{v}'-(\vartheta-\vartheta')-(\Omega-\Theta)+\Omega'-\Theta')$$

$$+\frac{9}{2}II'\cos(\mathrm{v}-\mathrm{v}'+(\vartheta-\vartheta')+\Omega-\Theta-(\Omega'-\Theta'))$$

$$-\frac{9}{2}II'\cos(\mathrm{v}+\mathrm{v}'-(\vartheta+\vartheta')-(\Omega-\Theta)-(\Omega'-\Theta'))$$

Evidemment, en multipliant les diverses expressions par une fraction rationnelle de la forme $\frac{n+2}{n}$, on pourra les continuer aussi loin qu'on voudra, toutefois en ne considérant que les termes dont les arguments sont soumis à la condition

$$p+q<2.$$

Je vais maintenant chercher les termes du quatrième ordre, me restreignant toutefois à n'en signaler que les plus essentiels, parmi lesquels je compte ceux qui satisfont à la condition mentionnée tout-à-l'heure. Les termes dont il s'agit dérivent, d'une part, de la fonction h_0 elle-même, qui renferme des termes multipliés par I^4, $I^2I'^2$ et I'^4, d'autre part de h_0^2. La partie du quatrième degré contenue dans h_0 s'obtient facilement, si l'on remplace, dans l'équation (5, a), f par $\frac{1}{4}I^2$ et f' par $\frac{1}{4}I'^2$, valeurs qui découlent des équations (30) et (34) du n° 32. Voici la partie en question:

$$\mathrm{h}_0=-\frac{1}{16}(I^4-I^2I'^2+I'^4)\cos(\mathrm{v}-\mathrm{v}')$$

$$+\frac{1}{16}I^2(I^2-I'^2)\cos(\mathrm{v}+\mathrm{v}'-2\vartheta-2(\Omega-\Theta))$$

$$-\frac{1}{16}I'^2(I^2-I'^2)\cos(\mathrm{v}+\mathrm{v}'-2\vartheta'-2(\Omega'-\Theta'))$$

$$+\frac{1}{16}I^2I'^2\cos(\mathrm{v}-\mathrm{v}'-2(\vartheta-\vartheta')-2(\Omega-\Theta)+2(\Omega'-\Theta')).$$

En introduisant, dans l'équation (7), cette valeur de h_0 au lieu de h, et en omettant dans le résultat les termes dont les arguments ne satisfont pas à la condition

$$p+q<2,$$

il en résultera:

Termes du quatrième degré provenant de h_0.

$$\cos H = -\tfrac{1}{16}(I^4 - I^2 I'^2 + I'^4)\cos(\mathrm{v} - \mathrm{v}')$$
$$+ \tfrac{1}{16} I^2(I^2 - I'^2)\cos(\mathrm{v} + \mathrm{v}' - 2\bar{\vartheta} - 2(\Omega - \Theta))$$
$$- \tfrac{1}{16} I'^2(I^2 - I'^2)\cos(\mathrm{v} + \mathrm{v}' - 2\bar{\vartheta} - 2(\Omega' - \Theta'))$$
$$+ \tfrac{1}{16} I^2 I'^2 \cos(\mathrm{v} - \mathrm{v}' - 2(\bar{\vartheta} - \vartheta') - 2(\Omega - \Theta) + 2(\Omega' - \Theta')),$$

$$\cos 2H = -\tfrac{1}{8}(I^4 - I^2 I'^2 + I'^4)$$
$$+ \tfrac{1}{8} I^2 I'^2 \cos 2(\bar{\vartheta} - \vartheta' + \Omega - \Theta - (\Omega' - \Theta'))$$
$$+ \tfrac{1}{8} I^2(I^2 - I'^2)\cos 2(\mathrm{v} - \bar{\vartheta} - (\Omega - \Theta))$$
$$+ \tfrac{1}{8} I^2(I^2 - I'^2)\cos 2(\mathrm{v}' - \bar{\vartheta} - (\Omega - \Theta))$$
$$- \tfrac{1}{8} I'^2(I^2 - I'^2)\cos 2(\mathrm{v} - \vartheta' - (\Omega' - \Theta'))$$
$$- \tfrac{1}{8} I'^2(I^2 - I'^2)\cos 2(\mathrm{v}' - \bar{\vartheta}' - (\Omega' - \Theta')),$$

$$\cos 3H = -\tfrac{3}{8}(I^4 - I^2 I'^2 + I'^4)\cos(\mathrm{v} - \mathrm{v}')$$
$$+ \tfrac{3}{16} I^2(I^2 - I'^2)\cos(\mathrm{v} + \mathrm{v}' - 2\vartheta - 2(\Omega - \Theta))$$
$$- \tfrac{3}{16} I'^2(I^2 - I'^2)\cos(\mathrm{v} + \mathrm{v}' - 2\vartheta' - 2(\Omega' - \Theta'))$$
$$+ \tfrac{3}{16} I^2 I'^2 \cos(\mathrm{v} - \mathrm{v}' - 2(\vartheta - \vartheta') - 2(\Omega - \Theta) + 2(\Omega' - \Theta'))$$
$$+ \tfrac{3}{16} I^2(I^2 - I'^2)\cos 2(\mathrm{v} - \vartheta - (\Omega - \Theta))$$
$$+ \tfrac{3}{16} I^2(I^2 - I'^2)\cos 2(\mathrm{v}' - \vartheta - (\Omega - \Theta))$$
$$- \tfrac{3}{16} I'^2(I^2 - I'^2)\cos 2(\mathrm{v} - \vartheta' - (\Omega' - \Theta'))$$
$$- \tfrac{3}{16} I'^2(I^2 - I'^2)\cos 2(\mathrm{v}' - \bar{\vartheta}' - (\Omega' - \Theta'))$$
$$- \tfrac{3}{16} I^2 I'^2 \cos(\mathrm{v} - \mathrm{v}' + 2(\vartheta - \bar{\vartheta}') + 2(\Omega - \Theta) - 2(\Omega' - \Theta')),$$

$$\cos 4H = -\frac{1}{4}(I^4 - I^2I'^2 + I'^4)$$
$$+\frac{1}{4}I^2I'^2\cos 2(\vartheta - \vartheta' + \Omega - \Theta - (\Omega' - \Theta'))$$
$$+\frac{1}{4}I^2(I^2 - I'^2)\cos 2(\mathrm{v} - \vartheta - (\Omega - \Theta))$$
$$+\frac{1}{4}I^2(I^2 - I'^2)\cos 2(\mathrm{v}' - \vartheta - (\Omega - \Theta))$$
$$- \ldots,$$

$$\cos 5H = -\frac{5}{8}(I^4 - I^2I'^2 + I^4)\cos(\mathrm{v} - \mathrm{v}')$$
$$+\frac{5}{16}I^2(I^2 - I'^2)\cos(\mathrm{v} + \mathrm{v}' - 2\vartheta - 2(\Omega - \Theta))$$
$$-\frac{5}{16}I'^2(I^2 - I'^2)\cos(\mathrm{v} + \mathrm{v}' - 2\vartheta' - 2(\Omega' - \Theta'))$$
$$+\frac{5}{16}I^2I'^2\cos(\mathrm{v} - \mathrm{v}' - 2(\vartheta - \vartheta') - 2(\Omega - \Theta) + 2(\Omega' - \Theta'))$$
$$+ \ldots,$$

etc.

Aussi ces expressions se continuent-elles en multipliant par $\frac{n+2}{2}$ l'expression de $\cos nH$ qu'on a mise en évidence; on obtient ainsi les termes de $\cos(n+2)H$ dont il s'agit ici.

Quant aux termes du quatrième degré provenant de $\mathfrak{h}_0^2$, on les déduit en multipliant, par la partie du quatrième degré de $\mathfrak{h}_0^2$, les expressions des $\Psi_{n,2}$ signalées plus haut.

Voici d'abord la partie de $\mathfrak{h}_0^2$ dont il s'agit:

$$\mathfrak{h}_0^2 = \frac{1}{16}(I^4 + 5I^2I'^2 + I'^4)$$
$$-\frac{1}{4}II'(I^2 + I'^2)\cos(\vartheta - \vartheta' + \Omega - \Theta - (\Omega' - \Theta'))$$
$$+\frac{1}{16}I^2I'^2\cos 2(\vartheta - \vartheta' + \Omega - \Theta - (\Omega' - \Theta'))$$
$$+\frac{1}{32}(I^2 + I'^2)^2\cos 2(\mathrm{v} - \mathrm{v}')$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$+\frac{1}{32}I^4\cos 2(\mathrm{v}+\mathrm{v}'-2\bar{\vartheta}-2(\Omega-\Theta))$$

$$+\frac{1}{32}I'^4\cos 2(\mathrm{v}+\mathrm{v}'-2\bar{\vartheta}'-2(\Omega'-\Theta'))$$

$$-\frac{1}{16}I^2(I^2+5I'^2)\cos 2(\mathrm{v}-\bar{\vartheta}-(\Omega-\Theta))$$

$$-\frac{1}{16}I^2(I^2+I'^2)\cos 2(\mathrm{v}'-\bar{\vartheta}-(\Omega-\Theta))$$

$$-\frac{1}{16}I'^2(I^2+I'^2)\cos 2(\mathrm{v}-\bar{\vartheta}'-(\Omega'-\Theta'))$$

$$-\frac{1}{16}I'^2(5I^2+I'^2)\cos 2(\mathrm{v}'-\bar{\vartheta}'-(\Omega'-\Theta'))$$

$$+\frac{1}{8}I^2I'^2\cos 2(\mathrm{v}-\mathrm{v}'-(\bar{\vartheta}-\bar{\vartheta}')-(\Omega-\Theta)+\Omega'-\Theta')$$

$$+\frac{3}{16}I^2I'^2\cos 2(\mathrm{v}+\mathrm{v}'-(\bar{\vartheta}+\bar{\vartheta}')-(\Omega-\Theta)-(\Omega'-\Theta'))$$

$$-\frac{1}{8}II'(I^2+I'^2)\cos(2(\mathrm{v}-\mathrm{v}')-(\bar{\vartheta}-\bar{\vartheta}')-(\Omega-\Theta)+\Omega'-\Theta')$$

$$+\frac{1}{8}II'(I^2+2I'^2)\cos(2\mathrm{v}-(\bar{\vartheta}+\bar{\vartheta}')-(\Omega-\Theta)-(\Omega'-\Theta'))$$

$$+\frac{1}{8}II'(2I^2+I'^2)\cos(2\mathrm{v}'-(\bar{\vartheta}+\bar{\vartheta}')-(\Omega-\Theta)-(\Omega'-\Theta'))$$

$$+\frac{1}{8}I^3I'\cos(2\mathrm{v}-3\bar{\vartheta}+\bar{\vartheta}'-3(\Omega-\Theta)+\Omega'-\Theta)$$

$$+\frac{1}{8}II'^3\cos(2\mathrm{v}'+\bar{\vartheta}-3\bar{\vartheta}'+\Omega-\Theta-3(\Omega'-\Theta'))$$

$$-\frac{1}{8}I^3I'\cos(2(\mathrm{v}+\mathrm{v}')-3\bar{\vartheta}-\bar{\vartheta}'-3(\Omega-\Theta)-(\Omega'-\Theta'))$$

$$-\frac{1}{8}II'^3\cos(2(\mathrm{v}+\mathrm{v}')-\bar{\vartheta}-3\bar{\vartheta}'-(\Omega-\Theta)-3(\Omega'-\Theta')).$$

Maintenant, en effectuant les multiplications indiquées, et en omettant les termes dont les arguments ne satisfont pas à la condition

$$p+q<2,$$

on arrive aux

Termes du quatrième degré provenant de h_0^2.

Dans l'expression de $\cos H$, il n'y a pas de tels termes; dans l'expression de $\cos 2H$, ces termes s'obtiennent tout simplement en multipliant, par 2, l'expression précédente de h_0^2.

$$\cos 3H = \frac{3}{16}(5I^4 + 22I^2I'^2 + 5I'^4)\cos(v - v')$$

$$- \frac{9}{4}\,II'(I^2 + I'^2)\cos(v - v' - (\bar\vartheta - \bar\vartheta') - (\Omega - \Theta) + (\Omega' - \Theta'))$$

$$- \frac{3}{2}\,II'(I^2 + I'^2)\cos(v - v' + (\bar\vartheta - \bar\vartheta') + \Omega - \Theta - (\Omega' - \Theta'))$$

$$+ \frac{9}{8}\,I^2I'^2\cos(v - v' - 2(\bar\vartheta - \bar\vartheta') - 2(\Omega - \Theta) + 2(\Omega' - \Theta'))$$

$$+ \frac{3}{8}\,I^2I'^2\cos(v - v' + 2(\bar\vartheta - \bar\vartheta') + 2(\Omega - \Theta) - 2(\Omega' - \Theta'))$$

$$- \frac{3}{4}\,I^2(I^2 + 3I'^2)\cos(v + v' - 2\bar\vartheta - 2(\Omega - \Theta))$$

$$- \frac{3}{4}\,I'^2(3I^2 + I'^2)\cos(v + v' - 2\bar\vartheta' - 2(\Omega' - \Theta'))$$

$$+ \frac{9}{4}\,II'(I^2 + I'^2)\cos(v + v' - (\bar\vartheta + \bar\vartheta') - (\Omega - \Theta) - (\Omega' - \Theta'))$$

$$+ \frac{3}{4}\,I^3I'\cos(v + v' - 3\bar\vartheta + \bar\vartheta' - 3(\Omega - \Theta) + \Omega' - \Theta')$$

$$+ \frac{3}{4}\,II'^3\cos(v + v' + \bar\vartheta - 3\bar\vartheta' + \Omega - \Theta - 3(\Omega' - \Theta')),$$

$$\cos 4H = \frac{1}{8}(11I^4 + 46I^2I'^2 + 11I'^4)$$

$$- \frac{11}{2}\,II'(I^2 + I'^2)\cos(\bar\vartheta - \bar\vartheta' + \Omega - \Theta - (\Omega' - \Theta'))$$

$$+ \frac{5}{2}\,I^2I'^2\cos 2(\bar\vartheta - \bar\vartheta' + \Omega - \Theta - (\Omega' - \Theta'))$$

$$- \frac{1}{4}\,I^2(7I^2 + 23I'^2)\cos 2(v - \bar\vartheta - (\Omega - \Theta))$$

$$- \frac{1}{4}\,I^2(7I^2 + 19I'^2)\cos 2(v' - \bar\vartheta - (\Omega - \Theta))$$

$$- \frac{1}{4}\,I'^2(19I^2 + 7I'^2)\cos 2(v - \bar\vartheta' - (\Omega' - \Theta'))$$

$$- \frac{1}{4}\,I'^2(23I^2 + 7I'^2)\cos 2(v' - \bar\vartheta' - (\Omega' - \Theta'))$$

$$- \frac{1}{2}\,II'(10I^2 + 11I'^2)\cos(2v - (\bar\vartheta + \bar\vartheta') - (\Omega - \Theta) - (\Omega' - \Theta'))$$

$$- \frac{1}{2}\,II'(11I^2 + 10I')\cos(2v - (\bar\vartheta + \bar\vartheta') - (\Omega - \Theta) - (\Omega' - \Theta'))$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$+\ 2I^3I'\cos(2v - 3\bar{\vartheta} + \vartheta' - 3(\Omega - \Theta) + \Omega' \quad \Theta')$$

$$+\ 2II'^3\cos(2v' + \vartheta - 3\vartheta' + \Omega - \Theta - 3(\Omega' - \Theta'))$$

$$+\ \tfrac{3}{2}\,I^3I'\cos(2v' - 3\vartheta + \vartheta' - 3(\Omega - \Theta) + \Omega' - \Theta')$$

$$+\ \tfrac{3}{2}\,II'^3\cos(2v + \vartheta - 3\vartheta' + \Omega - \Theta - 3(\Omega' - \Theta')),$$

$$\cos 5H = \quad \tfrac{5}{16}(17I^4 + 70I^2I'^2 + 17I'^4)\cos(v - v')$$

$$-\ \tfrac{45}{4}\,II'(I^2 + I'^2)\cos(v - v' - (\bar{\vartheta} - \vartheta') - (\Omega - \Theta) + \Omega' - \Theta')$$

$$-\ 10II'(I^2 + I'^2)\cos(v - v' + (\vartheta - \bar{\vartheta}') + \Omega - \Theta - (\Omega' - \Theta'))$$

$$+\ \tfrac{45}{8}\,I^2I'^2\cos(v - v' - 2(\vartheta - \bar{\vartheta}') - 2(\Omega - \Theta) + 2(\Omega' - \Theta'))$$

$$+\ \tfrac{35}{8}\,I^2I'^2\cos(v - v' + 2(\bar{\vartheta} - \vartheta') + 2(\Omega - \Theta) - 2(\Omega' - \Theta'))$$

$$-\ \tfrac{15}{4}\,I^2(I^2 + 3I'^2)\cos(v + v' - 2\vartheta - 2(\Omega - \Theta))$$

$$-\ \tfrac{15}{4}\,I'^2(3I^2 + I'^2)\cos(v + v' - 2\bar{\vartheta}' - 2(\Omega' - \Theta'))$$

$$+\ \tfrac{45}{4}\,II'(I^2 + I'^2)\cos(v + v' - (\bar{\vartheta} + \vartheta') - (\Omega - \Theta) - (\Omega' - \Theta'))$$

$$+\ \tfrac{15}{4}\,I^3I'\cos(v + v' - 3\bar{\vartheta} + \vartheta' - 3(\Omega - \Theta) + \Omega' - \Theta')$$

$$+\ \tfrac{15}{4}\,II'^3\cos(v + v' + \vartheta - 3\vartheta' + \Omega - \Theta - 3(\Omega' - \Theta')),$$

$$\cos 6H = \quad \tfrac{3}{8}(13I^4 + 53I^2I'^2 + 13I'^4)$$

$$-\ \tfrac{39}{2}\,II'(I^2 + I'^2)\cos(\bar{\vartheta} - \bar{\vartheta}' + \Omega - \Theta - (\Omega' - \Theta'))$$

$$+\ \tfrac{75}{8}\,I^2I'^2\cos 2(\vartheta - \bar{\vartheta}' + \Omega - \Theta - (\Omega' - \Theta'))$$

$$-\ \tfrac{3}{8}\,I^2(17I^2 + 53I'^2)\cos 2(v - \bar{\vartheta} - (\Omega - \Theta))$$

$$-\ \tfrac{3}{8}\,I^2(17I^2 + 49I'^2)\cos 2(v' - \vartheta - (\Omega - \Theta))$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$-\frac{3}{8}I'(49I^2+17I'^2)\cos 2(v-\vartheta'-(\Omega'-\Theta'))$$

$$-\frac{3}{8}I'^2(53I^2+17I'^2)\cos 2(v'-\vartheta'-(\Omega'-\Theta'))$$

$$+\frac{3}{4}II'(25I^2+26I'^2)\cos(2v-(\vartheta+\vartheta')-(\Omega-\Theta)-(\Omega'-\Theta'))$$

$$+\frac{3}{4}II'(26I^2+25I'^2)\cos(2v'-(\vartheta+\vartheta')-(\Omega-\Theta)-(\Omega'-\Theta'))$$

$$+\frac{27}{4}I^3I'\cos(2v-3\vartheta+\vartheta'-3(\Omega-\Theta)+\Omega'-\Theta')$$

$$+\frac{27}{4}II'^3\cos(2v'+\vartheta-3\vartheta'+\Omega-\Theta-3(\Omega'-\Theta'))$$

$$+6I^3I'\cos(2v'-3\vartheta+\vartheta'-3(\Omega-\Theta)+\Omega'-\Theta')$$

$$+6II'^3\cos(2v+\vartheta-3\vartheta'+\Omega-\Theta-3(\Omega'-\Theta')),$$

$$\cos 7H = \frac{7}{16}(35I^4+142I^2I'^2+35I'^4)$$

$$-\frac{63}{2}II'(I^2+I'^2)\cos(v-v'-(\vartheta-\vartheta')-(\Omega-\Theta)+\Omega'-\Theta)$$

$$-\frac{119}{4}II'(I^2+I'^2)\cos(v-v'+\vartheta-\vartheta'+\Omega-\Theta-(\Omega'-\Theta'))$$

$$+\frac{63}{4}I^2I'^2\cos(v-v'-2(\vartheta-\vartheta')-2(\Omega-\Theta)+2(\Omega'-\Theta'))$$

$$+14I^2I'^2\cos(v-v'+2(\vartheta-\vartheta')+2(\Omega-\Theta)-2(\Omega'-\Theta'))$$

$$-\frac{21}{2}I^2(I^2+3I'^2)\cos(v+v'-2\vartheta-2(\Omega-\Theta))$$

$$-\frac{21}{2}I'^2(3I^2+I'^2)\cos(v+v'-2\vartheta'-2(\Omega'-\Theta'))$$

$$+\frac{63}{2}II'(I^2+I'^2)\cos(v+v'-(\vartheta+\vartheta')-(\Omega-\Theta)-(\Omega'-\Theta'))$$

$$+\frac{21}{2}I^3I'\cos(v+v'-3\vartheta+\vartheta'-3(\Omega-\Theta)+\Omega'-\Theta')$$

$$+\frac{21}{2}II'^3\cos(v+v'+\vartheta-3\vartheta'+\Omega-\Theta-3(\Omega'-\Theta'))$$

La continuation de ces formules est moins aisée que celle des expressions dépendant de la première puissance de h_0. Dans les cas, d'ailleurs

très rares dans notre système planétaire, où il faut procéder plus loin, on établira d'abord les expressions des fonctions $\Psi_{n.2}$, n étant un nombre entier plus grand que 7, après quoi on obtiendra sans trop de peine les formules des parties de $\cos 8H$, de $\cos 9H$, etc., dont il s'agit.

Par l'inspection des formules signalées donnant les différents termes de $\cos nH$, on reconnaît facilement que tous les arguments sont composés de trois arguments fondamentaux, à savoir: $\mathrm{v} - \vartheta = v - \vartheta$; $\mathrm{v}' - \vartheta' = v' - \vartheta'$ et $\bar{\vartheta} - \bar{\vartheta}' = \vartheta - \vartheta' - (G - G')$. Ainsi par exemple, les termes de $\cos H$ du degré zéro et du deuxième degré s'ecrivent de la manière suivante:

$$
\begin{aligned}
(8)\quad \cos H = & \left\{ 1 - \frac{1}{4} I^2 - \frac{1}{4} I'^2 \right\} \cos(v - \vartheta - (v' - \vartheta') + \vartheta - \vartheta' - (G - G')) \\
& + \frac{1}{4} I^2 \cos(v - \vartheta + v' - \vartheta' - (\vartheta - \vartheta') + G - G' - 2(\Omega - \Theta)) \\
& + \frac{1}{4} I'^2 \cos(v - \vartheta + v' - \vartheta' + \vartheta - \vartheta' - (G - G') - 2(\Omega' - \Theta')) \\
& + \frac{1}{2} II' \cos(v - \vartheta - (v' - \vartheta') - (\Omega - \Theta) + \Omega' - \Theta') \\
& - \frac{1}{2} II' \cos(v - \vartheta + v' - \vartheta' - (\Omega - \Theta) - (\Omega' - \Theta')).
\end{aligned}
$$

Ensuite, les divers termes se transforment immédiatement, ce qui est facile à voir, de manière que les coefficients apparaissent comme fonctions de $I \sin(\Omega - \Theta)$, $I \cos(\Omega - \Theta)$, $I' \sin(\Omega' - \Theta')$ et $I' \cos(\Omega' - \Theta')$.

On peut encore remarquer que les différents cosinus se développent aisément suivant les puissances de $G - G'$ vu que les fonctions G et G' et, par conséquent, leur différence sont des agrégats périodiques du deuxième degré par rapport aux modules et aux coefficients anastématiques.

Il résulte de ce que nous venons d'observer que les arguments ne renfermeront finalement que des multiples des trois arguments fondamentaux: $v - \vartheta$, $v' - \vartheta'$ et $\vartheta - \vartheta'$.

51. L'expression de la fonction h que nous venons de signaler par l'équation (4) repose sur la supposition que les fonctions $\mathfrak{z}$, $\frac{d\mathfrak{z}}{dv}$, $\mathfrak{z}'$ et $\frac{d\mathfrak{z}'}{dv}$ s'expriment au moyen des équations (49) et (50) du n° 23, c'est-à-dire que ces fonctions soient des agrégats de termes élémentaires ou sousélémentaires.

Dans l'état réel des choses, ces fonctions renferment pourtant aussi des inégalités, ce qui amène, dans les expressions des $\cos nH$, des termes d'autres formes que celles qui y sont produits par les termes élémentaires de $\mathfrak{z}$, $\frac{d\mathfrak{z}}{dv}$, $\mathfrak{z}'$ et $\frac{d\mathfrak{z}'}{dv'}$. Pour séparer les deux espèces de termes, nous allons chercher l'expression de h, donnée immédiatement comme fonction des quatres quantités mentionnées.

Dans ce but, rappelons-nous les formules (59) du n° 23 qui donnent, après y avoir remplacé $v - G$ par v:

$$\cos b \cos l = \cos \mathrm{v} + \tfrac{1}{2} \sin i^2 (1 + \mathrm{f}) \sin \theta \sin (\mathrm{v} - \theta),$$

$$\cos b \sin l = \sin \mathrm{v} - \tfrac{1}{2} \sin i^2 (1 + \mathrm{f}) \cos \theta \sin (\mathrm{v} - \theta).$$

On aura de même:

$$\cos b' \cos l' = \cos \mathrm{v}' + \tfrac{1}{2} \sin i'^2 (1 + \mathrm{f}') \sin \theta' \sin (\mathrm{v}' - \theta'),$$

$$\cos b' \sin l' = \sin \mathrm{v}' - \tfrac{1}{2} \sin i'^2 (1 + \mathrm{f}') \cos \theta' \sin (\mathrm{v}' - \theta').$$

En introduisant ces expressions dans l'équation (2), il en résultera:

$$\begin{aligned}\cos H = \cos (\mathrm{v} - \mathrm{v}') & - \tfrac{1}{2} \sin i^2 (1 + \mathrm{f}) \sin (\mathrm{v} - \theta) \sin (\mathrm{v}' - \theta) \\ & - \tfrac{1}{2} \sin i'^2 (1 + \mathrm{f}') \sin (\mathrm{v}' - \theta) \sin (\mathrm{v}' - \theta') \\ & + \tfrac{1}{4} \sin i^2 \sin i'^2 (1 + \mathrm{f})(1 + \mathrm{f}') \cos (\theta - \theta') \sin (\mathrm{v} - \theta) \sin (\mathrm{v}' - \theta') \\ & + \mathfrak{z}\mathfrak{z}'.\end{aligned}$$

Mais puisqu'on a identiquement:

$$\sin (\mathrm{v}' - \theta) = \sin (\mathrm{v} - \theta) \cos (\mathrm{v} - \mathrm{v}') - \cos (\mathrm{v} - \theta) \sin (\mathrm{v} - \mathrm{v}'),$$

$$\sin (\mathrm{v} - \theta') = \sin (\mathrm{v}' - \theta') \cos (\mathrm{v} - \mathrm{v}') + \cos (\mathrm{v}' - \theta') \sin (\mathrm{v} - \mathrm{v}'),$$

$$\begin{aligned}\cos (\theta - \theta') = {} & \cos (\mathrm{v} - \theta) \cos (\mathrm{v}' - \theta') \cos (\mathrm{v} - \mathrm{v}') + \sin (\mathrm{v} - \theta) \sin (\mathrm{v}' - \theta') \cos (\mathrm{v} - \mathrm{v}') \\ & + \sin (\mathrm{v} - \theta) \cos (\mathrm{v}' - \theta') \sin (\mathrm{v} - \mathrm{v}') - \cos (\mathrm{v} - \theta) \sin (\mathrm{v}' - \theta') \sin (\mathrm{v} - \mathrm{v}'),\end{aligned}$$

on déduit facilement, en considérant les équations (46) du n° 22 l'expression que voici:

$$(9)\quad \cos H = \cos(\mathrm{v}-\mathrm{v}') \left\{ \frac{1}{2}(1+\mathrm{f})\zeta^2 + \frac{1}{2}(1+\mathrm{f}')\zeta'^2 - \frac{1}{4}\frac{(1+\mathrm{f})(1+\mathrm{f}')}{(1+g)(1+g')}\zeta\frac{d\zeta}{dv}\zeta'\frac{d\zeta'}{dv'} - \frac{1}{4}(1+\mathrm{f})(1+\mathrm{f}')\zeta^2\zeta'^2 \right\}\cos(\mathrm{v}-\mathrm{v}')$$

$$+ \left\{ \frac{1}{2}\frac{1+\mathrm{f}}{1+g}\zeta'\frac{d\zeta}{dv} - \frac{1}{2}\frac{1+\mathrm{f}'}{1+g'}\zeta\frac{d\zeta'}{dv'} + \frac{1}{4}\frac{(1+\mathrm{f})(1+\mathrm{f}')}{1+g}\zeta^2\zeta'\frac{d\zeta}{dv} - \frac{1}{4}\frac{(1+\mathrm{f})(1+\mathrm{f}')}{1+g'}\zeta'^2\zeta\frac{d\zeta'}{dv'} \right\}\sin(\mathrm{v}-\mathrm{v}')$$

$$+ \zeta\zeta'.$$

Evidemment, si l'on retranche $\cos(\mathrm{v}-\mathrm{v}')$ du second membre de l'équation trouvée, on retient les termes constituant la fonction h; en négligeant les termes du quatrième degré, on parvient ainsi à l'expression

$$(10)\quad \mathrm{h} = -\frac{1}{2}(\zeta^2+\zeta'^2)\cos(\mathrm{v}-\mathrm{v}') + \frac{1}{2}\left(\zeta\frac{d\zeta'}{dv'} - \zeta'\frac{d\zeta}{dv}\right)\sin(\mathrm{v}-\mathrm{v}') + \zeta\zeta'.$$

Maintenant, si l'on se rappelle les expressions des fonctions $\Psi_{n.1}$ qu'on a données dans le numéro (49), on déduira aisément, avec la valeur signalée de h, les expressions suivantes:

$$\cos 2H = -\zeta^2 - \zeta'^2$$
$$+ (1-\zeta^2-\zeta'^2)\cos 2(\mathrm{v}-\mathrm{v}')$$
$$+ \left(\zeta\frac{d\zeta'}{dv'} - \zeta'\frac{d\zeta}{dv}\right)\sin 2(\mathrm{v}-\mathrm{v}')$$
$$+ 4\zeta\zeta'\cos(\mathrm{v}-\mathrm{v}'),$$

$$\cos 3H = -3(\zeta^2+\zeta'^2)\cos(\mathrm{v}-\mathrm{v}')$$
$$+ \left(1-\frac{3}{2}\zeta^2-\frac{3}{2}\zeta'^2\right)\cos 3(\mathrm{v}-\mathrm{v}')$$
$$+ \frac{3}{2}\left(\zeta\frac{d\zeta'}{dv'} - \zeta'\frac{d\zeta}{dv}\right)\sin 3(\mathrm{v}-\mathrm{v}')$$
$$+ 3\zeta\zeta'$$
$$+ 6\zeta\zeta'\cos 2(\mathrm{v}-\mathrm{v}'),$$

$$
\begin{aligned}
\cos 4H = &- 2(\mathfrak{z}^2 + \mathfrak{z}'^2) \\
&- 4(\mathfrak{z}^2 + \mathfrak{z}'^2)\cos 2(v - v') \\
&+ (1 - 2\mathfrak{z}^2 - 2\mathfrak{z}'^2)\cos 4(v - v') \\
&+ 2\left(\mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{z}}{dv} - \mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)\sin 4(v - v') \\
&+ 8\mathfrak{z}\mathfrak{z}'\cos(v - v') \\
&+ 8\mathfrak{z}\mathfrak{z}'\cos 3(v - v'),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cos 5H = &- 5(\mathfrak{z}^2 + \mathfrak{z}'^2)\cos(v - v') \\
&- 5(\mathfrak{z}^2 + \mathfrak{z}'^2)\cos 3(v - v') \\
&+ \left(1 - \frac{5}{2}\mathfrak{z}^2 - \frac{5}{2}\mathfrak{z}'^2\right)\cos 5(v - v') \\
&+ \frac{5}{2}\left(\mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{z}}{dv} - \mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)\sin 5(v - v') \\
&+ 5\mathfrak{z}\mathfrak{z}' \\
&+ 10\mathfrak{z}\mathfrak{z}'\cos 2(v - v') \\
&+ 10\mathfrak{z}\mathfrak{z}'\cos 4(v - v'),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cos 6H = &- 3(\mathfrak{z}^2 + \mathfrak{z}'^2) \\
&- 6(\mathfrak{z}^2 + \mathfrak{z}'^2)\cos 2(v - v') \\
&- 6(\mathfrak{z}^2 + \mathfrak{z}'^2)\cos 4(v - v') \\
&+ (1 - 3\mathfrak{z}^2 - 3\mathfrak{z}'^2)\cos 6(v - v') \\
&+ 3\left(\mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{z}}{dv} - \mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)\sin 6(v - v') \\
&+ 12\mathfrak{z}\mathfrak{z}'\cos(v - v') \\
&+ 12\mathfrak{z}\mathfrak{z}'\cos 3(v - v') \\
&+ 12\mathfrak{z}\mathfrak{z}'\cos 5(v - v'),
\end{aligned}
$$

$$\cos 7H = -7(\mathfrak{z}^2 + \mathfrak{z}'^2)\cos(\mathrm{v} - \mathrm{v}')$$
$$-7(\mathfrak{z}^2 + \mathfrak{z}'^2)\cos 3(\mathrm{v} - \mathrm{v}')$$
$$-7(\mathfrak{z}^2 + \mathfrak{z}'^2)\cos 5(\mathrm{v} - \mathrm{v}')$$
$$+\left(1 - \frac{7}{2}\mathfrak{z}^2 - \frac{7}{2}\mathfrak{z}'^2\right)\cos 7(\mathrm{v} - \mathrm{v}')$$
$$+\frac{7}{2}\left(\mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{z}'}{dv} - \mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)\sin 7(\mathrm{v} - \mathrm{v}')$$
$$+7\mathfrak{z}\mathfrak{z}'$$
$$+14\mathfrak{z}\mathfrak{z}'\cos 2(\mathrm{v} - \mathrm{v}')$$
$$+14\mathfrak{z}\mathfrak{z}'\cos 4(\mathrm{v} - \mathrm{v}')$$
$$+14\mathfrak{z}\mathfrak{z}'\cos 6(\mathrm{v} - \mathrm{v}').$$

Nous nous arrêtons ici. En cas de besoin, on écrira immédiatement les expressions analogues des $\cos nH$ appartenant aux valeurs du nombre n plus grandes que 7.

Cela étant, nous désignons par $(\mathfrak{z})$ et $(\mathfrak{z}')$ les parties élémentaires des fonctions $\mathfrak{z}$ et $\mathfrak{z}'$, c'est-à-dire, les sommes des termes élémentaires et sous-élémentaires s'y trouvant. Mettons ensuite:

(11) $$\mathfrak{z} = (\mathfrak{z}) + \delta\mathfrak{z}; \qquad \mathfrak{z}' = (\mathfrak{z}') + \delta\mathfrak{z}',$$

de sorte que $\delta\mathfrak{z}$ et $\delta\mathfrak{z}'$ signifient les sommes des inégalités auxquelles sont soumises, les latitudes des deux astres. Désignons finalement par (H) ce que devient H lorsque $\delta\mathfrak{z}$ et $\delta\mathfrak{z}'$ sont égaux à zéro, et admettons l'expression

(12) $$\cos nH = \cos n(H) + M_n\delta\mathfrak{z} + M'_n\delta\mathfrak{z}' + N_n\frac{d\delta\mathfrak{z}}{dv} + N'_n\frac{d\delta\mathfrak{z}}{dv}$$
$$+ P_n\delta\mathfrak{z}^2 + P'_n\delta\mathfrak{z}'^2 + Q_n\delta\mathfrak{z}\frac{d\delta\mathfrak{z}}{dv} + Q'_n\delta\mathfrak{z}'\frac{d\delta\mathfrak{z}}{dv} + R_n\delta\mathfrak{z}\delta\mathfrak{z}'.$$

Evidemment, si l'on introduisait, dans les expressions précédentes des $\cos nH$, $(\mathfrak{z})$ au lieu de $\mathfrak{z}$ et $(\mathfrak{z}')$ au lieu de $\mathfrak{z}'$, et qu'on identifiât les fonctions $(\mathfrak{z})$ et $(\mathfrak{z}')$ avec les expressions de $\mathfrak{z}$ et de $\mathfrak{z}'$ qu'on a données dans le n° 23, on retomberait dans les formules du numéro précédent, lesquelles

donneraient alors les expressions de $\cos n(H)$. Mais il faut encore déterminer les fonctions M_n, M'_n, N_n, ..., R_n.

A cet égard, nous faisons d'abord la remarque que M_n et M'_n sont de telles fonctions de $(\mathfrak{z})$ et $(\mathfrak{z}')$ et de v et v', que, si M_n était connu, on obtiendrait M'_n en changeant $\mathfrak{z}$ en $\mathfrak{z}'$, $\mathfrak{z}'$ en $\mathfrak{z}$, v en v' et v' en v. C'est de même quant aux fonctions N_n et N'_n, P_n et P'_n, Q_n et Q'_n, dont les P et les P' ne dépendent toutefois que de v et v'. En conséquence, il suffit de ne mettre en évidence que les M_n, les N_n, les P_n, les Q_n et les R_n.

Voici les expressions des quantités dont il s'agit:

$$M_1 = -(\mathfrak{z})\cos(\mathrm{v}-\mathrm{v}') + \frac{1}{2}\frac{d(\mathfrak{z})}{dv}\sin(\mathrm{v}-\mathrm{v}') + (\mathfrak{z}'),$$

$$M_2 = -2(\mathfrak{z}) - 2(\mathfrak{z})\cos 2(\mathrm{v}-\mathrm{v}') + \frac{d(\mathfrak{z})}{dv}\sin 2(\mathrm{v}-\mathrm{v}') + 4(\mathfrak{z}')\cos(\mathrm{v}-\mathrm{v}'),$$

$$M_3 = -6(\mathfrak{z})\cos(\mathrm{v}-\mathrm{v}') - 3(\mathfrak{z})\cos 3(\mathrm{v}-\mathrm{v}') + \frac{3}{2}\frac{d(\mathfrak{z})}{dv}\sin 3(\mathrm{v}-\mathrm{v}')$$
$$+ 3(\mathfrak{z}') + 6(\mathfrak{z}')\cos 2(\mathrm{v}-\mathrm{v}'),$$

$$M_4 = -4(\mathfrak{z}) - 8(\mathfrak{z})\cos 2(\mathrm{v}-\mathrm{v}') - 4(\mathfrak{z})\cos 4(\mathrm{v}-\mathrm{v}')$$
$$+ 2\frac{d(\mathfrak{z})}{dv}\sin 4(\mathrm{v}-\mathrm{v}') + 8(\mathfrak{z}')\cos(\mathrm{v}-\mathrm{v}') + 8(\mathfrak{z}')\cos 3(\mathrm{v}-\mathrm{v}'),$$

$$M_5 = -10(\mathfrak{z})\cos(\mathrm{v}-\mathrm{v}') - 10(\mathfrak{z})\cos 3(\mathrm{v}-\mathrm{v}') - 5(\mathfrak{z})\cos 5(\mathrm{v}-\mathrm{v}')$$
$$+ \frac{5}{2}\frac{d(\mathfrak{z})}{dv}\sin 5(\mathrm{v}-\mathrm{v}') + 5(\mathfrak{z}') + 10(\mathfrak{z}')\cos 2(\mathrm{v}-\mathrm{v}') + 10(\mathfrak{z}')\cos 4(\mathrm{v}-\mathrm{v}'),$$

$$M_6 = -6(\mathfrak{z}) - 12(\mathfrak{z})\cos 2(\mathrm{v}-\mathrm{v}') - 12(\mathfrak{z})\cos 4(\mathrm{v}-\mathrm{v}') - 6(\mathfrak{z})\cos 6(\mathrm{v}-\mathrm{v}')$$
$$+ 3\frac{d(\mathfrak{z})}{dv}\sin 6(\mathrm{v}-\mathrm{v}') + 12(\mathfrak{z}')\cos(\mathrm{v}-\mathrm{v}') + 12(\mathfrak{z}')\cos 3(\mathrm{v}-\mathrm{v}')$$
$$+ 12(\mathfrak{z}')\cos 5(\mathrm{v}-\mathrm{v}'),$$

$$M_7 = -14(\mathfrak{z})\cos(\mathrm{v}-\mathrm{v}') - 14(\mathfrak{z})\cos 3(\mathrm{v}-\mathrm{v}') - 14(\mathfrak{z})\cos 5(\mathrm{v}-\mathrm{v}') - 7(\mathfrak{z})\cos 7(\mathrm{v}-\mathrm{v}')$$
$$+ \frac{7}{2}\frac{d(\mathfrak{z})}{dv}\sin 7(\mathrm{v}-\mathrm{v}') + 14(\mathfrak{z}') + 14(\mathfrak{z}')\cos 2(\mathrm{v}-\mathrm{v}') + 14(\mathfrak{z}')\cos 4(\mathrm{v}-\mathrm{v}')$$
$$+ 14(\mathfrak{z}')\cos 6(\mathrm{v}-\mathrm{v}'),$$

. . .

$$N_n = \frac{n}{2}(3) \sin n(v - v'),$$

$$P_1 = -\frac{1}{2}\cos(v - v'),$$

$$P_2 = -1 - \cos 2(v - v'),$$

$$P_3 = -3\cos(v - v') - \frac{3}{2}\cos 3(v - v'),$$

$$P_4 = -2 - 4\cos 2(v - v') - 2\cos 4(v - v'),$$

$$P_5 = -5\cos(v - v') - 5\cos 3(v - v') - \frac{5}{2}\cos 5(v - v'),$$

$$P_6 = -3 - 6\cos 2(v - v') - 6\cos 4(v - v') - 3\cos 6(v - v'),$$

$$P_7 = -7\cos(v - v') - 7\cos 3(v - v') - 7\cos 5(v - v') - \frac{7}{2}\cos 7(v - v'),$$

. . . .

$$Q_n = \frac{n}{2}\sin n(v - v'),$$

$$R_1 = 1,$$

$$R_2 = 4\cos(v - v'),$$

$$R_3 = 3 + 6\cos 2(v - v'),$$

$$R_4 = 8\cos(v - v') + 8\cos 3(v - v'),$$

$$R_5 = 5 + 10\cos 2(v - v') + 10\cos 4(v - v'),$$

$$R_6 = 12\cos(v - v') + 12\cos 3(v - v') + 12\cos 5(v - v'),$$

$$R_7 = 7 + 14\cos 2(v - v') + 14\cos 4(v - v') + 14\cos 6(v - v'),$$

. . .

On pourrait encore exprimer les M_n et les N_n au moyen des fonctions $I\sin(\Omega - \Theta)$, $I\cos(\Omega - \Theta)$, $I'\sin(\Omega' - \Theta')$ et $I'\cos(\Omega' - \Theta')$. Mais bien que les résultats s'obtiennent assez facilement, je les omets pourtant, vu qu'on n'a besoin que de quelques termes, lesquels on cherchera, selon les circonstances des divers cas, séparément des autres.

52. En ne considérant que le but immédiat du travail présent, on pourrait s'arrêter aux résultats relatifs aux $\cos nH$ qu'on a obtenus dans les derniers numéros; on saurait, en effet, en tirer les règles du calcul destinées à déterminer les coefficients anastématiques tant que ceux-là sont sensibles dans les théories des planètes principales. Mais il y a d'autres raisons pour lesquelles il paraît utile d'étendre, un peu, les recherches sur les manières d'exprimer les $\cos nH$: je pense en première ligne à l'application du théorème important de M. Tisserand, en vertu duquel on obtient l'expression de $\cos nH$ quand celle de $\cos H$ est donnée moyennant la formule

$$(13) \qquad \cos H = \mu \cos x + \nu \cos y,$$

les coefficients μ et ν étant assujettis à la condition

$$\mu + \nu = 1.$$[1]

La mise en usage du théorème mentionné est en effet le moyen le plus efficace d'établir les expressions dont il s'agit, quand l'inclinaison mutuelle entre les plans instantanés des deux planètes n'est pas très petite.

En adoptant le développement

$$(14) \quad \cos nH = Q^{(n)}_{0,0} + 2\Sigma Q^{(n)}_{i,0} \cos ix + 2\Sigma Q^{(n)}_{0,j} \cos jy + 4\Sigma\Sigma Q^{(n)}_{i,j} \cos ix \cos jy,$$

qui, si l'on admet des valeurs des indices tant positives que négatives et qu'on établisse les équations

$$Q^{(n)}_{i,j} = Q^{(n)}_{-i,j} = Q^{(n)}_{i,-j} = Q^{(n)}_{-i,-j},$$

s'écrit de la manière suivante

$$\cos nH = \Sigma\Sigma Q^{(n)}_{i,j} \cos ix \cos jy,$$

on trouvera la formule

$$Q^{(n+1)}_{i,j} + Q^{(n-1)}_{i,j} = \mu[Q^{(n)}_{i-1,j} + Q^{(n)}_{i+1,j}] + \nu[Q^{(n)}_{i,j-1} + Q^{(n)}_{i,j+1}],$$

au moyen de laquelle on peut calculer les coefficients $Q^{(n)}$ de proche en proche. En partant des valeurs

$$Q^{(0)}_{0,0} = 1; \qquad Q^{(1)}_{1,0} = \frac{1}{2}\mu; \qquad Q^{(1)}_{0,1} = \frac{1}{2}\nu,$$

[1] Voir le mémoire de M. Tisserand inséré dans le T. XV des annales de l'observatoire de Paris (Mémoires) et encore son traité de la mécanique céleste, T. I, chap. XXVIII.

on obtient facilement les expressions suivantes:

$$Q^{(2)}_{2.0} = \frac{1}{2}\mu^2,$$

$$Q^{(2)}_{1.1} = \mu\nu,$$

$$Q^{(2)}_{0.2} = \frac{1}{2}\nu^2,$$

$$Q^{(2)}_{0.0} = -2\mu\nu,$$

$$Q^{(3)}_{3.0} = \frac{1}{2}\mu^3,$$

$$Q^{(3)}_{2.1} = \frac{3}{2}\mu^2\nu,$$

$$Q^{(3)}_{1.2} = \frac{3}{2}\mu\nu^2,$$

$$Q^{(3)}_{0.3} = \frac{1}{2}\nu^3,$$

$$Q^{(3)}_{1.0} = \frac{3}{2}\mu\nu(1 - 3\mu),$$

$$Q^{(3)}_{0.1} = \frac{3}{2}\mu\nu(1 - 3\nu),$$

$$Q^{(4)}_{4.0} = \frac{1}{2}\mu^4,$$

$$Q^{(4)}_{3.1} = 2\mu^3\nu,$$

$$Q^{(4)}_{2.2} = 3\mu^2\nu^2,$$

$$Q^{(4)}_{1.3} = 2\mu\nu^3,$$

$$Q^{(4)}_{0.4} = \frac{1}{2}\nu^4,$$

$$Q^{(4)}_{2.0} = -4\mu^2\nu(1 - 2\nu),$$

$$Q^{(4)}_{1.1} = \quad 2\mu\nu 1 - 6\mu\nu,$$

$$Q^{(4)}_{0.2} = -4\mu\nu^2(1 - 2\mu),$$

$$Q^{(4)}_{0.0} = -4\mu\nu\left(1 - \frac{9}{2}\mu\nu\right).$$

Certes, on pourrait continuer le calcul de ces coefficients aussi loin qu'on voudrait; cependant, si n acquérait des valeurs plus grandes que celles que nous avons considérées, il serait plus aisé de déduire les coefficients suivants en utilisant le théorème de M. TISSERAND, dont voici le teneur.

Soit:

$$\frac{\sin(n+1)H}{\sin H} = R_{0,0}^{(n)} + 2\Sigma R_{i,0}^{(n)} \cos ix + 2\Sigma R_{0,j}^{(n)} \cos jy + 4\Sigma\Sigma R_{i,j}^{(n)} \cos ix \cos jy,$$

on aura, en vertu de l'équation

$$2 \cos nH = \frac{\sin(n+1)H}{\sin H} - \frac{\sin(n-1)H}{\sin H},$$

la relation

$$Q_{i,j}^{(n)} = \frac{1}{2}\left(R_{i,j}^{(n)} - R_{i,j}^{(n-2)}\right).$$

Or, M. TISSERAND est parvenu à représenter les quantités R au moyen de la formule

$$R_{i,j}^{(n)} = \frac{[(n-j+2)^2 - i^2][(n-j+4)^2 - i^2]\ldots[(n+j)^2 - i^2]}{(2.4\ldots 2j)^2}$$

$$\times \mu^i\nu^j\left(F\left(\frac{i+j-n}{2}, \frac{i+j+n+2}{2}, j+1, \nu\right)\right)^2,$$

où, en supposant $i+j-n$ pair et négatif, il a désigné, par $F(\alpha, \beta, \gamma, \nu)$ la série hypergéométrique de GAUSS: les coefficients demandés s'obtiennent ainsi d'une manière directe.

On voit par là que le coefficient $Q_{i,j}^{(n)}$ renferme toujours le facteur $\mu^i\nu^j$, remarque qui nous sera utile prochainement.

53. Nous allons maintenant mettre la fonction $\cos H$ sous la forme de l'équation (13). Considérons, à cet effet, deux triangles sphériques formés, sur la sphère céleste, l'un par le plan fixe et les plans instantanés des deux planètes, et l'autre, par le plan des trois corps, le soleil et les deux planètes.

En conservant les notations du chap. II du premier livre, et en désignant par Σ et Σ'' les longitudes du noeud commun des deux plans in-

stantanés, ces longitudes comptées dans les orbites respectives à partir des mêmes origines que celles des angles σ et $\bar{\sigma}$, et, par J l'inclinaison mutuelle des deux plans, on aura tout d'abord:

$$(15)\qquad \cos H = \cos(v - \Sigma)\cos(v' - \Sigma') + \sin(v - \Sigma)\sin(v' - \Sigma')\cos J,$$

ainsi que les formules suivantes:

$$(16)\quad \begin{cases} \sin\frac{1}{2}J\sin\frac{1}{2}(\Sigma' - \sigma' + \Sigma - \sigma) = \sin\frac{1}{2}(\theta - \theta')\sin\frac{1}{2}(i + i'), \\ \sin\frac{1}{2}J\cos\frac{1}{2}(\Sigma' - \sigma' + \Sigma - \sigma) = \cos\frac{1}{2}(\theta - \theta')\sin\frac{1}{2}(i - i'), \\ \cos\frac{1}{2}J\sin\frac{1}{2}(\Sigma' - \sigma' - (\Sigma - \sigma)) = \sin\frac{1}{2}(\theta - \theta')\cos\frac{1}{2}(i + i'), \\ \cos\frac{1}{2}J\cos\frac{1}{2}(\Sigma' - \sigma' - (\Sigma - \sigma)) = \cos\frac{1}{2}(\theta - \theta')\cos\frac{1}{2}(i - i'), \end{cases}$$

et encore celles-ci:

$$(17)\qquad \cos J = \cos i\cos i' + \sin i\sin i'\cos(\theta - \theta'),$$

$$(18)\quad \begin{cases} \sin J\sin(\Sigma - \sigma) = \sin i\sin(\theta - \theta'), \\ \sin J\cos(\Sigma - \sigma) = \sin i\cos i' - \cos i\sin i'\cos(\theta - \theta'), \\ \sin J\sin(\Sigma' - \sigma') = \sin i\sin(\theta - \theta'), \\ \sin J\cos(\Sigma' - \sigma') = -\cos i\sin i' + \sin i\cos i'\cos(\theta - \theta'). \end{cases}$$

Maintenant, si l'on met l'équation (15) sous la forme

$$\cos H = \cos\frac{1}{2}J^2\cos(v - \Sigma - (v' - \Sigma')) + \sin\frac{1}{2}J^2\sin(v - \Sigma + v' - \Sigma'),$$

et qu'on la rapproche de l'équation (13), il s'ensuit qu'on doit mettre

$$\mu = \cos\frac{1}{2}J^2;\qquad \nu = \sin\frac{1}{2}J^2;$$

$$x = v - \Sigma - (v' - \Sigma');\qquad y = v - \Sigma + v' - \Sigma'.$$

Nous voilà donc au terme de nos préparations. Pour avoir les expressions des $\cos nH$, il suffit, en effet, d'introduire, dans les formules de

M. Tisserand, les valeurs signalées de μ et ν, de x et y. Mais les résultats qu'on obtient ainsi, n'étant toutefois utiles au calcul des termes élémentaires que dans des cas spéciaux, il faut les transformer ultérieurement. Il faut, en effet, exprimer les coefficients μ et ν, par les fonctions anastématiques et remplacer les longitudes Σ et Σ' par σ et σ'. Dans le cas de trois corps seulement, cette transformation s'opère immédiatement. On sait, en effet, que les points d'intersection des deux plans instantanés restent, dans ce cas, constamment dans le plan invariable du système, d'où l'on conclut la relation

$$\theta - \theta' = 180^\circ.$$

En vertu des équations (16) et (17), il sera maintenant facile d'obtenir les valeurs

$$J = i + i',$$

$$\sigma = \Sigma; \qquad \sigma' = \Sigma' - 180^\circ,$$

avec lesquelles on parviendra, facilement, aux formules transformées.

C'est autrement dans le cas général, où l'on envisage les actions de plusieurs planètes, s'attirant mutuellement. Les transformations demandées étant alors plus laborieuses à exécuter, on les opère à plusieurs reprises, en commençant par mettre les fonctions $\cos nH$ sous la forme

$$\begin{aligned}\cos nH = \Sigma A\mu^p\nu^q \{ & e^{\sqrt{-1}[p(v-\Sigma-(v'-\Sigma'))+q(v-\Sigma+v'-\Sigma')]} \\ & + e^{\sqrt{-1}[p(v-\Sigma-(v'-\Sigma'))-q(v-\Sigma+v'-\Sigma')]} \\ & + e^{-\sqrt{-1}[p(v-\Sigma-(v'-\Sigma'))+q(v-\Sigma+v'-\Sigma')]} \\ & + e^{-\sqrt{-1}[p(v-\Sigma-(v'-\Sigma'))-q(v-\Sigma+v'-\Sigma')]}\},\end{aligned}$$

A étant un agrégat fini de puissances entières de ν, ou de μ, chacune multipliée par un certain nombre rationel, et p et q, des entiers positifs. Evidemment, cette formule s'écrit aussi de la manière suivante:

$$(19) \quad \begin{aligned}\cos nH = \Sigma A\mu^p\nu^q \{ & e^{\sqrt{-1}[-p(\Sigma-\sigma-(\Sigma'-\sigma'))-q(\Sigma-\sigma+\Sigma'-\sigma')+p(v-\sigma-(v'-\sigma'))+q(v-\sigma+v'-\sigma')]} \\ & + e^{\sqrt{-1}[-p(\Sigma-\sigma-(\Sigma'-\sigma'))+q(\Sigma-\sigma+\Sigma'-\sigma')+p(v-\sigma-(v'-\sigma'))-q(v-\sigma+v'-\sigma')]} \\ & + e^{-\sqrt{-1}[-p(\Sigma-\sigma-(\Sigma'-\sigma'))-q(\Sigma-\sigma+\Sigma'-\sigma')+p(v-\sigma-(v'-\sigma'))+q(v-\sigma+v'-\sigma')]} \\ & + e^{-\sqrt{-1}[-p(\Sigma-\sigma-(\Sigma'-\sigma'))+q(\Sigma-\sigma+\Sigma'-\sigma')+p(v-\sigma-(v'-\sigma'))-q(v-\sigma+v'-\sigma')]}\}.\end{aligned}$$

Or, puisqu'on a:

$$v - \sigma = \mathrm{v} - \theta; \qquad v' - \sigma' = \mathrm{v}' - \theta',$$

il serait facile d'exprimer les $\cos nH$ au moyen de i, i', θ et θ', pourvu qu'on eût établi de pareilles expressions de $\mu e^{\pm\sqrt{-1}(\Sigma''-\sigma'-(\Sigma-\sigma))}$ et de $\nu e^{\pm\sqrt{-1}(\Sigma''-\sigma'+\Sigma-\sigma)}$. Mais celles-ci s'obtiennent aisément en vertu des équations (16). On en tire, en formant le produit de la première avec la deuxième et celui de la troisiéme avec la quatrième, ainsi que les carrés de la première et de la troisième ou de la deuxième et de la quatrième, les équations que voici:

$$(20)\left\{\begin{aligned}
&\sin\tfrac{1}{2}J^2\sin(\Sigma''-\sigma'+\Sigma-\sigma)=\tfrac{1}{2}(\cos i'-\cos i)\sin(\theta-\theta'),\\
&\sin\tfrac{1}{2}J^2\cos(\Sigma''-\sigma'+\Sigma-\sigma)=\tfrac{1}{2}\cos J-\tfrac{1}{2}\cos(i'-i)+\tfrac{1}{2}\cos(\theta-\theta')\\
&\qquad\qquad-\tfrac{1}{2}\cos(i'-i)\cos(\theta-\theta'),\\
&\cos\tfrac{1}{2}J^2\sin(\Sigma''-\sigma'-(\Sigma-\sigma))=\tfrac{1}{2}(\cos i+\cos i')\sin(\theta-\theta'),\\
&\cos\tfrac{1}{2}J^2\cos(\Sigma''-\sigma'-(\Sigma-\sigma))=-\tfrac{1}{2}\cos J+\tfrac{1}{2}\cos(i'-i)+\tfrac{1}{2}\cos(\theta-\theta')\\
&\qquad\qquad+\tfrac{1}{2}\cos(i'-i)\cos(\theta-\theta'),
\end{aligned}\right.$$

et si l'on y porte les valeurs

$$\cos i = 1-\tfrac{1}{2}\sin i^2(1+f);\qquad \cos i' = 1-\tfrac{1}{2}\sin i'^2(1+f')$$

ainsi que celle de $\cos J$ donnée par l'équation (17), on parvient, après quelques réductions faciles, aux résultats suivants:

$$\sin\tfrac{1}{2}J^2\sin(\Sigma''-\sigma'+\Sigma-\sigma)=\tfrac{1}{4}\left[\sin i^2(1+f)-\sin i'^2(1+f')\right]\sin(\theta-\theta'),$$

$$\begin{aligned}\sin\tfrac{1}{2}J^2\cos(\Sigma''-\sigma'+\Sigma-\sigma)=-\tfrac{1}{2}\sin i\sin i'+\Big[&\tfrac{1}{4}\sin i^2(1+f)+\tfrac{1}{4}\sin i'^2(1+f')\\ &-\tfrac{1}{8}\sin i^2\sin i'^2(1+f)(1+f')\Big]\cos(\theta-\theta'),\end{aligned}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}J^2\sin(\Sigma''-\sigma'-(\Sigma-\sigma))=\left[1-\tfrac{1}{4}\sin i^2(1+f)-\tfrac{1}{4}\sin i'^2(1+f')\right]\sin(\theta-\theta'),$$

$$\begin{aligned}\cos\tfrac{1}{2}J^2\cos(\Sigma''-\sigma'-(\Sigma-\sigma))=\tfrac{1}{2}\sin i\sin i'+\Big[&1-\tfrac{1}{4}\sin i^2(1+f)-\tfrac{1}{4}\sin i'^2(1+f')\\ &-\tfrac{1}{8}\sin i^2\sin i'^2(1+f)(1+f')\Big]\cos(\theta-\theta'),\end{aligned}$$

d'où découlent immédiatement les relations:

$$
(21)\left\{
\begin{aligned}
\nu e^{\sqrt{-1}(\Sigma'-\sigma'+\Sigma-\sigma)} &= -\frac{1}{2}\sin i \sin i' + \frac{1}{4}\sin i^2(1+\mathrm{f})e^{\sqrt{-1}(\theta-\theta')} \\
&\qquad + \frac{1}{4}\sin i'^2(1+\mathrm{f}')e^{-\sqrt{-1}(\theta-\theta')} \\
&\qquad - \frac{1}{16}\sin i^2 \sin i'^2(1+\mathrm{f})(1+\mathrm{f}')(e^{\sqrt{-1}(\theta-\theta')} + e^{-\sqrt{-1}(\theta-\theta')}), \\
\nu e^{-\sqrt{-1}(\Sigma'-\sigma'+\Sigma-\sigma)} &= -\frac{1}{2}\sin i \sin i' + \frac{1}{4}\sin i^2(1+\mathrm{f})e^{-\sqrt{-1}(\theta-\theta')} \\
&\qquad + \frac{1}{4}\sin i^2(1+\mathrm{f}')e^{\sqrt{-1}(\theta-\theta')} \\
&\qquad - \frac{1}{16}\sin i^2 \sin i'^2(1+\mathrm{f})(1+\mathrm{f}')(e^{\sqrt{-1}(\theta-\theta')} + e^{-\sqrt{-1}(\theta-\theta')}), \\
\mu e^{\sqrt{-1}(\Sigma'-\sigma'-(\Sigma-\sigma))} &= \frac{1}{2}\sin i \sin i' + \Big[1 - \frac{1}{4}\sin i^2(1+\mathrm{f}) \\
&\qquad - \frac{1}{4}\sin i'^2(1+\mathrm{f}')\Big]e^{\sqrt{-1}(\theta-\theta')} \\
&\qquad - \frac{1}{16}\sin i^2 \sin i'^2(1+\mathrm{f})(1+\mathrm{f}')(e^{\sqrt{-1}(\theta-\theta')} + e^{-\sqrt{-1}(\theta-\theta')}), \\
\mu e^{-\sqrt{-1}(\Sigma'-\sigma'-(\Sigma-\sigma))} &= \frac{1}{2}\sin i \sin i' + \Big[1 - \frac{1}{4}\sin i^2(1+\mathrm{f}) \\
&\qquad - \frac{1}{4}\sin i'^2(1+\mathrm{f}')\Big]e^{-\sqrt{-1}(\theta-\theta')} \\
&\qquad - \frac{1}{16}\sin i^2 \sin i'^2(1+\mathrm{f})(1+\mathrm{f}')(e^{\sqrt{-1}(\theta-\theta')} + e^{-\sqrt{-1}(\theta-\theta')})
\end{aligned}
\right.
$$

Avant d'aller plus loin, je remarque que la somme de la deuxième et de la quatrième des équations (20) donne immédiatement:

$$
\begin{aligned}
\cos(\theta-\theta') &= \cos\frac{1}{2}J^2\cos(\Sigma'-\sigma'-(\Sigma-\sigma)) + \sin\frac{1}{2}J^2\cos(\Sigma'-\sigma'+\Sigma-\sigma) \\
&= \cos(\Sigma'-\sigma')\cos(\Sigma-\sigma) + \sin(\Sigma'-\sigma')\sin(\Sigma-\sigma)\cos J,
\end{aligned}
$$

équation qui résulte d'ailleurs du premier des triangles sphériques mentionnés un peu plus haut.

Mais revenons à l'équation (19), et introduisons-y les valeurs qu'on a données au moyen des équations (21). On obtient de la sorte:

$$(22)\quad \cos nH = \sum A \Bigg\{ \Bigg[1 - \frac{1}{4}\sin i^2(1+\mathrm{f}) - \frac{1}{4}\sin i'^2(1+\mathrm{f}') \Bigg] e^{\sqrt{-1}(v-v')}$$

$$+ \frac{1}{2}\sin i \sin i' e^{\sqrt{-1}(v-v'-(\theta-\theta'))}$$

$$- \frac{1}{16}\sin i^2 \sin i'^2(1+\mathrm{f})(1+\mathrm{f}')\left(e^{\sqrt{-1}(v-v')} + e^{\sqrt{-1}(v-v'-2(\theta-\theta'))}\right)\Bigg\}^p$$

$$\times \Bigg\{ \frac{1}{4}\sin i^2(1+\mathrm{f}) e^{\sqrt{-1}(v+v'-2\theta)} + \frac{1}{4}\sin i'^2(1+\mathrm{f}') e^{\sqrt{-1}(v+v'-2\theta')}$$

$$- \frac{1}{2}\sin i \sin i' e^{\sqrt{-1}(v+v'-(\theta+\theta'))}$$

$$- \frac{1}{16}\sin i^2 \sin i'^2(1+\mathrm{f})(1+\mathrm{f}')\left(e^{\sqrt{-1}(v+v'-2\theta)} + e^{\sqrt{-1}(v+v'-2\theta')}\right)\Bigg\}^q$$

$$+ \sum A \Bigg\{ \Bigg[1 - \frac{1}{4}\sin i^2(1+\mathrm{f}) - \frac{1}{4}\sin i'^2(1+\mathrm{f}') \Bigg] e^{\sqrt{-1}(v-v')}$$

$$+ \frac{1}{2}\sin i \sin i' e^{\sqrt{-1}(v-v'-(\theta-\theta'))}$$

$$- \frac{1}{16}\sin i^2 \sin i'^2(1+\mathrm{f})(1+\mathrm{f}')\left(e^{\sqrt{-1}(v-v')} + e^{\sqrt{-1}(v-v'-2(\theta-\theta'))}\right)\Bigg\}^p$$

$$\times \Bigg\{ \frac{1}{4}\sin i^2(1+\mathrm{f}) e^{-\sqrt{-1}(v+v'-2\theta)} + \frac{1}{4}\sin i'^2(1+\mathrm{f}') e^{-\sqrt{-1}(v+v'-2\theta')}$$

$$- \frac{1}{2}\sin i \sin i' e^{-\sqrt{-1}(v+v'-(\theta+\theta'))}$$

$$- \frac{1}{16}\sin i^2 \sin i'^2(1+\mathrm{f})(1+\mathrm{f}')\left(e^{-\sqrt{-1}(v+v'-2\theta)} + e^{-\sqrt{-1}(v+v'-2\theta')}\right)\Bigg\}^q$$

$$+ \sum A \Bigg\{ \Bigg[1 - \frac{1}{4}\sin i^2(1+\mathrm{f}) - \frac{1}{4}\sin i'^2(1+\mathrm{f}') \Bigg] e^{-\sqrt{-1}(v-v')}$$

$$+ \frac{1}{2}\sin i \sin i' e^{-\sqrt{-1}(v-v'-(\theta-\theta'))}$$

$$- \frac{1}{16}\sin i^2 \sin i'^2(1+\mathrm{f})(1+\mathrm{f}')\left(e^{-\sqrt{-1}(v-v')} + e^{-\sqrt{-1}(v-v'-2(\theta-\theta'))}\right)\Bigg\}^p$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$\times\left\{\frac{1}{4}\sin i^2(1+\mathrm{f})e^{\sqrt{-1}(\mathrm{v}+\mathrm{v}'-2\theta)}+\frac{1}{4}\sin i'^2(1+\mathrm{f}')e^{\sqrt{-1}(\mathrm{v}+\mathrm{v}'-2\theta')}\right.$$

$$-\frac{1}{2}\sin i\sin i' e^{-\sqrt{-1}(\mathrm{v}+\mathrm{v}'-(\theta+\theta'))}$$

$$\left.-\frac{1}{16}\sin i^2\sin i'^2(1+\mathrm{f})(1+\mathrm{f}')(e^{-\sqrt{-1}(\mathrm{v}+\mathrm{v}'-2\theta)}+e^{\sqrt{-1}(\mathrm{v}+\mathrm{v}'-2\theta')})\right\}^q$$

$$+\sum A\left\{\left[1-\frac{1}{4}\sin i^2(1+\mathrm{f})-\frac{1}{4}\sin i'^2(1+\mathrm{f}')\right]e^{\sqrt{-1}(\mathrm{v}-\mathrm{v}')}\right.$$

$$+\frac{1}{2}\sin i\sin i' e^{\sqrt{-1}(\mathrm{v}-\mathrm{v}'-(\theta-\theta'))}$$

$$\left.-\frac{1}{16}\sin i^2\sin i'^2(1+\mathrm{f})(1+\mathrm{f}')(e^{\sqrt{-1}(\mathrm{v}-\mathrm{v}')}+e^{\sqrt{-1}(\mathrm{v}-\mathrm{v}'-2(\theta-\theta'))})\right\}^p$$

$$\times\left\{\frac{1}{4}\sin i^2(1+\mathrm{f})e^{\sqrt{-1}(\mathrm{v}+\mathrm{v}'-2\theta)}+\frac{1}{4}\sin i'^2(1+\mathrm{f}')e^{\sqrt{-1}(\mathrm{v}+\mathrm{v}'-2\theta')}\right.$$

$$-\frac{1}{2}\sin i\sin i' e^{\sqrt{-1}(\mathrm{v}+\mathrm{v}'-(\theta+\theta'))}$$

$$\left.-\frac{1}{16}\sin i^2\sin i'^2(1+\mathrm{f})(1+\mathrm{f}')(e^{\sqrt{-1}(\mathrm{v}+\mathrm{v}'-2\theta)}+e^{\sqrt{-1}(\mathrm{v}+\mathrm{v}'-2\theta')})\right\}^{q'}$$

On voit sans peine que cette formule peut se transformer de manière à s'exprimer par les fonctions $Ie^{\sqrt{-1}(\Omega-\theta)}$ et $I'e^{\sqrt{-1}(\Omega-\theta)}$ et par les arguments v, v′, $\bar{\vartheta}$ et $\bar{\vartheta}'$. En effet, si l'on se rappelle les formules

$$\sin i e^{\sqrt{-1}\theta}=Ie^{\sqrt{-1}(\bar{\vartheta}+\Omega-\theta)}+(\zeta)e^{\sqrt{-1}\theta},$$

$$\sin i' e^{\sqrt{-1}\theta}=I'e^{\sqrt{-1}(\bar{\vartheta}'+\Omega-\theta)}+(\zeta')e^{\sqrt{-1}\theta},$$

qui découlent immédiatement des équations (31) du n° 32, on opérera facilement la transformation dont il s'agit, sans qu'il soit nécessaire d'en indiquer ici plus de détails.

Mais mettons encore en évidence l'expression de ν, dont les puissances entrent dans les coefficients A. Dans ce but, nous reprenons l'équation (17), qui nous donne sur-le-champ celle-ci:

$$2\nu=\frac{1}{2}\sin i^2(1+\mathrm{f})+\frac{1}{2}\sin i'^2(1+\mathrm{f}')-\sin i\sin i'\cos(\theta-\theta')$$

$$-\frac{1}{4}\sin i^2\sin i'^2(1+\mathrm{f})(1+\mathrm{f}')$$

Avec les formules que nous venons d'établir, il sera facile, en considérant l'équation (14) ainsi que les valeurs des différents $Q_{p,q}^{(n)}$, de former les expressions des $\cos nH$. Ainsi par exemple, on obtiendra l'expression de $\cos 2H$, en portant, dans l'équation (22), les valeurs

$$A = \frac{1}{4}; \qquad p = 2; \qquad q = 0,$$

$$A = 1; \qquad p = 1; \qquad q = 1,$$

$$A = \frac{1}{4}; \qquad p = 0; \qquad q = 2,$$

$$A = -\frac{1}{2}\nu(1-\nu); \qquad p = 0; \qquad q = 0.$$

Le calcul effectué, on retrouve, en effet, le résultat dont nous avons donné, dans le n° 50, les termes du degré zéro, du deuxième et du quatrième degré.

Ainsi, en partant du théorème de M. Tisserand, on a établi la théorie complète de la transformation des $\cos nH$.

54. Arrêtons nous encore à quelques relations qui pour diverses raisons peuvent avoir de l'intérêt.

Si nous mettons l'expression de $\cos H$ sous la forme

$$\cos H = A \cos v \cos v' + B_1 \sin v \sin v' + A_1 \cos v \sin v' + B \sin v \cos v', \tag{23}$$

il sera facile, en considérant l'équation (15), de conclure les valeurs suivantes des coefficients:

$$\left.\begin{aligned} A &= \cos\tfrac{1}{2}J^2 \cos(\Sigma - \Sigma'') + \sin\tfrac{1}{2}J^2 \cos(\Sigma + \Sigma''), \\ B_1 &= \cos\tfrac{1}{2}J^2 \cos(\Sigma - \Sigma'') - \sin\tfrac{1}{2}J^2 \cos(\Sigma + \Sigma''), \\ A_1 &= -\cos\tfrac{1}{2}J^2 \sin(\Sigma - \Sigma'') + \sin\tfrac{1}{2}J^2 \sin(\Sigma + \Sigma''), \\ B &= \cos\tfrac{1}{2}J^2 \sin(\Sigma - \Sigma'') + \sin\tfrac{1}{2}J^2 \sin(\Sigma + \Sigma''). \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Mais on obtient aussi ces coefficients, d'une autre manière qui nous permettra de reconnaître leur signification géométrique. Si nous introduisons, dans l'équation (1), les valeurs suivantes:

$$\frac{x}{r} = \alpha \cos v + \beta \sin v,$$

$$\frac{y}{r} = \alpha_1 \cos v + \beta_1 \sin v,$$

$$\frac{z}{r} = \alpha_2 \cos v + \beta_2 \sin v,$$

ainsi que celles-ci:

$$\frac{x'}{r} = \alpha' \cos v' + \beta' \sin v',$$

$$\frac{y'}{r} = \alpha'_1 \cos v' + \beta'_1 \sin v',$$

$$\frac{z'}{r} = \alpha'_2 \cos v' + \beta'_2 \sin v',$$

nous parviendrons facilement à exprimer les coefficients A, B, ... moyennant les formules

$$A = \alpha\alpha' + \alpha_1\alpha'_1 + \alpha_2\alpha'_2,$$

$$B = \alpha\beta' + \alpha_1\beta'_1 + \alpha_2\beta'_2,$$

$$A_1 = \alpha'\beta + \alpha'_1\beta_1 + \alpha'_2\beta_2,$$

$$B_1 = \beta\beta' + \beta_1\beta'_1 + \beta_2\beta'_2.$$

Ajoutons encore les formules suivantes:

$$\Gamma = \alpha\gamma' + \alpha_1\gamma'_1 + \alpha_2\gamma'_2,$$

$$\Gamma_1 = \beta\gamma' + \beta_1\gamma'_1 + \beta_2\gamma'_2,$$

$$A_2 = \alpha'\gamma + \alpha'_1\gamma_1 + \alpha'_2\gamma_2,$$

$$B_2 = \beta'\gamma + \beta'_1\gamma_1 + \beta'_2\gamma_2,$$

$$\Gamma_2 = \gamma\gamma' + \gamma_1\gamma'_1 + \gamma_2\gamma'_2.$$

Les quantités $\alpha, \beta, \ldots$ étant données de la manière la plus générale par les équations (d), (d′) et (d″) du n° 17, on peut toutefois les adopter telles qu'on les a déterminées par les équations (δ), (δ') et (δ'') du n° 21. Mais si l'on veut que le mouvement des axes dans les plans instantanés soit uniforme, on doit employer les formules (D), (D′) et (D″) du n° 22. Cependant, si l'on met l'angle v à la place de v, et v′ à la place de v', de sorte qu'on aura:

$$(25) \qquad \cos H = A \cos \mathrm{v} \cos \mathrm{v}' + B_1 \sin \mathrm{v} \sin \mathrm{v}' + A_1 \cos \mathrm{v} \sin \mathrm{v}' + B \sin \mathrm{v} \cos \mathrm{v}',$$

il est clair que les valeurs (δ), (δ') et (δ'') doivent être mises en usage.

Ainsi, on pourrait exprimer les coefficients dont il s'agit au moyen des angles i, i', θ et θ'. Mais on les obtient aussi, par une remarque assez simple, exprimés comme fonctions des angles J, Σ et Σ'. En effet, rien n'empêche qu'on ne considère pour un moment, comme invariables, les angles i', σ' et θ', et qu'on suppose alors:

$$i' = 0; \qquad \sigma' = \theta',$$

ce qui revient à supposer le plan fixe mobile et coincidant avec le plan instantané de la seconde planète. Cela posé, on reconnaît facilement que i devient égal à J, σ à Σ et θ à Σ'. D'où s'ensuivent les valeurs

$$\alpha' = \beta'_1 = \gamma'_2 = 1.$$

$$\alpha'_1 = \alpha'_2 = \beta' = \beta'_2 = \gamma' = \gamma'_1 = 0,$$

ce qui fait que les coefficients A, A_1, ... deviennent égaux aux coefficients α, α_1, ..., bien entendu qu'on introduise, dans les expressions (d), (d′) et (d″), les valeurs tout-à-l'heure signalées de i, σ et θ.

Voici les expressions qu'on obtient de la sorte:

$$(\partial) \qquad \begin{cases} A = \cos \Sigma \cos \Sigma' + \sin \Sigma \sin \Sigma' \cos J, \\ B = \sin \Sigma \cos \Sigma' - \cos \Sigma \sin \Sigma' \cos J, \\ \Gamma = \sin \Sigma \sin J, \end{cases}$$

$$(\partial') \qquad \begin{cases} A_1 = \cos \Sigma \sin \Sigma' - \sin \Sigma \cos \Sigma' \cos J, \\ B_1 = \sin \Sigma \sin \Sigma' + \cos \Sigma \cos \Sigma' \cos J, \\ \Gamma_1 = -\cos \Sigma' \sin J, \end{cases}$$

$$(\delta'') \quad \begin{cases} A_2 = -\sin\Sigma \sin J, \\ B_2 = \cos\Sigma \sin J, \\ \Gamma_2 = \cos J \end{cases}$$

Maintenant, rien de plus facile que de voir l'identité des expressions de A, A_1, B et B_1 avec celles que nous avons données par les équations (24).

En conséquence des résultats obtenus, il s'entend que les coefficients A, A_1, ... signifient les neuf cosinus servant à transformer les coordonnées rectangulaires rapportées au plan instantané de la première planète en d'autres appartenant au plan instantané de la seconde, et vice versâ.

On peut encore signaler la formule

$$g = -\frac{d\Sigma}{dt} + \cos J \frac{d\Sigma}{dt},$$

qui n'est qu'une simple conséquence de l'équation (22) du n° 19.

CHAPITRE III.

Divers développements procédant suivant les puissances des fonctions diastématiques et des fonctions anastématiques.

55. Dans ce dernier chapitre du livre présent, nous allons nous occuper du développement d'un produit de la forme générale

$$F^{(n)}_{s,s'} = \rho^s \rho'^{s'} \cos nH, \tag{1}$$

ρ et ρ' étant les fonctions qu'on a déterminées par la formule (20) du n° 9. Nous remplacerons ensuite les arguments entrant dès le début dans l'expression signalée, par d'autres, isocinétiques avec eux, afin de n'avoir finalement que des arguments dépendant d'une seule variable. Mais avant d'exécuter les dites transformations, nous nous arrêtons un moment en jetant un coup-d'oeil rétrospectif sur la nature des développements que nous venons d'obtenir dans les deux derniers chapitres et en vertu desquelles s'opèrent les transformations demandées.

D'abord, les expressions des $\cos nH$ établies dernièrement sont finies ou visiblement convergentes, bien que nous n'en ayons mis en évidence que les premiers termes. Il n'y a donc pas lieu de se soucier de la convergence lorsqu'il s'agit des développements suivant les puissances des fonctions anastématiques.

C'est autrement lorsqu'il s'agit des séries procédant suivant les puissances des fonctions diastématiques. Certes, une partie de ces développements ne forment que des polynômes finis, et parmi les développements infinis il y en a qui convergent, les fonctions diastématiques ayant des valeurs n'importe quelles entre zéro et l'unité. Mais une autre partie de ces développements là ne jouissent pas d'une convergence absolue, tant que les valeurs numériques des fonctions diastématiques ne sont pas inférieures à une certaine limite. C'est d'abord le développement de la différence des angles F et G qui cesse d'être convergent, ce développement procédant

suivant les multiples de G et les puissances de η, si la valeur numérique de la dernière quantité atteint la limite

$$\eta = 0.6627\ldots$$

Cette thèse, prouvée déjà par LAPLACE, a été vérifiée par CAUCHY, ROUCHÉ et d'autres savants, et finalement M. CALLANDREAU, dans une note insérée dans le T. III du Bulletin astronomique, a réussi d'en signaler une démonstration élégante et en même temps assez simple.

Or, pour les planètes principales, les fonctions diastématiques, telles que les ont déterminées, LE VERRIER et STOCKWELL, n'atteignent pas, ni même de loin, la limite indiquée.[1] On en conclut donc que les séries dont il s'agit maintenant, restent en vigueur avec les expressions qu'ont données les savants mentionnés, ce qui revient à dire: au moins durant un grand nombre de siècles. Ces expressions n'étant toutefois pas à l'abri de toute objection, ce sera le but même de notre propre travail de les remplacer par d'autres dont la convergence sera incontestable. Si ces nouvelles expressions donnent des limites supérieures peu différentes de celles qui résultent des séries antérieures, la convergence des séries procédant suivant les puissances des fonctions diastématiques sera manifestée.

Cette remarque faite, nous revenons au développement de l'expression (1).

56. Des développements que nous avons en vue, cherchons d'abord les parties indépendantes des fonctions anastématiques. Alors, il s'agit de développer une expression de la forme

(2) $$\rho^{s}\rho'^{s'}e^{[illegible]},$$

[1] Voici, suivant les résultats de M. STOCKWELL, les valeurs maxima des fonctions diastématiques relativement aux diverses planètes:

Planète	*Val. max de* η
Mercure	0.2322 . . .
Vénus	0.0762 . . .
La Terre	0.0697 . . .
Mars	0.1408 . . .
Jupiter	0.0608 . . .
Saturne	0.0843 . . .
Uranus	0.0779 . . .
Neptune	0.0145 . . .

i signifiant l'unité imaginaire. Evidemment, la partie réelle de cette expression est égale à la fonction $F^{(n)}_{s\,s'}$, si l'on néglige tous les coefficients anastématiques, vu qu'on a alors:

$$H = v - v'.$$

Quant à la partie imaginaire de l'expression signalée, on voit facilement qu'elle est égale à la dérivée partielle de la fonction $F^{(n)}_{s\,s'}$ par rapport à v, cette dérivée divisée par in, ou bien, à la dérivée partielle par rapport à v', divisée par $-in$, bien entendu toujours que les fonctions anastématiques soient supposées égales à zéro.

En vertu de l'expression

$$\rho = \eta \cos\left(v - \omega - (\pi - \Gamma)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\eta\left(e^{i(v-\omega-(\pi-\Gamma))} + e^{-i(v-\omega-(\pi-\Gamma))}\right),$$

nous aurons facilement celle-ci:

$$\rho^{s} = \left(\frac{1}{2}\eta\right)^{s}\Big\{e^{-is(\pi-\Gamma)+is(v-\omega)}$$

$$+ \frac{s}{1} e^{-i(s-2)(\pi-\Gamma)+i(s-2)(v-\omega)}$$

$$+ \frac{s(s-1)}{1.2} e^{-i(s-4)(\pi-\Gamma)+i(s-4)(v-\omega)}$$

$$+ \dots$$

$$+ e^{is(\pi-\Gamma)-is(v-\omega)}\Big\},$$

ainsi qu'une autre donnant $\rho'^{s'}$ parfaitement analogue à la précédente.

Ensuite, en multipliant les deux expressions, il résultera:

$$\rho^{s}\rho'^{s'} = \frac{1}{2^{s+s'}}\eta^{s}\eta'^{s'}\Big\{e^{-is(\pi-\Gamma)-is'(\pi-\Gamma')+is(v-\omega)+is'(v'-\omega')}$$

$$+ \frac{s'}{1} e^{-is(\pi-\Gamma)-i(s'-2)(\pi-\Gamma')+is(v-\omega)+i(s'-2)(v'-\omega')}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$+\frac{s(s-1)}{1.2}e^{i[s(\pi-\Gamma)-(s'-4)(\pi'-\Gamma')]+i[s(v-\omega)+(s'-4)(v'-\omega')]}$$

$$+\ldots$$

$$+\frac{s}{1}e^{i[(s-2)(\pi-\Gamma)-s'(\pi'-\Gamma')]+i[(s-2)(v-\omega)+s'(v'-\omega')]}$$

$$+\frac{s}{1}\frac{s'}{1}e^{i[(s-2)(\pi-\Gamma)-(s'-2)(\pi'-\Gamma')]+i[(s-2)(v-\omega)+(s'-2)(v'-\omega')]}$$

$$+\frac{s}{1}\frac{s'(s'-1)}{1.2}e^{i[(s-2)(\pi-\Gamma)-(s'-4)(\pi'-\Gamma')]+i[(s-2)(v-\omega)+(s'-4)(v'-\omega')]}$$

$$+\ldots$$

$$+\ldots\Big\},$$

et, si l'on porte ce résultat dans l'expression (2), on obtiendra:

$$(3)\qquad \rho^s\rho'^{s'}e^{in(v-v')}=\frac{1}{2^{s+s'}}\eta^s\eta'^{s'}\Big\{e^{i[s(\pi-\Gamma)-s'(\pi'-\Gamma')]+i[s(v-\omega)+n(v-\omega)+(s'-n)(v'-\omega')]}$$

$$+\frac{s'}{1}e^{i[s(\pi-\Gamma)-(s'-2)(\pi'-\Gamma')]+i[s(v-\omega)+n(v-\omega)+(s'-n-2)(v'-\omega')]}$$

$$+\ldots$$

$$+\frac{s}{1}e^{i[(s-2)(\pi-\Gamma)-s'(\pi'-\Gamma')]+i[(s-2)(v-\omega)+n(v-\omega)+(s'-n)(v'-\omega')]}$$

$$+\frac{s}{1}\frac{s'}{1}e^{i[(s-2)(\pi-\Gamma)-(s'-2)(\pi'-\Gamma')]+i[(s-2)(v-\omega)+n(v-\omega)+(s'-n-2)(v'-\omega')]}$$

$$+\ldots\Big\}.$$

Telle est l'expression générale du produit proposé, les fonctions anastématiques étant égales à zéro. On voit immédiatement que tous les arguments y entrant — à l'exception de ceux qui peuvent se trouver dans les expressions de $\eta e^{\pm i(\pi-\Gamma)}$ et de $\eta' e^{\pm i(\pi'-\Gamma')}$ — dépendent de trois éléments, à savoir de $v-\omega$, $v-\omega'$ et $v'-\omega'$; mais ce dernier élément peut être remplacé, au moyen de la relation (19') du n° 42, par les éléments $v-\omega$ et $V+U$, de sorte que, après avoir effectué les transformations nécessaires,

on obtient un résultat dépendant des trois arguments $v-\omega$, $v-\omega'$ et $V+U$, ainsi que de leurs multiples.

Voici, pour les différentes valeurs des indices s et s', les expressions transformées: pour abréger, on y a supprimé la quantité U, qui doit, dans l'usage des formules données ci-après, être placée à côté de V.

$$(4, 0, 0) \qquad e^{in(v-v')} = e^{in(v-\omega')}\sum H_{-n,-n+\nu}e^{-i(n-\nu)V},$$

$$(4, 1, 0) \qquad \rho e^{in(v-v')} = \frac{1}{2}\eta e^{-i(\pi-\Gamma)+i[(n+1)v-\omega-n\omega']}\sum H_{-n,-n+\nu}e^{-i(n-\nu)V}$$
$$+\frac{1}{2}\eta e^{i(\pi-\Gamma)+i[(n-1)v+\omega-n\omega']}\sum H_{-n,-n+\nu}e^{-i(n-\nu)V},$$

$$(4, 0, 1) \qquad \rho' e^{in(v-v')} = \frac{1}{2}\eta' e^{-i(\pi'-\Gamma')+in(v-\omega)}\sum H_{-n+1,-n+1+\nu}e^{-i(n-1-\nu)V}$$
$$+\frac{1}{2}\eta' e^{i(\pi'-\Gamma')+in(v-\omega)}\sum H_{-n-1,-n-1+\nu}e^{-i(n+1-\nu)V},$$

$$(4, 2, 0) \qquad \rho^2 e^{in(v-v')} = \frac{1}{2}\eta^2 e^{in(v-\omega)}\sum H_{-n,-n+\nu}e^{-i(n-\nu)V}$$
$$+\frac{1}{4}\eta^2 e^{-2i(\pi-\Gamma)+i[(n+2)v-2\omega-n\omega']}\sum H_{-n,-n+\nu}e^{-i(n-\nu)V}$$
$$+\frac{1}{4}\eta^2 e^{2i(\pi-\Gamma)+i[(n-2)v+2\omega-n\omega']}\sum H_{-n,-n+\nu}e^{-i(n-\nu)V},$$

$$(4, 1, 1) \qquad \rho\rho' e^{in(v-v')} = \frac{1}{4}\eta\eta' e^{-i(\pi-\Gamma)-i(\pi'-\Gamma')+i[(n+1)v-\omega-n\omega']}\sum H_{-n+1,-n+1+\nu}e^{-i(n-1-\nu)V}$$
$$+\frac{1}{4}\eta\eta' e^{-i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')+i[(n+1)v-\omega-n\omega']}\sum H_{-n-1,-n-1+\nu}e^{-i(n+1-\nu)V}$$
$$+\frac{1}{4}\eta\eta' e^{i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')+i[(n-1)v+\omega-n\omega']}\sum H_{-n-1,-n-1+\nu}e^{-i(n+1-\nu)V}$$
$$+\frac{1}{4}\eta\eta' e^{i(\pi-\Gamma)-i(\pi'-\Gamma')+i[(n-1)v+\omega-n\omega']}\sum H_{-n+1,-n+1+\nu}e^{-i(n-1-\nu)V},$$

$$(4, 0, 2) \qquad \rho'^2 e^{in(v-v')} = \frac{1}{2}\eta'^2 e^{in(v-\omega)}\sum H_{-n,-n+\nu}e^{-i(n-\nu)V}$$
$$+\frac{1}{4}\eta'^2 e^{-2i(\pi'-\Gamma')+in(v-\omega)}\sum H_{-n+2,-n+2+\nu}e^{-i(n-2-\nu)V}$$
$$+\frac{1}{4}\eta'^2 e^{2i(\pi'-\Gamma')+in(v-\omega)}\sum H_{-n-2,-n-2+\nu}e^{-i(n+2-\nu)V},$$

$$(4,3,0)\quad \rho^3 e^{in(v-\omega)} = \frac{1}{8}\eta^3 e^{-3i(\pi-\Gamma)+i[(n+3)v-3\omega-n\omega]}\sum H_{n,\,n+\nu}\, e^{-i(n-\nu)V}$$
$$+\frac{1}{8}\eta^3 e^{3i(\pi-\Gamma)+i[(n-3)v+3\omega-n\omega]}\sum H_{-n,\,-n+\nu}\, e^{-i(n-\nu)V}$$
$$+\frac{3}{8}\eta^3 e^{-i(\pi-\Gamma)+i[(n+1)v-\omega-n\omega]}\sum H_{n,\,n+\nu}\, e^{-i(n-\nu)V}$$
$$+\frac{3}{8}\eta^3 e^{i(\pi-\Gamma)+i[(n-1)v+\omega-n\omega]}\sum H_{-n,\,-n+\nu}\, e^{-i(n-\nu)V},$$

$$(4,2,1)\quad \rho^2\rho' e^{in(v-\omega)} = \frac{1}{8}\eta^2\eta' e^{-2i(\pi-\Gamma)-i(\pi'-\Gamma)+i[(n+2)v-2\omega-n\omega]}\sum H_{n+1,\,n+1+\nu}\, e^{-i(n+1-\nu)V}$$
$$+\frac{1}{8}\eta^2\eta' e^{2i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma)+i[(n-2)v+2\omega-n\omega]}\sum H_{-n-1,\,-n-1+\nu}\, e^{-i(n+1-\nu)V}$$
$$+\frac{1}{8}\eta^2\eta' e^{-2i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma)+i[(n+2)v-2\omega-n\omega]}\sum H_{n-1,\,n-1+\nu}\, e^{-i(n-1-\nu)V}$$
$$+\frac{1}{8}\eta^2\eta' e^{2i(\pi-\Gamma)-i(\pi'-\Gamma)+i[(n-2)v+2\omega-n\omega]}\sum H_{-n+1,\,-n+1+\nu}\, e^{-i(n-1-\nu)V}$$
$$+\frac{1}{4}\eta^2\eta' e^{-i(\pi'-\Gamma)+in(v-\omega)}\sum H_{n+1,\,n+1+\nu}\, e^{-i(n+1-\nu)V}$$
$$+\frac{1}{4}\eta^2\eta' e^{i(\pi'-\Gamma)+in(v-\omega)}\sum H_{-n-1,\,-n-1+\nu}\, e^{-i(n+1-\nu)V},$$

$$(4,1,2)\quad \rho\rho'^2 e^{in(v-\omega)} = \frac{1}{8}\eta\eta'^2 e^{-i(\pi-\Gamma)-2i(\pi'-\Gamma)+i[(n+1)v-\omega-n\omega]}\sum H_{n+2,\,n+2+\nu}\, e^{-i(n+2-\nu)V}$$
$$+\frac{1}{8}\eta\eta'^2 e^{i(\pi-\Gamma)+2i(\pi'-\Gamma)+i[(n-1)v+\omega-n\omega]}\sum H_{-n-2,\,-n-2+\nu}\, e^{-i(n+2-\nu)V}$$
$$+\frac{1}{8}\eta\eta'^2 e^{-i(\pi-\Gamma)+2i(\pi'-\Gamma)+i[(n+1)v-\omega-n\omega]}\sum H_{-n-2,\,-n-2+\nu}\, e^{-i(n+2-\nu)V}$$
$$+\frac{1}{8}\eta\eta'^2 e^{i(\pi-\Gamma)-2i(\pi'-\Gamma)+i[(n-1)v+\omega-n\omega]}\sum H_{n+2,\,n+2+\nu}\, e^{-i(n+2-\nu)V}$$
$$+\frac{1}{4}\eta\eta'^2 e^{-i(\pi-\Gamma)+i[(n+1)v-\omega-n\omega]}\sum H_{n,\,n+\nu}\, e^{-i(n-\nu)V}$$
$$+\frac{1}{4}\eta\eta'^2 e^{i(\pi-\Gamma)+i[(n-1)v+\omega-n\omega]}\sum H_{n,\,n+\nu}\, e^{-i(n-\nu)V},$$

$$(4,0,3)\quad \rho'^3 e^{in(v-\omega)} = \frac{1}{8}\eta'^3 e^{-3i(\pi'-\Gamma)+in(v-\omega)}\sum H_{n+3,\,n+3+\nu}\, e^{-i(n+3-\nu)V}$$
$$+\frac{1}{8}\eta'^3 e^{3i(\pi'-\Gamma)+in(v-\omega)}\sum H_{-n-3,\,-n-3+\nu}\, e^{-i(n+3-\nu)V}$$
$$+\frac{3}{8}\eta'^3 e^{-i(\pi'-\Gamma)+in(v-\omega)}\sum H_{n+1,\,n+1+\nu}\, e^{-i(n+1-\nu)V}$$
$$+\frac{3}{8}\eta'^3 e^{i(\pi'-\Gamma)+in(v-\omega)}\sum H_{-n-1,\,-n-1+\nu}\, e^{-i(n+1-\nu)V},$$

$$(4, 4, 0)\quad \rho^4 e^{in(v-\varpi)} = \frac{1}{16}\eta^4 e^{-4i(\pi-\Gamma)+i[(n+4)v-4\varpi-n\varpi]}\sum H_{n,\,n+\nu}\, e^{-i(n+4-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{16}\eta^4 e^{4i(\pi-\Gamma)+i[(n-4)v+4\varpi-n\varpi]}\sum H_{n,\,n+\nu}\, e^{-i(n-4-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{4}\eta^4 e^{-2i(\pi-\Gamma)+i[(n+2)v-2\varpi-n\varpi]}\sum H_{n,\,n+\nu}\, e^{-i(n+2-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{4}\eta^4 e^{2i(\pi-\Gamma)+i[(n-2)v+2\varpi-n\varpi]}\sum H_{n,\,n+\nu}\, e^{-i(n-2-\nu)V}$$

$$+\frac{3}{8}\eta^4 e^{in(v-\varpi)}\sum H_{-n,\,n+\nu}\, e^{-i(n-\nu)V},$$

$$(4, 3, 1)\quad \rho^3\rho' e^{in(v-\varpi)} = \frac{1}{16}\eta^3\eta' e^{-3i(\pi-\Gamma)-i(\pi'-\Gamma')+i[(n+3)v-3\varpi-n\varpi]}\sum H_{n+1,\,n+1+\nu}\, e^{-i(n+1-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{16}\eta^3\eta' e^{3i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')+i[(n-3)v+3\varpi-n\varpi]}\sum H_{-n-1,\,n-1+\nu}\, e^{-i(n+1-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{16}\eta^3\eta' e^{-3i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')+i[(n+3)v-3\varpi-n\varpi]}\sum H_{n-1,\,n-1+\nu}\, e^{-i(n+1-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{16}\eta^3\eta' e^{3i(\pi-\Gamma)-i(\pi'-\Gamma')+i[(n-3)v+3\varpi-n\varpi]}\sum H_{n+1,\,n+1+\nu}\, e^{-i(n-1-\nu)V}$$

$$+\frac{3}{16}\eta^3\eta' e^{-i(\pi-\Gamma)-i(\pi'-\Gamma')+i[(n+1)v-\varpi-n\varpi]}\sum H_{n+1,\,n+1+\nu}\, e^{-i(n-1-\nu)V}$$

$$+\frac{3}{16}\eta^3\eta' e^{+i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')+i[(n-1)v+\varpi-n\varpi]}\sum H_{-n-1,\,n-1+\nu}\, e^{-i(n+1-\nu)V}$$

$$+\frac{3}{16}\eta^3\eta' e^{-i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')+i[(n+1)v-\varpi-n\varpi]}\sum H_{n-1,\,n-1+\nu}\, e^{-i(n+1-\nu)V}$$

$$+\frac{3}{16}\eta^3\eta' e^{i(\pi-\Gamma)-i(\pi'-\Gamma')+i[(n-1)v+\varpi-n\varpi]}\sum H_{n+1,\,n+1+\nu}\, e^{-i(n-1-\nu)V}$$

$$(4, 2, 2)\quad \rho^2\rho'^2 e^{in(v-\varpi)} = \frac{1}{16}\eta^2\eta'^2 e^{-2i(\pi-\Gamma)-2i(\pi'-\Gamma')+i[(n+2)v-2\varpi-n\varpi]}\sum H_{n+2,\,n+2+\nu}\, e^{-i(n-2-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{16}\eta^2\eta'^2 e^{2i(\pi-\Gamma)+2i(\pi'-\Gamma')+i[(n-2)v+2\varpi-n\varpi]}\sum H_{-n-2,\,n-2+\nu}\, e^{-i(n+2-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{16}\eta^2\eta'^2 e^{-2i(\pi-\Gamma)+2i(\pi'-\Gamma')+i[(n+2)v-2\varpi-n\varpi]}\sum H_{n-2,\,n-2+\nu}\, e^{-i(n+2-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{16}\eta^2\eta'^2 e^{2i(\pi-\Gamma)-2i(\pi'-\Gamma')+i[(n-2)v+2\varpi-n\varpi]}\sum H_{-n+2,\,n+2+\nu}\, e^{-i(n-2-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{8}\eta^2\eta'^2 e^{-2i(\pi-\Gamma)+i[(n+2)v-2\varpi-n\varpi]}\sum H_{n,\,n+\nu}\, e^{-i(n-\nu)V}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$+\frac{1}{8}\eta'\eta''e^{[illegible]}\sum H_{[illegible]}e^{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{8}\eta^2\eta'^2e^{[illegible]}\sum H_{[illegible]}e^{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{8}\eta^2\eta'^2e^{[illegible]}\sum H_{[illegible]}e^{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{4}\eta^2\eta'^2e^{[illegible]}\sum H_{[illegible]}e^{[illegible]},$$

(4, 1, 3) $$\rho\rho'^3e^{[illegible]} = \frac{1}{16}\eta\eta'^3e^{[illegible]}\sum H_{[illegible]}e^{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{16}\eta\eta'^3e^{[illegible]}\sum H_{[illegible]}e^{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{16}\eta\eta'^3e^{[illegible]}\sum H_{[illegible]}e^{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{16}\eta\eta'^3e^{[illegible]}\sum H_{[illegible]}e^{[illegible]}$$

$$+\frac{3}{16}\eta\eta'^3e^{[illegible]}\sum H_{n+1,\,n+1+\nu}e^{[illegible]}$$

$$+\frac{3}{16}\eta\eta'^3e^{[illegible]}\sum H_{[illegible]}e^{[illegible]}$$

$$+\frac{3}{16}\eta\eta'^3e^{[illegible]}\sum H_{[illegible]}e^{[illegible]}$$

$$+\frac{3}{16}\eta\eta'^3e^{[illegible]}\sum H_{n+1,\,n+1+\nu}e^{[illegible]},$$

(4, 0, 4) $$\rho'^4e^{[illegible]} = \frac{1}{16}\eta'^4e^{[illegible]}\sum H_{n+1,\,n+4+\nu}e^{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{16}\eta'^4e^{[illegible]}\sum H_{[illegible]}e^{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{4}\eta'^4e^{[illegible]}\sum H_{n+2,\,n+2+\nu}e^{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{4}\eta'^4e^{[illegible]}\sum H_{n-2,\,n-2+\nu}e^{[illegible]}$$

$$+\frac{3}{8}\eta'^4e^{[illegible]}\sum H_{n,\,n+\nu}e^{[illegible]},$$

$$(4, 5, 0)\quad \rho^5 e^{[illegible]} = \frac{1}{32}\eta^5 e^{[illegible]}\sum H_{-n,-n+\nu}\, e^{[illegible](n-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{32}\eta^5 e^{5i(\pi-\Gamma)+i(n-5)t+5\omega-n\omega]}\sum H_{n,-n+\nu}\, e^{[illegible](n-\nu)V}$$

$$+\frac{5}{32}\eta^5 e^{[illegible](\pi-\Gamma)+i(n+3)t-3\omega-n\omega]}\sum H_{-n,\,n+\nu}\, e^{-i(n-\nu)V}$$

$$+\frac{5}{32}\eta^5 e^{+3i(\pi-\Gamma)+i[n-3)t+3\omega-n\omega]}\sum H_{-n,\,n+\nu}\, e^{[illegible](n-\nu)V}$$

$$+\frac{5}{16}\eta^5 e^{-i(\pi-\Gamma)+i[(n+1)t-\omega-n\omega]}\sum H_{-n,\,n+\nu}\, e^{[illegible](n-\nu)V}$$

$$+\frac{5}{16}\eta^5 e^{i(\pi-\Gamma)+i[(n-1)t+\omega-n\omega]}\sum H_{n,\,n+\nu}\, e^{[illegible](n-\nu)V}$$

$$(4, 4, 1)\quad \rho^4\rho' e^{[illegible]} = \frac{1}{32}\eta^4\eta' e^{[illegible](\pi-\Gamma)[illegible](\pi-\Gamma')+i[(n+4)t-4\omega-n\omega]}\sum H_{-n+1,-n+1+\nu}\, e^{[illegible](n-1-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{32}\eta^4\eta' e^{4i(\pi-\Gamma)+i(\pi-\Gamma')+i[(n-4)t+4\omega-n\omega]}\sum H_{n-1,\,n-1+\nu}\, e^{[illegible](n+1-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{32}\eta^4\eta' e^{-4i(\pi-\Gamma)+i(\pi-\Gamma')+i[(n+4)t-4\omega-n\omega]}\sum H_{-n-1,\,n-1+\nu}\, e^{[illegible](n+1-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{32}\eta^4\eta' e^{4i(\pi-\Gamma)[illegible](\pi-\Gamma')+i[(n-4)t+4\omega-n\omega]}\sum H_{n+1,\,n+1+\nu}\, e^{[illegible](n-1-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{8}\eta^4\eta' e^{[illegible]2i(\pi-\Gamma)[illegible](\pi-\Gamma')+i[(n+2)t-2\omega-n\omega]}\sum H_{-n+1,\,n+1+\nu}\, e^{[illegible](n-1-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{8}\eta^4\eta' e^{2i(\pi-\Gamma)+i(\pi-\Gamma')+i[(n-2)t+2\omega-n\omega]}\sum H_{-n-1,\,n-1+\nu}\, e^{-i(n+1-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{8}\eta^4\eta' e^{[illegible]2i(\pi-\Gamma)+i(\pi-\Gamma')+i[(n+2)t-2\omega-n\omega]}\sum H_{n-1,\,n-1+\nu}\, e^{[illegible](n+1-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{8}\eta^4\eta' e^{2i(\pi-\Gamma)[illegible](\pi-\Gamma')+i[(n-2)t+2\omega-n\omega]}\sum H_{-n+1,\,n+1+\nu}\, e^{[illegible](n-1-\nu)V}$$

$$+\frac{3}{16}\eta^4\eta' e^{[illegible](\pi-\Gamma')+i(nt-\omega)}\sum H_{n+1,\,n+1+\nu}\, e^{[illegible](n-1-\nu)V}$$

$$+\frac{3}{16}\eta^4\eta' e^{i(\pi-\Gamma')+i(nt-\omega)}\sum H_{n-1,\,n-1+\nu}\, e^{[illegible](n+1-\nu)V},$$

$$(4, 3, 2)\quad \rho^3\rho'^2 e^{[illegible]} = \frac{1}{32}\eta^3\eta'^2 e^{[illegible]3i(\pi-\Gamma)[illegible]2i(\pi-\Gamma')+i[(n+3)t-3\omega-n\omega]}\sum H_{n+2,\,n+2+\nu}\, e^{[illegible](n-2-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{32}\eta^3\eta'^2 e^{3i(\pi-\Gamma)+2i(\pi-\Gamma')+i[(n-3)t+3\omega-n\omega]}\sum H_{n-2,\,n-2+\nu}\, e^{[illegible](n+2-\nu)V}$$

(Cette formule se continue à la page suivante.)

$+\frac{1}{32}\eta^2\eta'^2 e$ [illegible] $\sum H_{n-2,\,n-2+\nu}\,e$ [illegible]

$+\frac{1}{32}\eta^2\eta'^2 e$ [illegible] $\sum H_{n+2,\,n+2+\nu}\,e$ [illegible]

$+\frac{3}{32}\eta^2\eta'^2 e$ [illegible] $\sum H_{n+2,\,n+2+\nu}\,e$ [illegible]

$+\frac{3}{32}\eta^3\eta'^2 e$ [illegible] $\sum H_{n-2,\,n-2+\nu}\,e$ [illegible]

$+\frac{3}{32}\eta^3\eta'^2 e$ [illegible] $\sum H_{n-2,\,n-2+\nu}\,e$ [illegible]

$+\frac{3}{32}\eta^3\eta'^2 e$ [illegible] $\sum H_{n+2,\,n+2+\nu}\,e$ [illegible]

$+\frac{1}{16}\eta^3\eta'^2 e$ [illegible] $\sum H_{n,\,n+\nu}\,e$ [illegible]

$+\frac{1}{16}\eta^3\eta'^2 e$ [illegible] $\sum H_{n,\,n+\nu}\,e$ [illegible]

$+\frac{3}{16}\eta^3\eta'^2 e$ [illegible] $\sum H_{n,\,n+\nu}\,e$ [illegible]

$+\frac{3}{16}\eta^3\eta'^2 e$ [illegible] $\sum H_{n,\,n+\nu}\,e$ [illegible],

(4, 2, 3) $\rho^2\rho'^3 e$ [illegible] $= \frac{1}{32}\eta^2\eta'^3 e$ [illegible] $\sum H_{n+3,\,n+3+\nu}\,e$ [illegible]

$+\frac{1}{32}\eta^2\eta'^3 e$ [illegible] $\sum H_{n-3,\,n-3+\nu}\,e$ [illegible]

$+\frac{1}{32}\eta^2\eta'^3 e$ [illegible] $\sum H_{n-3,\,n-3+\nu}\,e$ [illegible]

$+\frac{1}{32}\eta^2\eta'^3 e$ [illegible] $\sum H_{n+3,\,n+3+\nu}\,e$ [illegible]

$+\frac{3}{32}\eta^2\eta'^3 e$ [illegible] $\sum H_{n+1,\,n+1+\nu}\,e$ [illegible]

$+\frac{3}{32}\eta^2\eta'^3 e$ [illegible] $\sum H_{n-1,\,n-1+\nu}\,e$ [illegible]

$+\frac{3}{32}\eta^2\eta'^3 e$ [illegible] $\sum H_{n-1,\,n-1+\nu}\,e$ [illegible]

$+\frac{3}{32}\eta^2\eta'^3 e$ [illegible] $\sum H_{n+1,\,n+1+\nu}\,e$ [illegible]

$+\frac{1}{16}\eta^2\eta'^3 e$ [illegible] $\sum H_{n+3,\,n+3+\nu}\,e$ [illegible]

Cette formule se continue à la page suivante.

$$+\frac{1}{16}\eta^2\eta'^3 e^{[3(\varpi'-\Gamma')+m(v'-\omega')]i}\sum H_{-n-3,\,-n-3+\nu}\,e^{-i(n+3-\nu)V}$$

$$+\frac{3}{16}\eta^2\eta'^3 e^{[-(\varpi'-\Gamma')+m(v'-\omega')]i}\sum H_{n+1,\,n+1+\nu}\,e^{i(n+1-\nu)V}$$

$$+\frac{3}{16}\eta^2\eta'^3 e^{[(\varpi'-\Gamma')+m(v'-\omega')]i}\sum H_{-n-1,\,-n-1+\nu}\,e^{-i(n+1-\nu)V},$$

(4, 1, 4) $\rho\rho'^4 e^{(nv'+v)i} =$

$$\frac{1}{32}\eta\eta'^4 e^{[(\varpi-\Gamma)-4(\varpi'-\Gamma')+(n+1)v-\omega-n\omega']i}\sum H_{-n+4,\,-n+4+\nu}\,e^{-i(n-4-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{32}\eta\eta'^4 e^{[(\varpi-\Gamma)+4(\varpi'-\Gamma')+(n+1)v+\omega-n\omega']i}\sum H_{-n-4,\,-n-4+\nu}\,e^{-i(n+4-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{32}\eta\eta'^4 e^{[(\varpi-\Gamma)+4(\varpi'-\Gamma')+(n+1)v-\omega-n\omega']i}\sum H_{n+4,\,n+4+\nu}\,e^{i(n+4-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{32}\eta\eta'^4 e^{[(\varpi-\Gamma)-4(\varpi'-\Gamma')+(n+1)v+\omega-n\omega']i}\sum H_{-n+4,\,-n+4+\nu}\,e^{-i(n-4-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{8}\eta\eta'^4 e^{[(\varpi-\Gamma)-2(\varpi'-\Gamma')+(n+1)v-\omega-n\omega']i}\sum H_{-n+2,\,-n+2+\nu}\,e^{-i(n-2-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{8}\eta\eta'^4 e^{[(\varpi-\Gamma)+2(\varpi'-\Gamma')+(n+1)v+\omega-n\omega']i}\sum H_{-n-2,\,-n-2+\nu}\,e^{-i(n+2-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{8}\eta\eta'^4 e^{[(\varpi-\Gamma)+2(\varpi'-\Gamma')+(n+1)v-\omega-n\omega']i}\sum H_{-n-2,\,-n-2+\nu}\,e^{-i(n+2-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{8}\eta\eta'^4 e^{[(\varpi-\Gamma)-2(\varpi'-\Gamma')+(n+1)v+\omega-n\omega']i}\sum H_{n+2,\,n+2+\nu}\,e^{i(n-2-\nu)V}$$

$$+\frac{3}{16}\eta\eta'^4 e^{[(\varpi-\Gamma)+(n+1)v-\omega-n\omega']i}\sum H_{n,\,n+\nu}\,e^{i(n-\nu)V}$$

$$+\frac{3}{16}\eta\eta'^4 e^{[(\varpi-\Gamma)+(n-1)v+\omega-n\omega']i}\sum H_{n,\,n+\nu}\,e^{i(n-\nu)V},$$

(4, 0, 5) $\rho'^5 e^{m(v'-v)i} =$

$$\frac{1}{32}\eta'^5 e^{[5(\varpi'-\Gamma')+m(v'-\omega')]i}\sum H_{n+5,\,n+5+\nu}\,e^{-i(n-5-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{32}\eta'^5 e^{[5(\varpi'-\Gamma')+m(v'-\omega')]i}\sum H_{-n-5,\,-n-5+\nu}\,e^{-i(n+5-\nu)V}$$

$$+\frac{5}{32}\eta'^5 e^{[3(\varpi'-\Gamma')+m(v'-\omega')]i}\sum H_{n+3,\,n+3+\nu}\,e^{i(n-3-\nu)V}$$

$$+\frac{5}{32}\eta'^5 e^{[3(\varpi'-\Gamma')+m(v'-\omega')]i}\sum H_{-n-3,\,-n-3+\nu}\,e^{-i(n+3-\nu)V}$$

$$+\frac{5}{16}\eta'^5 e^{[(\varpi'-\Gamma')+m(v'-\omega')]i}\sum H_{n+1,\,n+1+\nu}\,e^{i(n-1-\nu)V}$$

$$+\frac{5}{16}\eta'^5 e^{[(\varpi'-\Gamma')+m(v'-\omega')]i}\sum H_{-n-1,\,-n-1+\nu}\,e^{-i(n+1-\nu)V},$$

$$(4, 6, 0) \quad \rho^6 e^{[illegible]} = \frac{1}{64}\eta^6 e^{[illegible]} \sum H_{[illegible]} e^{[illegible]}$$

$$+ \frac{1}{64}\eta^6 e^{[illegible]} \sum H_{[illegible]} e^{[illegible]}$$

$$+ \frac{3}{32}\eta^6 e^{[illegible]} \sum H_{[illegible]} e^{[illegible]}$$

$$+ \frac{3}{32}\eta^6 e^{[illegible]} \sum H_{[illegible]} e^{[illegible]}$$

$$+ \frac{15}{64}\eta^6 e^{[illegible]} \sum H_{[illegible]} e^{[illegible]}$$

$$+ \frac{15}{64}\eta^6 e^{[illegible]} \sum H_{[illegible]} e^{[illegible]}$$

$$+ \frac{5}{16}\eta^6 e^{[illegible]} \sum H_{[illegible]} e^{[illegible]},$$

$$(4, 5, 1) \quad \rho^5 \rho' e^{[illegible]} = \frac{1}{64}\eta^5\eta' e^{[illegible]} \sum H_{[illegible]} e^{[illegible]}$$

$$+ \frac{1}{64}\eta^5\eta' e^{[illegible]} \sum H_{[illegible]} e^{[illegible]}$$

$$+ \frac{1}{64}\eta^5\eta' e^{[illegible]} \sum H_{[illegible]} e^{[illegible]}$$

$$+ \frac{1}{64}\eta^5\eta' e^{[illegible]} \sum H_{[illegible]} e^{[illegible]}$$

$$+ \frac{5}{64}\eta^5\eta' e^{[illegible]} \sum H_{[illegible]} e^{[illegible]}$$

$$+ \frac{5}{64}\eta^5\eta' e^{[illegible]} \sum H_{[illegible]} e^{[illegible]}$$

$$+ \frac{5}{64}\eta^5\eta' e^{[illegible]} \sum H_{[illegible]} e^{[illegible]}$$

$$+ \frac{5}{64}\eta^5\eta' e^{[illegible]} \sum H_{[illegible]} e^{[illegible]}$$

$$+ \frac{5}{32}\eta^5\eta' e^{[illegible]} \sum H_{[illegible]} e^{[illegible]}$$

$$+ \frac{5}{32}\eta^5\eta' e^{[illegible]} \sum H_{[illegible]} e^{[illegible]}$$

$$+ \frac{5}{32}\eta^5\eta' e^{[illegible]} \sum H_{[illegible]} e^{[illegible]}$$

$$+ \frac{5}{32}\eta^5\eta' e^{[illegible]} \sum H_{[illegible]} e^{[illegible]},$$

$$(4, 4, 2)\quad \rho_l^4 \rho_l'^2 e^{m(v-V)} = \frac{1}{64}\eta_l^4\eta_l'^2 e^{-4(\varpi-\Gamma)i-2(\varpi'-\Gamma')i+i[(n+4)v-4\omega-n\omega]}\sum H_{-n+2,\,-n+2+\nu}\, e^{i(n-2-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{64}\eta_l^4\eta_l'^2 e^{4(\varpi-\Gamma)i+2(\varpi'-\Gamma')i+i[(n-4)v+4\omega-n\omega]}\sum H_{-n-2,\,-n-2+\nu}\, e^{-i(n+2-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{64}\eta_l^4\eta_l'^2 e^{-4(\varpi-\Gamma)i+2(\varpi'-\Gamma')i+i[(n+4)v-4\omega-n\omega]}\sum H_{n-2,\,n-2+\nu}\, e^{i(n+2-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{64}\eta_l^4\eta_l'^2 e^{4(\varpi-\Gamma)i-2(\varpi'-\Gamma')i+i[(n-4)v+4\omega-n\omega]}\sum H_{-n+2,\,-n+2+\nu}\, e^{-i(n-2-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{16}\eta_l^4\eta_l'^2 e^{-2(\varpi-\Gamma)i-2(\varpi'-\Gamma')i+i[(n+2)v-2\omega-n\omega]}\sum H_{n+2,\,n+2+\nu}\, e^{i(n-2-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{16}\eta_l^4\eta_l'^2 e^{2(\varpi-\Gamma)i+2(\varpi'-\Gamma')i+i[(n-2)v+2\omega-n\omega]}\sum H_{-n-2,\,-n-2+\nu}\, e^{-i(n+2-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{16}\eta_l^4\eta_l'^2 e^{-2(\varpi-\Gamma)i+2(\varpi'-\Gamma')i+i[(n+2)v-2\omega-n\omega]}\sum H_{n-2,\,n-2+\nu}\, e^{i(n+2-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{16}\eta_l^4\eta_l'^2 e^{2(\varpi-\Gamma)i-2(\varpi'-\Gamma')i+i[(n-2)v+2\omega-n\omega]}\sum H_{-n+2,\,-n+2+\nu}\, e^{-i(n-2-\nu)V}$$

$$+\frac{3}{32}\eta_l^4\eta_l'^2 e^{-2(\varpi'-\Gamma')i+in(v-\omega)}\sum H_{n+2,\,n+2+\nu}\, e^{-i(n-2-\nu)V}$$

$$+\frac{3}{32}\eta_l^4\eta_l'^2 e^{2(\varpi'-\Gamma')i+in(v-\omega)}\sum H_{-n-2,\,-n-2+\nu}\, e^{i(n+2-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{32}\eta_l^4\eta_l'^2 e^{-4(\varpi-\Gamma)i+i[(n+4)v-4\omega-n\omega]}\sum H_{n,\,n+\nu}\, e^{i(n-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{32}\eta_l^4\eta_l'^2 e^{4(\varpi-\Gamma)i+i[(n-4)v+4\omega-n\omega]}\sum H_{-n,\,-n+\nu}\, e^{-i(n-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{8}\eta_l^4\eta_l'^2 e^{-2(\varpi-\Gamma)i+i[(n+2)v-2\omega-n\omega]}\sum H_{n,\,n+\nu}\, e^{i(n-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{8}\eta_l^4\eta_l'^2 e^{2(\varpi-\Gamma)i+i[(n-2)v+2\omega-n\omega]}\sum H_{n,\,n+\nu}\, e^{i(n-\nu)V}$$

$$+\frac{3}{16}\eta_l^4\eta_l'^2 e^{in(v-\omega)}\sum H_{n,\,n+\nu}\, e^{i(n-\nu)V},$$

$$+3.3\,\rho^{[illegible]}\rho'^{[illegible]}e^{[illegible]} = \frac{1}{64}\eta\eta'^{[illegible]}e^{[illegible]}\sum H_{[illegible]}e^{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{64}\eta\eta'^{[illegible]}e^{[illegible]}\sum H_{[illegible]}e^{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{64}\eta\eta'^{[illegible]}e^{[illegible]}\sum H_{[illegible]}e^{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{64}\eta^{[illegible]}\eta'^{[illegible]}e^{[illegible]}\sum H_{[illegible]}e^{[illegible]}$$

$$+\frac{3}{64}\eta\eta'^{[illegible]}e^{[illegible]}\sum H_{[illegible]}e^{[illegible]}$$

$$+\frac{3}{64}\eta^{[illegible]}\eta'^{[illegible]}e^{[illegible]}\sum H_{[illegible]}e^{[illegible]}$$

$$+\frac{3}{64}\eta^{[illegible]}\eta'^{[illegible]}e^{[illegible]}\sum H_{[illegible]}e^{[illegible]}$$

$$+\frac{3}{64}\eta^{[illegible]}\eta'^{[illegible]}e^{[illegible]}\sum H_{[illegible]}e^{[illegible]}$$

$$+\frac{3}{64}\eta^{[illegible]}\eta'^{[illegible]}e^{[illegible]}\sum H_{[illegible]}e^{[illegible]}$$

$$+\frac{3}{64}\eta^{[illegible]}\eta'^{[illegible]}e^{[illegible]}\sum H_{[illegible]}e^{[illegible]}$$

$$+\frac{3}{64}\eta^{[illegible]}\eta'^{[illegible]}e^{[illegible]}\sum H_{[illegible]}e^{[illegible]}$$

$$+\frac{3}{64}\eta\eta'^{[illegible]}e^{[illegible]}\sum H_{[illegible]}e^{[illegible]}$$

$$+\frac{9}{64}\eta^{[illegible]}\eta'^{[illegible]}e^{[illegible]}\sum H_{[illegible]}e^{[illegible]}$$

$$+\frac{9}{64}\eta\eta'^{[illegible]}e^{[illegible]}\sum H_{[illegible]}e^{[illegible]}$$

$$+\frac{9}{64}\eta^{[illegible]}\eta'^{[illegible]}e^{[illegible]}\sum H_{[illegible]}e^{[illegible]}$$

$$+\frac{9}{64}\eta^{[illegible]}\eta'^{[illegible]}e^{[illegible]}\sum H_{[illegible]}e^{[illegible]}.$$

$$(4, 2, 4)\quad \rho^2\rho'^4 e^{i(\;\;)} = \frac{1}{64}\eta^2\eta'^4 e^{-2i(\pi-\Gamma)-4i(\pi'-\Gamma')+i[(n+2)\nu-2\omega-n\omega']}\sum H_{-n+4,\,n+4+\nu}\,e^{-i(n-4-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{64}\eta^2\eta'^4 e^{2i(\pi-\Gamma)+4i(\pi'-\Gamma')+i[(n-2)\nu+2\omega-n\omega']}\sum H_{-n-4,\,n-4+\nu}\,e^{i(n+4-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{64}\eta^2\eta'^4 e^{-2i(\pi-\Gamma)+4i(\pi'-\Gamma')+i[(n+2)\nu-2\omega-n\omega']}\sum H_{-n-4,\,n-4+\nu}\,e^{i(n+4-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{64}\eta^2\eta'^4 e^{2i(\pi-\Gamma)-4i(\pi'-\Gamma')+i[(n-2)\nu+2\omega-n\omega']}\sum H_{-n+4,\,n+4+\nu}\,e^{-i(n-4-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{32}\eta^2\eta'^4 e^{-4i(\pi'-\Gamma')+in(\nu-\omega')}\sum H_{-n+4,\,-n+4+\nu}\,e^{-i(n-4-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{32}\eta^2\eta'^4 e^{4i(\pi'-\Gamma')+in(\nu-\omega')}\sum H_{-n-4,\,n-4+\nu}\,e^{i(n+4-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{16}\eta^2\eta'^4 e^{-2i(\pi-\Gamma)-2i(\pi'-\Gamma')+i[(n+2)\nu-2\omega-n\omega']}\sum H_{-n+2,\,n+2+\nu}\,e^{-i(n-2-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{16}\eta^2\eta'^4 e^{2i(\pi-\Gamma)+2i(\pi'-\Gamma')+i[(n-2)\nu+2\omega-n\omega']}\sum H_{-n-2,\,n-2+\nu}\,e^{i(n+2-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{16}\eta^2\eta'^4 e^{-2i(\pi-\Gamma)+2i(\pi'-\Gamma')+i[(n+2)\nu-2\omega-n\omega']}\sum H_{-n-2,\,n-2+\nu}\,e^{i(n+2-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{16}\eta^2\eta'^4 e^{2i(\pi-\Gamma)-2i(\pi'-\Gamma')+i[(n-2)\nu+2\omega-n\omega']}\sum H_{-n+2,\,n+2+\nu}\,e^{-i(n-2-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{8}\eta^2\eta'^4 e^{-2i(\pi'-\Gamma')+in(\nu-\omega')}\sum H_{-n+2,\,n+2+\nu}\,e^{-i(n-2-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{8}\eta^2\eta'^4 e^{2i(\pi'-\Gamma')+in(\nu-\omega')}\sum H_{-n-2,\,n-2+\nu}\,e^{i(n+2-\nu)V}$$

$$+\frac{3}{32}\eta^2\eta'^4 e^{-2i(\pi-\Gamma)+i[(n+2)\nu-2\omega-n\omega']}\sum H_{-n,\,n+\nu}\,e^{-i(n-\nu)V}$$

$$+\frac{3}{32}\eta^2\eta'^4 e^{2i(\pi-\Gamma)+i[(n-2)\nu+2\omega-n\omega']}\sum H_{-n,\,n+\nu}\,e^{-i(n-\nu)V}$$

$$+\frac{3}{16}\eta^2\eta'^4 e^{in(\nu-\omega')}\sum H_{-n,\,n+\nu}\,e^{-i(n-\nu)V},$$

$$(4,1,5)\quad \rho\rho'^5 e^{[illegible]} = \frac{1}{64}\eta\eta'^5 e^{[illegible]} \sum H_{n+5,\,n+5+\nu}\, e^{[illegible]}$$

$$+ \frac{1}{64}\eta\eta'^5 e^{[illegible]} \sum H_{n-5,\,n-5+\nu}\, e^{[illegible]}$$

$$+ \frac{1}{64}\eta\eta'^5 e^{[illegible]} \sum H_{n-5,\,n-5+\nu}\, e^{[illegible]}$$

$$+ \frac{1}{64}\eta\eta'^5 e^{[illegible]} \sum H_{n+5,\,n+5+\nu}\, e^{[illegible]}$$

$$+ \frac{5}{64}\eta\eta'^5 e^{[illegible]} \sum H_{n+3,\,n+3+\nu}\, e^{[illegible]}$$

$$+ \frac{5}{64}\eta\eta'^5 e^{[illegible]} \sum H_{n-3,\,n-3+\nu}\, e^{[illegible]}$$

$$+ \frac{5}{64}\eta\eta'^5 e^{[illegible]} \sum H_{n-3,\,n-3+\nu}\, e^{[illegible]}$$

$$+ \frac{5}{64}\eta\eta'^5 e^{[illegible]} \sum H_{n+3,\,n+3+\nu}\, e^{[illegible]}$$

$$+ \frac{5}{32}\eta\eta'^5 e^{[illegible]} \sum H_{n+1,\,n+1+\nu}\, e^{[illegible]}$$

$$+ \frac{5}{32}\eta\eta'^5 e^{[illegible]} \sum H_{n-1,\,n-1+\nu}\, e^{[illegible]}$$

$$+ \frac{5}{32}\eta\eta'^5 e^{[illegible]} \sum H_{n-1,\,n-1+\nu}\, e^{[illegible]}$$

$$+ \frac{5}{32}\eta\eta'^5 e^{[illegible]} \sum H_{n+1,\,n+1+\nu}\, e^{[illegible]},$$

$$(4,0,6)\quad \rho'^6 e^{[illegible]} = \frac{1}{64}\eta'^6 e^{[illegible]} \sum H_{n+6,\,n+6+\nu}\, e^{[illegible]}$$

$$+ \frac{1}{64}\eta'^6 e^{[illegible]} \sum H_{n-6,\,n-6+\nu}\, e^{[illegible]}$$

$$+ \frac{3}{32}\eta'^6 e^{[illegible]} \sum H_{[illegible]}\, e^{[illegible]}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$+\frac{3}{32}\eta'^6 e^{[4(\varpi'-\Gamma')+m(\varepsilon-\omega')]i}\sum H_{n-4,\,n-4+\nu}\,e^{(n+4-\nu)Ni}$$

$$+\frac{15}{64}\eta'^6 e^{[2(\varpi'-\Gamma')+m(\varepsilon-\omega')]i}\sum H_{n+2,\,n+2+\nu}\,e^{(n-2-\nu)Ni}$$

$$+\frac{15}{64}\eta'^6 e^{[-2(\varpi'-\Gamma')+m(\varepsilon-\omega')]i}\sum H_{n-2,\,n-2+\nu}\,e^{(n+2-\nu)Ni}$$

$$+\frac{5}{16}\eta'^6 e^{m(\varepsilon-\omega')i}\sum H_{n,\,n+\nu}\,e^{(n-\nu)Ni},$$

$$(4,7,0)\qquad \rho^7 e^{(m\omega-\nu)i}=\frac{1}{128}\eta^7 e^{[7(\varpi-\Gamma)+(n+7)\varepsilon-7\omega-n\omega]i}\sum H_{n,\,n+\nu}\,e^{(n-\nu)Ni}$$

$$+\frac{1}{128}\eta^7 e^{[-7(\varpi-\Gamma)+(n-7)\varepsilon+7\omega-n\omega]i}\sum H_{n,\,n+\nu}\,e^{(n-\nu)Ni}$$

$$+\frac{7}{128}\eta^7 e^{[5(\varpi-\Gamma)+(n+5)\varepsilon-5\omega-n\omega]i}\sum H_{n,\,n+\nu}\,e^{(n-\nu)Ni}$$

$$+\frac{7}{128}\eta^7 e^{[-5(\varpi-\Gamma)+(n-5)\varepsilon+5\omega-n\omega]i}\sum H_{n,\,n+\nu}\,e^{(n-\nu)Ni}$$

$$+\frac{21}{128}\eta^7 e^{[3(\varpi-\Gamma)+(n+3)\varepsilon-3\omega-n\omega]i}\sum H_{n,\,n+\nu}\,e^{(n-\nu)Ni}$$

$$+\frac{21}{128}\eta^7 e^{[-3(\varpi-\Gamma)+(n-3)\varepsilon+3\omega-n\omega]i}\sum H_{n,\,n+\nu}\,e^{(n-\nu)Ni}$$

$$+\frac{35}{128}\eta^7 e^{[(\varpi-\Gamma)+(n+1)\varepsilon-\omega-n\omega]i}\sum H_{n,\,n+\nu}\,e^{(n-\nu)Ni}$$

$$+\frac{35}{128}\eta^7 e^{[-(\varpi-\Gamma)+(n-1)\varepsilon+\omega-n\omega]i}\sum H_{n,\,n+\nu}\,e^{(n-\nu)Ni},$$

$$(4,6,1)\qquad \rho^6\rho' e^{(m\omega-\nu)i}=\frac{1}{128}\eta^6\eta' e^{[-6(\varpi-\Gamma)-(\varpi'-\Gamma')+(n+6)\varepsilon-6\omega-n\omega]i}\sum H_{n+1,\,n+1+\nu}\,e^{(n-1-\nu)Ni}$$

$$+\frac{1}{128}\eta^6\eta' e^{[6(\varpi-\Gamma)-(\varpi'-\Gamma')+(n-6)\varepsilon+6\omega-n\omega]i}\sum H_{n+1,\,n+1+\nu}\,e^{(n-1-\nu)Ni}$$

$$+\frac{1}{128}\eta^6\eta' e^{[6(\varpi-\Gamma)+(\varpi'-\Gamma')+(n+6)\varepsilon-6\omega-n\omega]i}\sum H_{n-1,\,n-1+\nu}\,e^{(n+1-\nu)Ni}$$

$$+\frac{1}{128}\eta^6\eta' e^{[-6(\varpi-\Gamma)+(\varpi'-\Gamma')+(n-6)\varepsilon+6\omega-n\omega]i}\sum H_{n-1,\,n-1+\nu}\,e^{(n+1-\nu)Ni}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$+\frac{3}{64}\eta^6\eta' e^{\cdots}\sum H_{n+1,\,n+1+\nu}\,e^{\cdots}$ [illegible]

$+\frac{3}{64}\eta^6\eta' e^{\cdots}\sum H_{n-1,\,n-1+\nu}\,e^{\cdots}$ [illegible]

$+\frac{3}{64}\eta^6\eta' e^{\cdots}\sum H_{n-1,\,n-1+\nu}\,e^{\cdots}$ [illegible]

$+\frac{3}{64}\eta^6\eta' e^{\cdots}\sum H_{n+1,\,n+1+\nu}\,e^{\cdots}$ [illegible]

$+\frac{15}{128}\eta^6\eta' e^{\cdots}\sum H_{n+1,\,n+1+\nu}\,e^{\cdots}$ [illegible]

$+\frac{15}{128}\eta^6\eta' e^{\cdots}\sum H_{n-1,\,n-1+\nu}\,e^{\cdots}$ [illegible]

$+\frac{15}{128}\eta^6\eta' e^{\cdots}\sum H_{n-1,\,n-1+\nu}\,e^{\cdots}$ [illegible]

$+\frac{15}{128}\eta^6\eta' e^{\cdots}\sum H_{n+1,\,n+1+\nu}\,e^{\cdots}$ [illegible]

$+\frac{5}{32}\eta^6\eta' e^{\cdots}\sum H_{n+1,\,n+1+\nu}\,e^{-i(n+1+\nu)V}$ [illegible]

$+\frac{5}{32}\eta^6\eta' e^{\cdots}\sum H_{n-1,\,n-1+\nu}\,e^{i(n+1+\nu)V},$ [illegible]

$(4, 5, 2)\;\rho^5\rho'^2 e^{\cdots} = \frac{1}{128}\eta^5\eta'^2 e^{\cdots}\sum H_{n+2,\,n+2+\nu}\,e^{\cdots}$ [illegible]

$+\frac{1}{128}\eta^5\eta'^2 e^{\cdots}\sum H_{n-2,\,-n-2+\nu}\,e^{i(n+2+\nu)V}$ [illegible]

$+\frac{1}{128}\eta^5\eta'^2 e^{\cdots}\sum H_{n-2,\,n-2+\nu}\,e^{i(n+2+\nu)V}$ [illegible]

$+\frac{1}{128}\eta^5\eta'^2 e^{\cdots}\sum H_{n+2,\,n+2+\nu}\,e^{i(n-2-\nu)V}$ [illegible]

$+\frac{5}{128}\eta^5\eta'^2 e^{\cdots}\sum H_{n+2,\,n+2+\nu}\,e^{i(n-2-\nu)V}$ [illegible]

$+\frac{5}{128}\eta^5\eta'^2 e^{\cdots}\sum H_{n-2,\,n-2+\nu}\,e^{\cdots}$ [illegible]

$+\frac{5}{128}\eta^5\eta'^2 e^{\cdots}\sum H_{n-2,\,n-2+\nu}\,e^{\cdots}$ [illegible]

Cette formule se continue à la page suivante.

$$+\frac{5}{128}\eta^5\eta'^2 e^{3i(\varpi-\Gamma)-2i(\varpi'-\Gamma')+i[(n-3)v+3\omega-n\omega']}\sum H_{n+2,\,n+2+\nu}\,e^{i(n-2-\nu)V}$$

$$+\frac{5}{64}\eta^5\eta'^2 e^{-i(\varpi-\Gamma)-2i(\varpi'-\Gamma')+i[(n+1)v-\omega-n\omega']}\sum H_{-n+2,\,-n+2+\nu}\,e^{-i(n-2-\nu)V}$$

$$+\frac{5}{64}\eta^5\eta'^2 e^{i(\varpi-\Gamma)+2i(\varpi'-\Gamma')+i[(n-1)v+\omega-n\omega']}\sum H_{n-2,\,n-2+\nu}\,e^{i(n+2-\nu)V}$$

$$+\frac{5}{64}\eta^5\eta'^2 e^{-i(\varpi-\Gamma)+2i(\varpi'-\Gamma')+i[(n+1)v-\omega-n\omega']}\sum H_{n-2,\,-n-2+\nu}\,e^{-i(n+2-\nu)V}$$

$$+\frac{5}{64}\eta^5\eta'^2 e^{i(\varpi-\Gamma)-2i(\varpi'-\Gamma')+i[(n-1)v+\omega-n\omega']}\sum H_{n+2,\,n+2+\nu}\,e^{i(n-2-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{64}\eta^5\eta'^2 e^{-5i(\varpi-\Gamma)+i[(n+5)v-5\omega-n\omega']}\sum H_{n,\,n+\nu}\,e^{i(n-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{64}\eta^5\eta'^2 e^{5i(\varpi-\Gamma)+i[(n-5)v+5\omega-n\omega']}\sum H_{n,\,n+\nu}\,e^{i(n-\nu)V}$$

$$+\frac{5}{64}\eta^5\eta'^2 e^{-3i(\varpi-\Gamma)+i[(n+3)v-3\omega-n\omega']}\sum H_{n,\,n+\nu}\,e^{i(n-\nu)V}$$

$$+\frac{5}{64}\eta^5\eta'^2 e^{3i(\varpi-\Gamma)+i[(n-3)v+3\omega-n\omega']}\sum H_{n,\,n+\nu}\,e^{i(n-\nu)V}$$

$$+\frac{5}{32}\eta^5\eta'^2 e^{-i(\varpi-\Gamma)+i[(n+1)v-\omega-n\omega']}\sum H_{-n,\,n+\nu}\,e^{i(n-\nu)V}$$

$$+\frac{5}{32}\eta^5\eta'^2 e^{i(\varpi-\Gamma)+i[(n-1)v+\omega-n\omega']}\sum H_{-n,\,n+\nu}\,e^{i(n-\nu)V}.$$

$$(4,4,3)\ \rho^4\rho'^3 e^{i(nv-n'\omega')} = \frac{1}{128}\eta^4\eta'^3 e^{-4i(\varpi-\Gamma)-3i(\varpi'-\Gamma')+i[(n+4)v-4\omega-n\omega']}\sum H_{n+3,\,n+3+\nu}\,e^{i(n-3-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{128}\eta^4\eta'^3 e^{4i(\varpi-\Gamma)+3i(\varpi'-\Gamma')+i[(n-4)v+4\omega-n\omega']}\sum H_{n-3,\,n-3+\nu}\,e^{i(n+3-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{128}\eta^4\eta'^3 e^{-4i(\varpi-\Gamma)+3i(\varpi'-\Gamma')+i[(n+4)v-4\omega-n\omega']}\sum H_{n-3,\,n-3+\nu}\,e^{i(n+3-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{128}\eta^4\eta'^3 e^{4i(\varpi-\Gamma)-3i(\varpi'-\Gamma')+i[(n-4)v+4\omega-n\omega']}\sum H_{n+3,\,n+3+\nu}\,e^{i(n-3-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{32}\eta^4\eta'^3 e^{-2i(\varpi-\Gamma)-3i(\varpi'-\Gamma')+i[(n+2)v-2\omega-n\omega']}\sum H_{n+3,\,n+3+\nu}\,e^{i(n-3-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{32}\eta^4\eta'^3 e^{2i(\varpi-\Gamma)+3i(\varpi'-\Gamma')+i[(n-2)v+2\omega-n\omega']}\sum H_{n-3,\,n-3+\nu}\,e^{i(n+3-\nu)V}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$+\frac{1}{32}\eta^4\eta'^3 e^{i[2n(\pi-\Gamma)+3n(\pi'-\Gamma')+i(n+2)v-2\omega-n\omega']}\sum H_{n-3,\,n-3+\nu}\,e^{i(n+3-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{32}\eta^4\eta'^3 e^{2n(\pi-\Gamma)-3n(\pi'-\Gamma')+i[(n-2)v+2\omega-n\omega']}\sum H_{n+3,\,n+3+\nu}\,e^{-i(n+3-\nu)V}$$

$$+\frac{3}{64}\eta^4\eta'^3 e^{3n(\pi-\Gamma')+in(v-\omega)}\sum H_{n+3,\,n+3+\nu}\,e^{i(n+3-\nu)V}$$

$$+\frac{3}{64}\eta^4\eta'^3 e^{3n(\pi-\Gamma')+in(v-\omega)}\sum H_{n-3,\,n-3+\nu}\,e^{i(n+3-\nu)V}$$

$$+\frac{3}{128}\eta^4\eta'^3 e^{4n(\pi-\Gamma)-n(\pi-\Gamma')+i[(n+4)v-4\omega-n\omega]}\sum H_{n+1,\,n+1+\nu}\,e^{i(n-1-\nu)V}$$

$$+\frac{3}{128}\eta^4\eta'^3 e^{4n(\pi-\Gamma)+n(\pi-\Gamma')+i[(n-4)v+4\omega-n\omega]}\sum H_{n-1,\,n-1+\nu}\,e^{i(n+1-\nu)V}$$

$$+\frac{3}{128}\eta^4\eta'^3 e^{-4n(\pi-\Gamma)+n(\pi-\Gamma')+i[(n+4)v-4\omega-n\omega]}\sum H_{n-1,\,n-1+\nu}\,e^{i(n+1-\nu)V}$$

$$+\frac{3}{128}\eta^4\eta'^3 e^{4n(\pi-\Gamma)-n(\pi-\Gamma')+i[(n-4)v+4\omega-n\omega]}\sum H_{n+1,\,n+1+\nu}\,e^{i(n-1-\nu)V}$$

$$+\frac{3}{32}\eta^4\eta'^3 e^{-2n(\pi-\Gamma)-n(\pi-\Gamma')+i[(n+2)v-2\omega-n\omega]}\sum H_{n+1,\,n+1+\nu}\,e^{i(n-1-\nu)V}$$

$$+\frac{3}{32}\eta^4\eta'^3 e^{2n(\pi-\Gamma)+n(\pi-\Gamma')+i[(n-2)v+2\omega-n\omega]}\sum H_{n-1,\,n-1+\nu}\,e^{i(n+1-\nu)V}$$

$$+\frac{3}{32}\eta^4\eta'^3 e^{-2n(\pi-\Gamma)+n(\pi-\Gamma')+i[(n+2)v-2\omega-n\omega]}\sum H_{n-1,\,n-1+\nu}\,e^{i(n+1-\nu)V}$$

$$+\frac{3}{32}\eta^4\eta'^3 e^{2n(\pi-\Gamma)-n(\pi-\Gamma')+i[(n-2)v+2\omega-n\omega]}\sum H_{n+1,\,n+1+\nu}\,e^{i(n-1-\nu)V}$$

$$+\frac{9}{64}\eta^4\eta'^3 e^{n(\pi-\Gamma)+in(v-\omega)}\sum H_{n+1,\,n+1+\nu}\,e^{i(n-1-\nu)V}$$

$$+\frac{9}{64}\eta^4\eta'^3 e^{n(\pi-\Gamma)+in(v-\omega)}\sum H_{n-1,\,n-1+\nu}\,e^{i(n+1-\nu)V},$$

$$(4, 3, 4)\quad \rho^3\rho'^4 e^{in(v-[illegible])}=\frac{1}{128}\eta^3\eta'^4 e^{3n(\pi-\Gamma)-4n(\pi-\Gamma')+i[(n+3)v-3\omega-n\omega]}\sum H_{n+4,\,n+4+\nu}\,e^{i(n-4-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{128}\eta^3\eta'^4 e^{3n(\pi-\Gamma)+4n(\pi-\Gamma')+i[(n-3)v+3\omega-n\omega]}\sum H_{n-4,\,n-4+\nu}\,e^{i(n+4-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{128}\eta^3\eta'^4 e^{-3n(\pi-\Gamma)+4n(\pi-\Gamma')+i[(n+3)v-3\omega-n\omega]}\sum H_{n-4,\,n-4+\nu}\,e^{i(n+4-\nu)V}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$+\frac{1}{128}\eta^3\eta'^4 e^{3i(\varpi-\Gamma)-4i(\varpi'-\Gamma')+i[(n-3)v+3\omega-n\omega]}\sum\Pi_{n+4,\ n+4+\nu}\,e^{-i(n-4-\nu)V}$$

$$+\frac{3}{128}\eta^3\eta'^4 e^{-i(\varpi-\Gamma)-4i(\varpi'-\Gamma')+i[(n+1)v-\omega-n\omega]}\sum\Pi_{-n+4,\ n+4+\nu}\,e^{-i(n-4-\nu)V}$$

$$+\frac{3}{128}\eta^3\eta'^4 e^{i(\varpi-\Gamma)+4i(\varpi'-\Gamma')+i[(n-1)v+\omega-n\omega]}\sum\Pi_{n-4,\ n-4+\nu}\,e^{-i(n+4-\nu)V}$$

$$+\frac{3}{128}\eta^3\eta'^4 e^{-i(\varpi-\Gamma)+4i(\varpi'-\Gamma')+i[(n+1)v-\omega-n\omega]}\sum\Pi_{n-4,\ n-4+\nu}\,e^{-i(n+4-\nu)V}$$

$$+\frac{3}{128}\eta^3\eta'^4 e^{i(\varpi-\Gamma)-4i(\varpi'-\Gamma')+i[(n-1)v+\omega-n\omega]}\sum\Pi_{n+4,\ n+4+\nu}\,e^{-i(n-4-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{32}\eta^3\eta'^4 e^{-3i(\varpi-\Gamma)-2i(\varpi'-\Gamma')+i[(n+3)v-3\omega-n\omega]}\sum\Pi_{n+2,\ n+2+\nu}\,e^{-i(n-2-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{32}\eta^3\eta'^4 e^{3i(\varpi-\Gamma)+2i(\varpi'-\Gamma')+i[(n-3)v+3\omega-n\omega]}\sum\Pi_{-n-2,\ n-2+\nu}\,e^{-i(n+2-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{32}\eta^3\eta'^4 e^{-3i(\varpi-\Gamma)+2i(\varpi'-\Gamma')+i[(n+3)v-3\omega-n\omega]}\sum\Pi_{-n-2,\ n-2+\nu}\,e^{-i(n+2-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{32}\eta^3\eta'^4 e^{3i(\varpi-\Gamma)-2i(\varpi'-\Gamma')+i[(n-3)v+3\omega-n\omega]}\sum\Pi_{n+2,\ n+2+\nu}\,e^{-i(n-2-\nu)V}$$

$$+\frac{3}{32}\eta^3\eta'^4 e^{-i(\varpi-\Gamma)-2i(\varpi'-\Gamma')+i[(n+1)v-\omega-n\omega]}\sum\Pi_{-n+2,\ n+2+\nu}\,e^{-i(n-2-\nu)V}$$

$$+\frac{3}{32}\eta^3\eta'^4 e^{i(\varpi-\Gamma)+2i(\varpi'-\Gamma')+i[(n-1)v+\omega-n\omega]}\sum\Pi_{-n-2,\ n-2+\nu}\,e^{-i(n+2-\nu)V}$$

$$+\frac{3}{32}\eta^3\eta'^4 e^{-i(\varpi-\Gamma)+2i(\varpi'-\Gamma')+i[(n+1)v-\omega-n\omega]}\sum\Pi_{-n-2,\ -n-2+\nu}\,e^{-i(n+2-\nu)V}$$

$$+\frac{3}{32}\eta^3\eta'^4 e^{i(\varpi-\Gamma)-2i(\varpi'-\Gamma')+i[(n-1)v+\omega-n\omega]}\sum\Pi_{n+2,\ n+2+\nu}\,e^{-i(n-2-\nu)V}$$

$$+\frac{3}{64}\eta^3\eta'^4 e^{-3i(\varpi-\Gamma)+i[(n+3)v-3\omega-n\omega]}\sum\Pi_{-n,\ -n+\nu}\,e^{-i(n-\nu)V}$$

$$+\frac{3}{64}\eta^3\eta'^4 e^{3i(\varpi-\Gamma)+i[(n-3)v+3\omega-n\omega]}\sum\Pi_{n,\ n+\nu}\,e^{-i(n-\nu)V}$$

$$+\frac{9}{64}\eta^3\eta'^4 e^{-i(\varpi-\Gamma)+i[(n+1)v-\omega-n\omega]}\sum\Pi_{n,\ n+\nu}\,e^{-i(n-\nu)V}$$

$$+\frac{9}{64}\eta^3\eta'^4 e^{i(\varpi-\Gamma)+i[(n-1)v+\omega-n\omega]}\sum\Pi_{n,\ n+\nu}\,e^{-i(n-\nu)V},$$

$$(4, 2, 5)\quad \rho^2\rho'^5 e^{in(v-\omega)} = \frac{1}{128}\eta^2\eta'^5 e^{-2i(\varpi-\Gamma)-5i(\varpi'-\Gamma')+i[(n+2)v-2\omega-n\omega]}\sum H_{-n+5,\,-n+5+\nu}\,e^{i(n-5-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{128}\eta^2\eta'^5 e^{2i(\varpi-\Gamma)+5i(\varpi'-\Gamma')+i[(n-2)v+2\omega-n\omega]}\sum H_{-n-5,\,-n-5+\nu}\,e^{i(n+5-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{128}\eta^2\eta'^5 e^{-2i(\varpi-\Gamma)+5i(\varpi'-\Gamma')+i[(n+2)v-2\omega-n\omega]}\sum H_{-n-5,\,-n-5+\nu}\,e^{i(n+5-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{128}\eta^2\eta'^5 e^{2i(\varpi-\Gamma)-5i(\varpi'-\Gamma')+i[(n-2)v+2\omega-n\omega]}\sum H_{-n+5,\,-n+5+\nu}\,e^{i(n-5-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{64}\eta^2\eta'^5 e^{-5i(\varpi'-\Gamma')+in(v-\omega)}\sum H_{-n+5,\,-n+5+\nu}\,e^{i(n-5-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{64}\eta^2\eta'^5 e^{5i(\varpi'-\Gamma')+in(v-\omega)}\sum H_{-n-5,\,-n-5+\nu}\,e^{i(n+5-\nu)V}$$

$$+\frac{5}{128}\eta^2\eta'^5 e^{-2i(\varpi-\Gamma)-3i(\varpi'-\Gamma')+i[(n+2)v-2\omega-n\omega]}\sum H_{-n+3,\,-n+3+\nu}\,e^{i(n-3-\nu)V}$$

$$+\frac{5}{128}\eta^2\eta'^5 e^{2i(\varpi-\Gamma)+3i(\varpi'-\Gamma')+i[(n-2)v+2\omega-n\omega]}\sum H_{-n-3,\,-n-3+\nu}\,e^{i(n+3-\nu)V}$$

$$+\frac{5}{128}\eta^2\eta'^5 e^{-2i(\varpi-\Gamma)+3i(\varpi'-\Gamma')+i[(n+2)v-2\omega-n\omega]}\sum H_{-n-3,\,-n-3+\nu}\,e^{i(n+3-\nu)V}$$

$$+\frac{5}{128}\eta^2\eta'^5 e^{2i(\varpi-\Gamma)-3i(\varpi'-\Gamma')+i[(n-2)v+2\omega-n\omega]}\sum H_{-n+3,\,-n+3+\nu}\,e^{i(n-3-\nu)V}$$

$$+\frac{5}{64}\eta^2\eta'^5 e^{-3i(\varpi'-\Gamma')+in(v-\omega)}\sum H_{-n+3,\,-n+3+\nu}\,e^{i(n-3-\nu)V}$$

$$+\frac{5}{64}\eta^2\eta'^5 e^{3i(\varpi'-\Gamma')+in(v-\omega)}\sum H_{-n-3,\,-n-3+\nu}\,e^{i(n+3-\nu)V}$$

$$+\frac{5}{64}\eta^2\eta'^5 e^{-2i(\varpi-\Gamma)-i(\varpi'-\Gamma')+i[(n+2)v-2\omega-n\omega]}\sum H_{-n+1,\,-n+1+\nu}\,e^{i(n-1-\nu)V}$$

$$+\frac{5}{64}\eta^2\eta'^5 e^{2i(\varpi-\Gamma)+i(\varpi'-\Gamma')+i[(n-2)v+2\omega-n\omega]}\sum H_{-n-1,\,-n-1+\nu}\,e^{i(n+1-\nu)V}$$

$$+\frac{5}{64}\eta^2\eta'^5 e^{-2i(\varpi-\Gamma)+i(\varpi'-\Gamma')+i[(n+2)v-2\omega-n\omega]}\sum H_{-n-1,\,-n-1+\nu}\,e^{i(n+1-\nu)V}$$

$$+\frac{5}{64}\eta^2\eta'^5 e^{2i(\varpi-\Gamma)-i(\varpi'-\Gamma')+i[(n-2)v+2\omega-n\omega]}\sum H_{-n+1,\,-n+1+\nu}\,e^{i(n-1-\nu)V}$$

$$+\frac{5}{32}\eta^2\eta'^5 e^{-i(\varpi'-\Gamma')+in(v-\omega)}\sum H_{-n+1,\,-n+1+\nu}\,e^{i(n-1-\nu)V}$$

$$+\frac{5}{32}\eta^2\eta'^5 e^{i(\varpi'-\Gamma')+in(v-\omega)}\sum H_{-n-1,\,-n-1+\nu}\,e^{i(n+1-\nu)V},$$

$$(4, 1, 6)\quad \rho\rho'^6 e^{i(nv-v')} = \frac{1}{128}\eta\eta'^6 e^{-i(\pi-\Gamma)-6i(\pi'-\Gamma')+i[(n+1)v-\omega-n\omega']}\sum H_{-n+6,-n+6+\nu}e^{-i(n-6-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{128}\eta\eta'^6 e^{i(\pi-\Gamma)+6i(\pi'-\Gamma')+i[(n-1)v+\omega-n\omega']}\sum H_{-n-6,-n-6+\nu}e^{-i(n+6-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{128}\eta\eta'^6 e^{-i(\pi-\Gamma)+6i(\pi'-\Gamma')+i[(n+1)v-\omega-n\omega']}\sum H_{-n-6,-n-6+\nu}e^{-i(n+6-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{128}\eta\eta'^6 e^{i(\pi-\Gamma)-6i(\pi'-\Gamma')+i[(n-1)v+\omega-n\omega']}\sum H_{-n+6,-n+6+\nu}e^{-i(n-6-\nu)V}$$

$$+\frac{3}{64}\eta\eta'^6 e^{-i(\pi-\Gamma)-4i(\pi'-\Gamma')+i[(n+1)v-\omega-n\omega']}\sum H_{-n+4,-n+4+\nu}e^{-i(n-4-\nu)V}$$

$$+\frac{3}{64}\eta\eta'^6 e^{i(\pi-\Gamma)+4i(\pi'-\Gamma')+i[(n-1)v+\omega-n\omega']}\sum H_{-n-4,-n-4+\nu}e^{-i(n+4-\nu)V}$$

$$+\frac{3}{64}\eta\eta'^6 e^{-i(\pi-\Gamma)+4i(\pi'-\Gamma')+i[(n+1)v-\omega-n\omega']}\sum H_{-n-4,-n-4+\nu}e^{-i(n+4-\nu)V}$$

$$+\frac{3}{64}\eta\eta'^6 e^{i(\pi-\Gamma)-4i(\pi'-\Gamma')+i[(n-1)v+\omega-n\omega']}\sum H_{-n+4,-n+4+\nu}e^{-i(n-4-\nu)V}$$

$$+\frac{15}{128}\eta\eta'^6 e^{-i(\pi-\Gamma)-2i(\pi'-\Gamma')+i[(n+1)v-\omega-n\omega']}\sum H_{-n+2,-n+2+\nu}e^{-i(n-2-\nu)V}$$

$$+\frac{15}{128}\eta\eta'^6 e^{i(\pi-\Gamma)+2i(\pi'-\Gamma')+i[(n-1)v+\omega-n\omega']}\sum H_{-n-2,-n-2+\nu}e^{-i(n+2-\nu)V}$$

$$+\frac{15}{128}\eta\eta'^6 e^{-i(\pi-\Gamma)+2i(\pi'-\Gamma')+i[(n+1)v-\omega-n\omega']}\sum H_{-n-2,-n-2+\nu}e^{-i(n+2-\nu)V}$$

$$+\frac{15}{128}\eta\eta'^6 e^{i(\pi-\Gamma)-2i(\pi'-\Gamma')+i[(n-1)v+\omega-n\omega']}\sum H_{-n+2,-n+2+\nu}e^{-i(n-2-\nu)V}$$

$$+\frac{5}{32}\eta\eta'^6 e^{-i(\pi-\Gamma)+i[(n+1)v-\omega-n\omega']}\sum H_{-n,-n+\nu}e^{-i(n-\nu)V}$$

$$+\frac{5}{32}\eta\eta'^6 e^{i(\pi-\Gamma)+i[(n-1)v+\omega-n\omega']}\sum H_{-n,-n+\nu}e^{-i(n-\nu)V},$$

$$(4, 0, 7)\quad \rho'^7 e^{in(v'-\omega')} = \frac{1}{128}\eta'^7 e^{-7i(\pi'-\Gamma')+in(v'-\omega')}\sum H_{-n+7,-n+7+\nu}e^{-i(n-7-\nu)V}$$

$$+\frac{1}{128}\eta'^7 e^{7i(\pi'-\Gamma')+in(v'-\omega')}\sum H_{-n-7,-n-7+\nu}e^{-i(n+7-\nu)V}$$

$$+\frac{7}{128}\eta'^7 e^{-5i(\pi'-\Gamma')+in(v'-\omega')}\sum H_{-n+5,-n+5+\nu}e^{-i(n-5-\nu)V}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$+\frac{7}{128}\eta'^7 e^{-5i(\pi'-\Gamma')+im(v'-\varpi')}\sum H'_{n-5,\,n-5+\nu}\,e^{i(n-5+\nu)V'}$$

$$+\frac{21}{128}\eta'^7 e^{3i(\pi'-\Gamma')+im(v'-\varpi')}\sum H'_{n+3,\,n+3+\nu}\,e^{i(n+3+\nu)V'}$$

$$+\frac{21}{128}\eta'^7 e^{-3i(\pi'-\Gamma')+im(v'-\varpi')}\sum H'_{n-3,\,n-3+\nu}\,e^{i(n-3+\nu)V'}$$

$$+\frac{35}{128}\eta'^7 e^{i(\pi'-\Gamma')+im(v'-\varpi')}\sum H'_{n+1,\,n+1+\nu}\,e^{i(n+1+\nu)V'}$$

$$+\frac{35}{128}\eta'^7 e^{-i(\pi'-\Gamma')+im(v'-\varpi')}\sum H'_{n-1,\,n-1+\nu}\,e^{i(n-1+\nu)V'}.$$

57. L'expression (3) s'écrivant aussi comme il suit :

$$(5)\qquad \rho^s\rho'^{s'}e^{im(v-v')} = \frac{1}{2^{s+s'}}\eta^s\eta'^{s'}$$

$$\times\Big\{ e^{is(\pi-\Gamma)+is'(\pi'-\Gamma')+i[(n+s)(v-\varpi)-n(v'-\varpi')+s'(v'-\varpi')]}$$

$$+\frac{s}{1}e^{i(s-2)(\pi-\Gamma)+is'(\pi'-\Gamma')+i[(n+s-2)(v-\varpi)-n(v'-\varpi')+s'(v'-\varpi')]}$$

$$+\frac{s(s-1)}{1.2}e^{i(s-4)(\pi-\Gamma)+is'(\pi'-\Gamma')+i[(n+s-4)(v-\varpi)-n(v'-\varpi')+s'(v'-\varpi')]}$$

$$+\ldots$$

$$+\frac{s'}{1}e^{is(\pi-\Gamma)+i(s'-2)(\pi'-\Gamma')+i[(n+s)(v-\varpi)-n(v'-\varpi')+(s'-2)(v'-\varpi')]}$$

$$+\frac{s}{1}\frac{s'}{1}e^{i(s-2)(\pi-\Gamma)+i(s'-2)(\pi'-\Gamma')+i[(n+s-2)(v-\varpi)-n(v'-\varpi')+(s'-2)(v'-\varpi')]}$$

$$+\ldots\Big\},$$

on en tire, en mettant V′ au lieu de V′ + U′, les formules que voici :

$$(6,0,0)\qquad e^{in(v-v')} = e^{-im(v'-\varpi')}\sum H'_{n,n+\nu}e^{i(n+\nu)V'},$$

$$(6,1,0)\qquad \rho e^{im(v-v')} = \frac{1}{2}\eta e^{i(\pi-\Gamma)+im(v-\varpi)}\sum H'_{n+1,n+1+\nu}e^{i(n+1+\nu)V'}$$

$$+\frac{1}{2}\eta e^{-i(\pi-\Gamma)+im(v-\varpi)}\sum H'_{n-1,n-1+\nu}e^{i(n-1+\nu)V'},$$

$$(6, \text{o}, 1) \qquad \rho' e^{in(v-v')} = \frac{1}{2}\eta' e^{[illegible]\,[(n-1)\pi' + \omega' - n\omega]} \sum \Pi'_{n,n+\nu}\, e^{i(n+\nu)V}$$

$$+ \frac{1}{2}\eta' e^{[illegible]\,[(n+1)\pi' - \omega' - n\omega]} \sum \Pi'_{n,n+\nu}\, e^{i(n+\nu)V},$$

. . . . .

Evidemment, il n'est pas nécessaire de continuer ces formules; car, les formules (4, s, s′) étant établies, on en déduira immédiatement les formules (6, s, s′). En effet, pour avoir l'expression (6, s, s′) du produit $\rho^{s}\rho'^{s'} e^{in(v-v')}$, il suffit de changer, dans l'équation (4, s′, s), ρ, η, v, ω, Γ, π et Π en ρ', η', v', ω', Γ', π' et Π', et vice versa, et encore, n en $-n$.

Aux expressions que nous venons de donner, il y a lieu d'ajouter quelques remarques. Les voici:

1°. Les sommes, entrant comme facteurs dans les seconds membres des équations (4, s, s′) et (6, s, s′), doivent, évidemment, être formées en attribuant à l'indice ν les valeurs des nombres entiers à partir de $\nu = -\infty$ jusqu'à $\nu = +\infty$. Donc, si l'on s'arrête aux termes du septième degré, on prendra, en considérant que les diverses expressions renferment le facteur $\eta^{s}\eta'^{s'}$,

si $s + s' = 0 : \nu = -7, -6, \ldots -1, 0, +1, \ldots +6, +7;$

si $s + s' = 1 : \nu = -6, -5, \ldots -1, 0, +1, \ldots +5, +6;$

. . .

si $s + s' = 6 : \nu = -1, 0, +1,$

si $s + s' = 7 : \nu = 0.$

2°. Dans les formules (4, s, s′) figure encore l'argument ω', qui n'est pas une fonction de v mais bien de v', et, dans les formules (6, s, s′), l'argument ω, qui est une fonction de v. On remplacera, cependant, en utilisant les relations (14) et (14′) du n° 41, ω' par l'argument $\mu\frac{\varsigma}{\varsigma}\omega$, isocinétique avec celui-là, et ω par $\frac{1}{\mu}\frac{\varsigma}{\varsigma}\omega'$. En effet, la première des relations mentionnées conduit à l'équation que voici:

$$(7) \qquad e^{in\omega'} = e^{in\left(\Gamma' + [illegible] - \Gamma + [illegible]\right)},$$

et la seconde de ces relations à celle-ci:

$$(7') \qquad e^{im\omega} = e^{im\left(l + \frac{1}{n}\varsigma(\omega' - l') + \frac{H+U}{1-\varsigma}\right)}.$$

On aura, en introduisant ces valeurs dans les formules (4, s, s′) et (6, s, s′), des expressions dépendant seulement de v, ou seulement de v', pourvu qu'on y ait fait dépendre H + U de v, et H′ + U′ de v'. Mais encore, rien n'empêche, afin de rendre les arguments exempts de termes périodiques, de développer les exponentielles suivant les puissances des quantités très petites $\varsigma' \frac{H' + U'}{1 - \varsigma'}$ et $\varsigma \frac{H + U}{1 - \varsigma}$. Cependant, ces opérations s'affectuant sans aucune difficulté, je ne m'y arrête pas.

3°. Lorsqu'il s'agit de développer la fonction

$$\rho^{s}\rho'^{s'} e^{i(m\omega + A)},$$

A étant un agrégat périodique dont nous supposons la valeur toujours très petite, les formules que nous avons mises en évidence s'appliqueront encore: il faut seulement mettre, dans les formules (4, s, s′), $\omega' - A$ au lieu de ω', et, dans les formules (6, s, s′), $\omega + A$ au lieu de ω. Finalement, on pourra développer les exponentielles suivant les puissances de A. Ainsi, par exemple, le développement de la fonction

$$\rho^{s}\rho'^{s'} e^{im(v - v')}$$

s'obtient facilement, vu qu'on a:

$$v - v' = r - r' - (G - G'),$$

et que $G - G'$ s'exprime moyennant un agrégat périodique dont la valeur est peu considérable.

58. Pour arriver à la forme définitive des développements dont il s'agit, il faut qu'on introduise, dans les formules des deux derniers numéros, les expressions des fonctions Π et Π' telles qu'on les a données par les équations (21) du n° 42, et ensuite, qu'on remplace les fonctions $\Sigma(\eta', \eta)$ et $\Sigma(\eta, \eta')$ par les développements (22). De la sorte, on obtiendra les produits, envisagés dans les numéros mentionnés, développés suivant les

puissances des fonctions diastématiques. Pour donner un exemple du calcul dont il est question, je vais spécifier les détails relativement à la transformation de $e^{in(v-v')}$.

On aura d'abord, en partant de l'équation (4, o, o):

$$
\begin{aligned}
e^{in(v-v')} = e^{in(v-\omega)}\Big\{ & \big[\Sigma_0^{-n,-n}(\eta', \eta) + \Sigma_1^{-n,-n}(\eta', \eta)e^{i(v-\omega)} + \dots \\
& \qquad + \Sigma_{-1}^{-n,-n}(\eta', \eta)e^{-i(v-\omega)} + \dots\big]e^{-inV} \\
& + \big[\Sigma_0^{-n,-n+1}(\eta', \eta) + \Sigma_1^{-n,-n+1}(\eta', \eta)e^{i(v-\omega)} + \dots \\
& \qquad + \Sigma_{-1}^{-n,-n+1}(\eta', \eta)e^{-i(v-\omega)} + \dots\big]e^{-i(n-1)V} \\
& + \big[\Sigma_0^{-n,-n-1}(\eta', \eta) + \Sigma_1^{-n,-n-1}(\eta', \eta)e^{i(v-\omega)} + \dots \\
& \qquad + \Sigma_{-1}^{-n,-n-1}(\eta', \eta)e^{-i(v-\omega)} + \dots\big]e^{-i(n+1)V} \\
& + \big[\Sigma_0^{-n,-n+2}(\eta', \eta) + \Sigma_1^{-n,-n+2}(\eta', \eta)e^{i(v-\omega)} + \dots \\
& \qquad + \Sigma_{-1}^{-n,-n+2}(\eta', \eta)e^{-i(v-\omega)} + \dots\big]e^{-i(n-2)V} \\
& + \dots\Big\},
\end{aligned}
$$

ou bien, en considérant l'équation (23) du n° 42:

$$
\begin{aligned}
& e^{in(v-v')} = \\
e^{in(v-\omega)}\Big\{ & \big[\Sigma_0^{n,n}(\eta', \eta) + \Sigma_{-1}^{n,n}(\eta', \eta)e^{-2i(\pi'-\Gamma')+i(v-\omega)} + \dots \\
& \qquad + \Sigma_1^{n,n}(\eta', \eta)e^{2i(\pi'-\Gamma')-i(v-\omega)} + \dots\big]e^{-inV} \\
& + \big[\Sigma_0^{n,n-1}(\eta', \eta)e^{-2i(\pi'-\Gamma')} + \Sigma_{-1}^{n,n-1}(\eta', \eta)e^{-2i(\pi'-\Gamma')-2i(\pi'-\Gamma')+i(v-\omega)} + \dots \\
& \qquad + \Sigma_1^{n,n-1}(\eta', \eta)e^{2i(\pi'-\Gamma')-2i(\pi'-\Gamma')-i(v-\omega)} + \dots\big]e^{-i(n-1)V} \\
& + \big[\Sigma_0^{n,n+1}(\eta', \eta)e^{2i(\pi'-\Gamma')} + \Sigma_{-1}^{n,n+1}(\eta', \eta)e^{-2i(\pi'-\Gamma')+2i(\pi'-\Gamma')+i(v-\omega)} + \dots \\
& \qquad + \Sigma_1^{n,n+1}(\eta', \eta)e^{2i(\pi'-\Gamma')+2i(\pi'-\Gamma')-i(v-\omega)} + \dots\big]e^{-i(n+1)V} \\
& + \big[\Sigma_0^{n,n-2}(\eta', \eta)e^{-4i(\pi'-\Gamma')} + \Sigma_{-1}^{n,n-2}(\eta', \eta)e^{-2i(\pi'-\Gamma')-4i(\pi'-\Gamma')+i(v-\omega)} + \dots \\
& \qquad + \Sigma_1^{n,n-2}(\eta', \eta)e^{2i(\pi'-\Gamma')-4i(\pi'-\Gamma')-i(v-\omega)} + \dots\big]e^{-i(n-2)V} \\
& + \dots\Big\}
\end{aligned}
$$

Maintenant, si l'on porte, dans la formule précédente, les expressions des fonctions $\Sigma(\eta', \eta)$, on parviendra finalement au développement que voici:

$$
(8)\quad e^{in(v-\omega)} = e^{in(v-\omega-V)}\{\xi_0^{n,0}\varepsilon_0^{n\varsigma,0} - \xi_2^{n,0}\varepsilon_0^{n\varsigma,0}\eta'^2 - \xi_0^{n,0}\varepsilon_2^{n\varsigma,0}\eta^2
$$

$$
+ \xi_4^{n,0}\varepsilon_0^{n\varsigma,0}\eta'^4 + \xi_2^{n,0}\varepsilon_2^{n\varsigma,0}\eta^2\eta'^2 + \xi_0^{n,0}\varepsilon_4^{n\varsigma,0}\eta^4 \ldots\}
$$

$$
+ e^{in(v-\omega-V)}\sum_1^\infty(-\eta)^\nu e^{i\nu[v-\omega-(\tau-\Gamma)]}\{\xi_0^{n,0}\varepsilon_\nu^{n\varsigma,-\nu} - \xi_2^{n,0}\varepsilon_\nu^{n\varsigma,-\nu}\eta'^2
$$

$$
- \xi_0^{n,0}\varepsilon_{\nu+2}^{n\varsigma,-\nu}\eta^2 + \ldots\}
$$

$$
+ e^{in(v-\omega-V)}\sum_1^\infty(-\eta)^\nu e^{-i\nu[v-\omega-(\tau-\Gamma)]}\{\xi_0^{n,0}\varepsilon_\nu^{n\varsigma,\nu} - \xi_2^{n,0}\varepsilon_\nu^{n\varsigma,\nu}\eta'^2
$$

$$
- \xi_0^{n,0}\varepsilon_{\nu+2}^{n\varsigma,\nu}\eta^2 + \ldots\}
$$

$$
+ \eta' e^{i[n(v-\omega)-(n-1)V-(\tau-\Gamma)]}\{\xi_1^{n,-1}\varepsilon_0^{(n-1)\varsigma,0} - \xi_3^{n,-1}\varepsilon_0^{(n-1)\varsigma,0}\eta'^2
$$

$$
- \xi_1^{n,-1}\varepsilon_2^{(n-1)\varsigma,0}\eta^2 + \ldots\}
$$

$$
+ \eta' e^{i[n(v-\omega)-(n-1)V-(\tau-\Gamma)]}\sum_1^\infty(-\eta)^\nu e^{i\nu[v-\omega-(\tau-\Gamma)]}\{\xi_1^{n,-1}\varepsilon_\nu^{(n-1)\varsigma,-\nu}
$$

$$
- \xi_3^{n,-1}\varepsilon_\nu^{(n-1)\varsigma,-\nu}\eta'^2 - \xi_1^{n,-1}\varepsilon_{\nu+2}^{(n-1)\varsigma,-\nu}\eta^2 + \ldots\}
$$

$$
+ \eta' e^{i[n(v-\omega)-(n-1)V-(\tau-\Gamma)]}\sum_1^\infty(-\eta)^\nu e^{-i\nu[v-\omega-(\tau-\Gamma)]}\{\xi_1^{n,-1}\varepsilon_\nu^{(n-1)\varsigma,\nu}
$$

$$
- \xi_3^{n,-1}\varepsilon_\nu^{(n-1)\varsigma,\nu}\eta'^2 - \xi_1^{n,-1}\varepsilon_{\nu+2}^{(n-1)\varsigma,\nu}\eta^2 + \ldots\}
$$

$$
+ \eta' e^{i[n(v-\omega)-(n+1)V+(\tau-\Gamma)]}\{\xi_1^{n,1}\varepsilon_0^{(n+1)\varsigma,0} - \xi_3^{n,1}\varepsilon_0^{(n+1)\varsigma,0}\eta'^2
$$

$$
- \xi_1^{n,1}\varepsilon_2^{(n+1)\varsigma,0}\eta^2 + \ldots\}
$$

$$
+ \eta' e^{i[n(v-\omega)-(n+1)V+(\tau-\Gamma)]}\sum_1^\infty(-\eta)^\nu e^{i\nu[v-\omega-(\tau-\Gamma)]}\{\xi_1^{n,1}\varepsilon_\nu^{(n+1)\varsigma,-\nu}
$$

$$
- \xi_3^{n,1}\varepsilon_\nu^{(n+1)\varsigma,-\nu}\eta'^2 - \xi_1^{n,1}\varepsilon_{\nu+2}^{(n+1)\varsigma,-\nu}\eta^2 + \ldots\}
$$

$$
+ \eta' e^{i[n(v-\omega)-(n+1)V+(\tau-\Gamma)]}\sum_1^\infty(-\eta)^\nu e^{-i\nu[v-\omega-(\tau-\Gamma)]}\{\xi_1^{n,1}\varepsilon_\nu^{(n+1)\varsigma,\nu}
$$

$$
- \xi_3^{n,1}\varepsilon_\nu^{(n+1)\varsigma,\nu}\eta'^2 - \xi_1^{n,1}\varepsilon_{\nu+2}^{(n+1)\varsigma,\nu}\eta^2 + \ldots\}
$$

$$
+ \eta'^2 e^{i[n(v-\omega)-(n-2)V-2(\tau-\Gamma)]}\{\xi_2^{n,-2}\varepsilon_0^{(n-2)\varsigma,0} - \xi_4^{n,-2}\varepsilon_0^{(n-2)\varsigma,0}\eta'^2
$$

$$
- \xi_2^{n,-2}\varepsilon_2^{(n-2)\varsigma,0}\eta^2 + \ldots\}
$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$+\,\gamma_{\prime}'^{2}e^{i[n(v-\omega)-(n-2)V-2(\pi-\Gamma)]}\sum_{1}^{\infty}(-\gamma_{\prime})^{\nu}e^{\nu i[v-\omega-(\pi-\Gamma)]}\Big\{\xi_{2}^{n,-2}\,\varepsilon_{\nu}^{(n-2)\varsigma,\nu}$$

$$-\,\xi_{4}^{n,-2}\,\varepsilon_{\nu}^{(n-2)\varsigma,\nu}\gamma_{\prime}'^{2}-\xi_{2}^{n,-2}\,\varepsilon_{\nu+2}^{(n-2)\varsigma,\nu}\gamma_{\prime}^{2}+\ldots\Big\}$$

$$+\,\gamma_{\prime}'^{2}e^{i[n(v-\omega)-(n-2)V-2(\pi-\Gamma)]}\sum_{1}^{\infty}(-\gamma_{\prime})^{\nu}e^{-\nu i[v-\omega-(\pi-\Gamma)]}\Big\{\xi_{2}^{n,-2}\,\varepsilon_{\nu}^{(n-2)\varsigma,-\nu}$$

$$-\,\xi_{4}^{n,-2}\,\varepsilon_{\nu}^{(n-2)\varsigma,-\nu}\gamma_{\prime}'^{2}-\xi_{2}^{n,-2}\,\varepsilon_{\nu+2}^{(n-2)\varsigma,-\nu}\gamma_{\prime}^{2}+\ldots\Big\}$$

$$+\,\gamma_{\prime}'^{2}e^{i[n(v-\omega)-(n+2)V+2(\pi-\Gamma)]}\Big\{\xi_{2}^{n,2}\,\varepsilon_{0}^{(n+2)\varsigma,0}-\xi_{4}^{n,2}\,\varepsilon_{0}^{(n+2)\varsigma,0}\gamma_{\prime}'^{2}-\xi_{2}^{n,2}\,\varepsilon_{2}^{(n+2)\varsigma,0}\gamma_{\prime}^{2}+\ldots\Big\}$$

$$+\,\gamma_{\prime}'^{2}e^{i[n(v-\omega)-(n+2)V+2(\pi-\Gamma)]}\sum_{1}^{\infty}(-\gamma_{\prime})^{\nu}e^{\nu i[v-\omega-(\pi-\Gamma)]}\Big\{\xi_{2}^{n,2}\,\varepsilon_{\nu}^{(n+2)\varsigma,\nu}$$

$$-\,\xi_{4}^{n,2}\,\varepsilon_{\nu}^{(n+2)\varsigma,\nu}\gamma_{\prime}'^{2}-\xi_{2}^{n,2}\,\varepsilon_{\nu+2}^{(n+2)\varsigma,\nu}\gamma_{\prime}^{2}+\ldots\Big\}$$

$$+\,\gamma_{\prime}'^{2}e^{i[n(v-\omega)-(n+2)V+2(\pi-\Gamma)]}\sum_{1}^{\infty}(-\gamma_{\prime})^{\nu}e^{-\nu i[v-\omega-(\pi-\Gamma)]}\Big\{\xi_{2}^{n,2}\,\varepsilon_{\nu}^{(n+2)\varsigma,-\nu}$$

$$-\,\xi_{4}^{n,2}\,\varepsilon_{\nu}^{(n+2)\varsigma,-\nu}\gamma_{\prime}'^{2}-\xi_{2}^{n,2}\,\varepsilon_{\nu+2}^{(n+2)\varsigma,-\nu}\gamma_{\prime}^{2}+\ldots\Big\}$$

$$+\,\gamma_{\prime}'^{3}e^{i[n(v-\omega)-(n-3)V-3(\pi-\Gamma)]}\Big\{\xi_{3}^{n,-3}\,\varepsilon_{0}^{(n-3)\varsigma,0}-\xi_{5}^{n,-3}\,\varepsilon_{0}^{(n-3)\varsigma,0}\gamma_{\prime}'^{2}-\xi_{3}^{n,-3}\,\varepsilon_{2}^{(n-3)\varsigma,0}\gamma_{\prime}^{2}+\ldots\Big\}$$

$$+\,\gamma_{\prime}'^{3}e^{i[n(v-\omega)-(n-3)V-3(\pi-\Gamma)]}\sum_{1}^{\infty}(-\gamma_{\prime})^{\nu}e^{\nu i[v-\omega-(\pi-\Gamma)]}\Big\{\xi_{3}^{n,-3}\,\varepsilon_{\nu}^{(n-3)\varsigma,\nu}$$

$$-\,\xi_{5}^{n,-3}\,\varepsilon_{\nu}^{(n-3)\varsigma,\nu}\gamma_{\prime}'^{2}-\xi_{3}^{n,-3}\,\varepsilon_{\nu+2}^{(n-3)\varsigma,\nu}\gamma_{\prime}^{2}+\ldots\Big\}$$

$$+\,\gamma_{\prime}'^{3}e^{i[n(v-\omega)-(n-3)V-3(\pi-\Gamma)]}\sum_{1}^{\infty}(-\gamma_{\prime})^{\nu}e^{-\nu i[v-\omega-(\pi-\Gamma)]}\Big\{\xi_{3}^{n,-3}\,\varepsilon_{\nu}^{(n-3)\varsigma,-\nu}$$

$$-\,\xi_{5}^{n,-3}\,\varepsilon_{\nu}^{(n-3)\varsigma,-\nu}\gamma_{\prime}'^{2}-\xi_{3}^{n,-3}\,\varepsilon_{\nu+2}^{(n-3)\varsigma,-\nu}\gamma_{\prime}^{2}+\ldots\Big\}$$

$$+\,\gamma_{\prime}'^{3}e^{i[n(v-\omega)-(n+3)V+3(\pi-\Gamma)]}\Big\{\xi_{3}^{n,3}\,\varepsilon_{0}^{(n+3)\varsigma,0}-\xi_{5}^{n,3}\,\varepsilon_{0}^{(n+3)\varsigma,0}\gamma_{\prime}'^{2}-\xi_{3}^{n,3}\,\varepsilon_{2}^{(n+3)\varsigma,0}\gamma_{\prime}^{2}+\ldots\Big\}$$

$$+\,\gamma_{\prime}'^{3}e^{i[n(v-\omega)-(n+3)V+3(\pi-\Gamma)]}\sum_{1}^{\infty}(-\gamma_{\prime})^{\nu}e^{\nu i[v-\omega-(\pi-\Gamma)]}\Big\{\xi_{3}^{n,3}\,\varepsilon_{\nu}^{(n+3)\varsigma,\nu}$$

$$-\,\xi_{5}^{n,3}\,\varepsilon_{\nu}^{(n+3)\varsigma,\nu}\gamma_{\prime}'^{2}-\xi_{3}^{n,3}\,\varepsilon_{\nu+2}^{(n+3)\varsigma,\nu}\gamma_{\prime}^{2}+\ldots\Big\}$$

$$+\,\gamma_{\prime}'^{3}e^{i[n(v-\omega)-(n+3)V+3(\pi-\Gamma)]}\sum_{1}^{\infty}(-\gamma_{\prime})^{\nu}e^{-\nu i[v-\omega-(\pi-\Gamma)]}\Big\{\xi_{3}^{n,3}\,\varepsilon_{\nu}^{(n+3)\varsigma,-\nu}$$

$$-\,\xi_{5}^{n,3}\,\varepsilon_{\nu}^{(n+3)\varsigma,-\nu}\gamma_{\prime}'^{2}-\xi_{3}^{n,3}\,\varepsilon_{\nu+2}^{(n+3)\varsigma,-\nu}\gamma_{\prime}^{2}+\ldots\Big\}$$

$$+\,\ldots\ldots$$

Il s'entend que cette équation reste en vigueur, si l'on y change v en v', v' en v, V en V', ω en ω', ω' en ω, π en π', π' en π, Γ en Γ', Γ' en Γ, η en η', η' en η, ς en ς' et finalement n en $-n$.

59. Au lieu de donner des expressions, analogues à la précédente, de $\rho e^{in(v-v')}$, $\rho' e^{in(v-v')}$, etc., je vais maintenant rassembler, dans des groupes séparés, les termes de divers degrés, ce qui sera le plus commode lorsqu'on en fera usage. Dans les listes suivantes, je me bornerai, toutefois, à ne mettre en évidence que les termes jusqu'à ceux du cinquième degré inclusivement, vu qu'on n'aura que très rarement l'occasion d'aller plus loin. A temps et lieu, nous déduirons les termes appréciables, d'ailleurs peu nombreux, qui appartiennent aux degrés plus élevés que le cinquième.

A) *Termes du degré zéro.*

Il n'y a pas de termes du degré zéro outre ceux qui figurent dans l'expression de $e^{in(v-v')}$; en ne considérant que ces termes, et en se rappelant les valeurs

$$\xi_0^{[illegible]} = \xi_0^{[illegible]} = 1,$$

on écrira tout simplement:

(9, 0,0,0) $$e^{[illegible]} = e^{[illegible]},$$

ou bien, en changeant v en v', v' en v, ω' en ω, V en V' et n en $-n$,

(9', 0,0,0) $$e^{[illegible]} = e^{[illegible]}.$$

B) *Termes du premier degré.*

Des termes du premier degré ne proviennent que des développements des fonctions $e^{[illegible]}$, $\rho e^{[illegible]}$ et $\rho' e^{[illegible]}$. En ne tenant compte que de ces termes, on aura les expressions

(10, 0,0,1) $$e^{[illegible]} = -\xi_1^{[illegible]}\eta e^{[illegible]}$$
$$-\xi_1^{[illegible]}\eta e^{[illegible]}$$
$$+\xi_1^{[illegible]}\eta' e^{[illegible]}$$
$$+\xi_1^{[illegible]}\eta' e^{[illegible]},$$

$$(10,1,0,1) \qquad \rho e^{in(v'-v)} = \frac{1}{2}\eta_{,}e^{-i(\pi-\Gamma)+i[(n+1)v-nV-\omega-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{2}\eta_{,}e^{i(\pi-\Gamma)+i[(n-1)v-nV+\omega-n\omega]},$$

$$(10,0,1,1) \qquad \rho' e^{in(v'-v)} = \frac{1}{2}\eta_{,}'e^{-i(\pi-\Gamma')+i[nv-(n-1)V-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{2}\eta_{,}'e^{i(\pi-\Gamma')+i[nv-(n+1)V-n\omega]}.$$

On aura également, après avoir changé v en v', etc.,

$$(10',0,0,1) \qquad e^{in(v-v')} = -\varepsilon_1^{n\varsigma,1}\eta_{,}'e^{-i(\pi-\Gamma')+i[(n-1)v-nV+\omega-n\omega]}$$

$$-\varepsilon_1^{n\varsigma,-1}\eta_{,}'e^{i(\pi-\Gamma')+i[(n+1)v-nV-\omega-n\omega]}$$

$$+\xi_1^{n,1}\eta_{,}e^{-i(\pi-\Gamma)+i[nv-(n+1)V-n\omega]}$$

$$+\xi_1^{n,-1}\eta e^{i(\pi-\Gamma)+i[nv-(n-1)V-n\omega]}$$

etc.

C) *Termes du deuxième degré.*

En ne tenant compte, toujours, que des termes du degré indiqué, nous aurons:

$$(11,0,0,2) \qquad e^{in(v-v')} = \left[-\xi_2^{n,0}\eta_{,}'^{2}-\varepsilon_2^{n\varsigma,0}\eta_{,}^{2}\right]e^{i(nv-nV-n\omega)}$$

$$+\varepsilon_2^{n\varsigma,-2}\eta_{,}^{2}e^{-2i(\pi-\Gamma)+i[(n+2)v-nV-2\omega-n\omega]}$$

$$+\varepsilon_2^{n\varsigma,2}\eta_{,}^{2}e^{2i(\pi-\Gamma)+i[(n-2)v-nV+2\omega-n\omega]}$$

$$-\xi_1^{n,-1}\varepsilon_1^{(n-1)\varsigma,-1}\eta_{,}\eta_{,}'e^{-i(\pi-\Gamma)+i(\pi-\Gamma')+i[(n+1)v-(n-1)V-\omega-n\omega]}$$

$$-\xi_1^{n,-1}\varepsilon_1^{(n-1)\varsigma,1}\eta_{,}\eta_{,}'e^{i(\pi-\Gamma)+i(\pi-\Gamma')+i[(n-1)v-(n-1)V+\omega-n\omega]}$$

$$-\xi_1^{n,1}\varepsilon_1^{(n+1)\varsigma,-1}\eta_{,}\eta_{,}'e^{-i(\pi-\Gamma)+i(\pi-\Gamma')+i[(n+1)v-(n+1)V-\omega-n\omega]}$$

$$-\xi_1^{n,1}\varepsilon_1^{(n+1)\varsigma,1}\eta_{,}\eta_{,}'e^{i(\pi-\Gamma)+i(\pi-\Gamma')+i[(n-1)v-(n+1)V+\omega-n\omega]}$$

$$+\xi_2^{n,-2}\eta_{,}'^{2}e^{-2i(\pi'-\Gamma')+i[nv-(n-2)V-n\omega]}$$

$$+\xi_2^{n,2}\eta_{,}'^{2}e^{2i(\pi-\Gamma')+i[nv-(n+2)V-n\omega]},$$

$$(\mathrm{II}, 1,0,2) \quad \rho e^{in(v-r)} = -\frac{1}{2}\Xi_1^{n\varsigma,-1}\eta^2 e^{2i(\pi-\Gamma)+i[(n+2)v-nV-2\omega-n\omega]}$$

$$-\frac{1}{2}\left(\Xi_1^{n\varsigma,1}+\Xi_1^{n\varsigma,-1}\right)\eta^2 e^{i(nv-nV-n\omega)}$$

$$-\frac{1}{2}\Xi_1^{n\varsigma,1}\eta^2 e^{2i(\pi-\Gamma)+i[(n-2)v-nV+2\omega-n\omega]},$$

$$+\frac{1}{2}\xi_1^{n,-1}\eta\eta' e^{i(\pi-\Gamma)-i(\pi'-\Gamma')+i[(n+1)v-(n-1)V-\omega-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{2}\xi_1^{n,-1}\eta\eta' e^{-i(\pi-\Gamma)-i(\pi'-\Gamma')+i[(n-1)v-(n-1)V+\omega-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{2}\xi_1^{n,1}\eta\eta' e^{i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')+i[(n+1)v-(n+1)V-\omega-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{2}\xi_1^{n,1}\eta\eta' e^{-i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')+i[(n-1)v-(n+1)V+\omega-n\omega]},$$

$$(\mathrm{II}, 0,1,2) \quad \rho' e^{in(v-r)} = -\frac{1}{2}\Xi_1^{(n-1)\varsigma,-1}\eta\eta' e^{i(\pi-\Gamma)-i(\pi'-\Gamma')+i[(n+1)v-(n-1)V-\omega-n\omega]}$$

$$-\frac{1}{2}\Xi_1^{(n-1)\varsigma,1}\eta\eta' e^{-i(\pi-\Gamma)-i(\pi'-\Gamma')+i[(n-1)v-(n-1)V+\omega-n\omega]}$$

$$-\frac{1}{2}\Xi_1^{(n+1)\varsigma,-1}\eta\eta' e^{i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')+i[(n+1)v-(n+1)V-\omega-n\omega]}$$

$$-\frac{1}{2}\Xi_1^{(n+1)\varsigma,1}\eta\eta' e^{-i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')+i[(n-1)v-(n+1)V+\omega-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{2}\xi_1^{n-1,-1}\eta'^2 e^{-2i(\pi'-\Gamma')+i[nv-(n-2)V-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{2}\left(\xi_1^{n-1,1}+\xi_1^{n+1,-1}\right)\eta'^2 e^{i(nv-nV-n\omega)}$$

$$+\frac{1}{2}\xi_1^{n+1,1}\eta'^2 e^{2i(\pi'-\Gamma')+i[nv-(n+2)V-n\omega]},$$

$$(\mathrm{II}, 2,0,2) \quad \rho^2 e^{in(v-r)} = \frac{1}{2}\eta^2 e^{i(nv-nV-n\omega)}$$

$$+\frac{1}{4}\eta^2 e^{2i(\pi-\Gamma)+i[(n+2)v-nV-2\omega-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{4}\eta^2 e^{-2i(\pi-\Gamma)+i[(n-2)v-nV+2\omega-n\omega]},$$

(11, 1,1,2) $\rho\rho' e^{i(nv-r)} = \frac{1}{4}\eta\eta' e^{i[(n\pi-\Gamma)-n(\pi-\Gamma)+q(n+1)v-(n-1)V-\omega-n\omega]}$

$+ \frac{1}{4}\eta\eta' e^{i[(n\pi-\Gamma)-n(\pi-\Gamma)+q(n-1)v-(n-1)V+\omega-n\omega]}$

$+ \frac{1}{4}\eta\eta' e^{i[(\pi-\Gamma)+n(\pi-\Gamma)+q(n+1)v-(n+1)V-\omega-n\omega]}$

$+ \frac{1}{4}\eta\eta' e^{i[(\pi-\Gamma)+(\pi-\Gamma)+q(n-1)v-(n+1)V+\omega-n\omega]}$.

(11, 0,2,2) $\rho'^2 e^{i(nv-r)} = \frac{1}{2}\eta'^2 e^{i(nqv-nV-n\omega)}$

$+ \frac{1}{4}\eta'^2 e^{i[2(\pi-\Gamma)+qnv-(n-2)V-n\omega]}$

$+ \frac{1}{4}\eta'^2 e^{i[2(\pi-\Gamma)+qnv-(n+2)V-n\omega]}$.

D) *Termes du troisième degré.*

(12, 0,0,3) $e^{i(nv-r)} = + \varepsilon_3^{nc,1}\eta^3 e^{i[(\pi-\Gamma)+q(n+1)v-nV-\omega-n\omega]}$

$+ \varepsilon_3^{nc,1}\eta^3 e^{i[(\pi-\Gamma)+q(n-1)v-nV+\omega-n\omega]}$

$- \varepsilon_3^{nc,-3}\eta^3 e^{i[3(\pi-\Gamma)+q(n+3)v-nV-3\omega-n\omega]}$

$- \varepsilon_3^{nc,3}\eta^3 e^{i[3(\pi-\Gamma)+q(n-3)v-nV+3\omega-n\omega]}$

$- \xi_1^{n,-1}\varepsilon_2^{(n-1)c,0}\eta^2\eta' e^{i[(\pi'-\Gamma)+qnv-(n-1)V-n\omega]}$

$- \xi_1^{n,1}\varepsilon_2^{(n+1)c,0}\eta^2\eta' e^{i[(\pi-\Gamma)+qnv-(n+1)V-n\omega]}$

$+ \xi_1^{n,-1}\varepsilon_2^{(n-1)c,-2}\eta^2\eta' e^{i[2(\pi-\Gamma)-(\pi-\Gamma)+q(n+2)v-(n-1)V-2\omega-n\omega]}$

$+ \xi_1^{n,-1}\varepsilon_2^{(n-1)c,2}\eta^2\eta' e^{i[2(\pi-\Gamma)-(\pi-\Gamma)+q(n-2)v-(n-1)V+2\omega-n\omega]}$

$+ \xi_1^{n,1}\varepsilon_2^{(n+1)c,-2}\eta^2\eta' e^{i[2(\pi-\Gamma)+(\pi-\Gamma)+q(n+2)v-(n+1)V-2\omega-n\omega]}$

$+ \xi_1^{n,1}\varepsilon_2^{(n+1)c,2}\eta^2\eta' e^{i[2(\pi-\Gamma)+(\pi-\Gamma)+q(n-2)v-(n+1)V+2\omega-n\omega]}$

$+ \xi_2^{n,0}\varepsilon_1^{nc,-1}\eta\eta'^2 e^{i[-(\pi-\Gamma)+q(n+1)v-nV-\omega-n\omega]}$

$+ \xi_2^{n,0}\varepsilon_1^{nc,1}\eta\eta'^2 e^{i[(\pi-\Gamma)+q(n-1)v-nV+\omega-n\omega]}$

(Cette formule se continue à la page suivante.)

$$- \Xi_2^{n,-2} \Xi_1^{(n-2)c,-1} \eta\eta'^2 e^{-(n\pi-\Gamma)-2(\pi-\Gamma)+i[(n+1)v-(n-2)V-\omega-n\omega]}$$

$$- \Xi_2^{n,-2} \Xi_1^{(n-2)c,1} \eta\eta'^2 e^{(n\pi-\Gamma)-2(n\pi-\Gamma)+i[(n-1)v-(n-2)V+\omega-n\omega]},$$

$$- \Xi_2^{n,2} \Xi_1^{(n+2)c,-1} \eta\eta'^2 e^{-(n\pi-\Gamma)+2(n\pi-\Gamma)+i[(n+1)v-(n+2)V-\omega-n\omega]}$$

$$- \Xi_2^{n,2} \Xi_1^{(n+2)c,1} \eta\eta'^2 e^{(\pi-\Gamma)+2(n\pi-\Gamma)+i[(n-1)v-(n+2)V+\omega-n\omega]},$$

$$- \Xi_3^{n,-1} \eta'^3 e^{-(n\pi-\Gamma)+i[nv-(n-1)V-n\omega]}$$

$$- \Xi_3^{n,1} \eta'^3 e^{(n\pi-\Gamma)+i[nv-(n+1)V-n\omega]},$$

$$+ \Xi_3^{n,-3} \eta'^3 e^{-3(\pi-\Gamma)+i[nv-(n-3)V-n\omega]}$$

$$+ \Xi_3^{n,3} \eta'^3 e^{3(n\pi-\Gamma)+i[nv-(n+3)V-n\omega]}\Big\},$$

$$(12,1,0,3) \quad \rho e^{\ldots} = -\frac{1}{2}\left\{\Xi_2^{nc,0} - \Xi_2^{nc,-2}\right\}\eta^2 e^{-(\pi-\Gamma)+i[(n+1)v-nV-\omega-n\omega]}$$

$$- \frac{1}{2}\left\{\Xi_2^{nc,0} - \Xi_2^{nc,2}\right\}\eta^3 e^{(\pi-\Gamma)+i[(n-1)v-nV+\omega-n\omega]}$$

$$+ \frac{1}{2}\Xi_2^{nc,-2}\eta^3 e^{-3(\pi-\Gamma)+i[(n+3)v-nV-3\omega-n\omega]}$$

$$+ \frac{1}{2}\Xi_2^{nc,2}\eta^3 e^{3(n\pi-\Gamma)+i[(n-3)v-nV+3\omega-n\omega]},$$

$$- \frac{1}{2}\Xi_1^{n,-1}\left\{\Xi_1^{(n-1)c,-1} + \Xi_1^{(n-1)c,1}\right\}\eta^2\eta' e^{-(n\pi-\Gamma)+i[nv-(n-1)V-n\omega]},$$

$$- \frac{1}{2}\Xi_1^{n,1}\left\{\Xi_1^{(n+1)c,-1} + \Xi_1^{(n+1)c,1}\right\}\eta^2\eta' e^{(n\pi-\Gamma)+i[nv-(n+1)V-n\omega]},$$

$$- \frac{1}{2}\Xi_1^{n,-1}\Xi_1^{(n-1)c,-1}\eta^2\eta' e^{-2(\pi-\Gamma)-(n\pi-\Gamma)+i[(n+2)v-(n-1)V-2\omega-n\omega]}$$

$$- \frac{1}{2}\Xi_1^{n,-1}\Xi_1^{(n-1)c,1}\eta^2\eta' e^{2(\pi-\Gamma)-(n\pi-\Gamma)+i[(n-2)v-(n-1)V+2\omega-n\omega]},$$

$$- \frac{1}{2}\Xi_1^{n,1}\Xi_1^{(n+1)c,-1}\eta^2\eta' e^{-2(\pi-\Gamma)+(n\pi-\Gamma)+i[(n+2)v-(n+1)V-2\omega-n\omega]}$$

$$- \frac{1}{2}\Xi_1^{n,1}\Xi_1^{(n+1)c,1}\eta^2\eta' e^{2(\pi-\Gamma)+(n\pi-\Gamma)+i[(n-2)v-(n+1)V+2\omega-n\omega]},$$

$$- \frac{1}{2}\Xi_2^{n,0}\eta\eta'^2 e^{-(n\pi-\Gamma)+i[(n+1)v-nV-\omega-n\omega]}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$-\frac{1}{2}\xi_2^{n,0}\eta_{/}\eta'^2 e^{i(\pi-\Gamma)+i[(n-1)v-nV+\omega-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{2}\xi_2^{n,-2}\eta_{/}\eta'^2 e^{-i(\pi-\Gamma)-2i(\pi-\Gamma)+i[(n+1)v-(n-2)V-\omega-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{2}\xi_2^{n,-2}\eta\eta_{/}'^2 e^{i(\pi-\Gamma)-2i(\pi-\Gamma)+i[(n-1)v-(n-2)V+\omega-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{2}\xi_2^{n,2}\eta_{/}\eta'^2 e^{-i(\pi-\Gamma)+2i(\pi-\Gamma)+i[(n+1)v-(n+2)V-\omega-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{2}\xi_2^{n,2}\eta_{/}\eta'^2 e^{i(\pi-\Gamma)+2i(\pi-\Gamma)+i[(n-1)v-(n+2)V+\omega-n\omega]},$$

(12, 0,1,3) $\rho' e^{im(v-v_{\prime})}$

$$-\frac{1}{2}\varepsilon_2^{(n-1)\varsigma,0}\eta^2\eta' e^{-i(\pi-\Gamma)+i[nv-(n-1)V-n\omega]}$$

$$-\frac{1}{2}\varepsilon_2^{(n+1)\varsigma,0}\eta_{/}^2\eta_{/}' e^{i(\pi-\Gamma)+i[nv-(n+1)V-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{2}\varepsilon_2^{(n-1)\varsigma,-2}\eta_{/}^2\eta' e^{-2i(\pi-\Gamma)-i(\pi-\Gamma)+i[(n+2)v-(n-1)V-2\omega-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{2}\varepsilon_2^{(n-1)\varsigma,2}\eta^2\eta_{/}' e^{2i(\pi-\Gamma)-i(\pi-\Gamma)+i[(n-2)v-(n-1)V+2\omega-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{2}\varepsilon_2^{(n+1)\varsigma,-2}\eta_{/}^2\eta' e^{-2i(\pi-\Gamma)+i(\pi-\Gamma)+i[(n+2)v-(n+1)V-2\omega-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{2}\varepsilon_2^{(n+1)\varsigma,2}\eta_{/}^2\eta_{/}' e^{2i(\pi-\Gamma)+i(\pi-\Gamma)+i[(n-2)v-(n+1)V+2\omega-n\omega]}$$

$$-\frac{1}{2}\varepsilon_1^{n\varsigma,-1}\left\{\xi_1^{n-1,1}+\xi_1^{n+1,-1}\right\}\eta\eta'^2 e^{-i(\pi-\Gamma)+i[(n+1)v-nV-\omega-n\omega]}$$

$$-\frac{1}{2}\varepsilon_1^{n\varsigma,1}\left\{\xi_1^{n-1,1}+\xi_1^{n+1,-1}\right\}\eta\eta_{/}'^2 e^{i(\pi-\Gamma)+i[(n-1)v-nV+\omega-n\omega]}$$

$$-\frac{1}{2}\xi_1^{n-1,-1}\varepsilon_1^{(n-2)\varsigma,-1}\eta\eta_{/}'^2 e^{-i(\pi-\Gamma)-2i(\pi-\Gamma)+i[(n+1)v-(n-2)V-\omega-n\omega]}$$

$$-\frac{1}{2}\xi_1^{n-1,-1}\varepsilon_1^{(n-2)\varsigma,1}\eta_{/}\eta'^2 e^{i(\pi-\Gamma)-2i(\pi-\Gamma)+i[(n-1)v-(n-2)V+\omega-n\omega]}$$

$$-\frac{1}{2}\xi_1^{n+1,1}\varepsilon_1^{(n+2)\varsigma,-1}\eta\eta_{/}'^2 e^{-i(\pi-\Gamma)+2i(\pi-\Gamma)+i[(n+1)v-(n+2)V-\omega-n\omega]}$$

$$-\frac{1}{2}\xi_1^{n+1,1}\varepsilon_1^{(n+2)\varsigma,1}\eta_{/}\eta'^2 e^{i(\pi-\Gamma)+2i(\pi-\Gamma)+i[(n-1)v-(n+2)V+\omega-n\omega]}$$

$$-\frac{1}{2}\left(\xi_2^{n-1,0}-\xi_2^{n+1,-2}\right)\eta_{/}'^3 e^{-i(\pi-\Gamma)+i[nv-(n-1)V-n\omega]}$$

Cette formule se continue à la page suivante

$$-\frac{1}{2}\left(\xi_2^{n+1,0}-\xi_2^{n-1,2}\right)\eta'^3 e^{i(\varpi'-\Gamma')+i[nv-(n+1)V-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{2}\xi_2^{n-1,-2}\eta'^3 e^{-3i(\varpi'-\Gamma')+i[nv-(n-3)V-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{2}\xi_2^{n+1,2}\eta'^3 e^{3i(\varpi'-\Gamma')+i[nv-(n+3)V-n\omega']},$$

$$(12,2,0,3)\quad \rho^2 e^{im(v-r)}=-\left\{\frac{1}{2}\varepsilon_1^{n\varsigma,-1}+\frac{1}{4}\varepsilon_1^{n\varsigma,1}\right\}\eta^3 e^{-i(\varpi-\Gamma)+i[(n+1)v-nV-\omega-n\omega']}$$

$$-\left\{\frac{1}{2}\varepsilon_1^{n\varsigma,1}+\frac{1}{4}\varepsilon_1^{n\varsigma,-1}\right\}\eta^3 e^{i(\varpi-\Gamma)+i[(n-1)v-nV+\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{4}\varepsilon_1^{n\varsigma,-1}\eta^3 e^{-3i(\varpi-\Gamma)+i[(n+3)v-nV-3\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{4}\varepsilon_1^{n\varsigma,1}\eta^3 e^{3i(\varpi-\Gamma)+i[(n-3)v-nV+3\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{4}\xi_1^{n,-1}\eta^2\eta' e^{-i(\varpi'-\Gamma')+i[nv-(n-1)V-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{4}\xi_1^{n,1}\eta^2\eta' e^{i(\varpi'-\Gamma')+i[nv-(n+1)V-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{4}\xi_1^{n,-1}\eta^2\eta' e^{-2i(\varpi-\Gamma)-i(\varpi'-\Gamma')+i[(n+2)v-(n-1)V-2\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{4}\xi_1^{n,-1}\eta^2\eta' e^{2i(\varpi-\Gamma)-i(\varpi'-\Gamma')+i[(n-2)v-(n-1)V+2\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{4}\xi_1^{n,1}\eta^2\eta' e^{-2i(\varpi-\Gamma)+i(\varpi'-\Gamma')+i[(n+2)v-(n+1)V-2\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{4}\xi_1^{n,1}\eta^2\eta' e^{2i(\varpi-\Gamma)+i(\varpi'-\Gamma')+i[(n-2)v-(n+1)V+2\omega-n\omega']},$$

$$(12,1,1,3)\quad \rho\rho' e^{im(v-r)}=-\frac{1}{4}\left\{\varepsilon_1^{(n-1)\varsigma,-1}+\varepsilon_1^{(n-1)\varsigma,1}\right\}\eta^2\eta' e^{-i(\varpi'-\Gamma')+i[nv-(n-1)V-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{4}\left\{\varepsilon_1^{(n+1)\varsigma,-1}+\varepsilon_1^{(n+1)\varsigma,1}\right\}\eta^2\eta' e^{i(\varpi'-\Gamma')+i[nv-(n+1)V-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{4}\varepsilon_1^{(n-1)\varsigma,-1}\eta^2\eta' e^{-2i(\varpi-\Gamma)-i(\varpi'-\Gamma')+i[(n+2)v-(n-1)V-2\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{4}\varepsilon_1^{(n-1)\varsigma,1}\eta^2\eta' e^{2i(\varpi-\Gamma)-i(\varpi'-\Gamma')+i[(n-2)v-(n-1)V+2\omega-n\omega']}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$-\frac{1}{4}\Xi_1^{(n+1)\varsigma,-1}\eta_{,}^{2}\eta_{,}'e^{-2i(\pi-\Pi')+i(\pi-\Pi')+i[(n+2)v-(n+1)V-2\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{4}\Xi_1^{(n+1)\varsigma,1}\eta_{,}^{2}\eta_{,}'e^{2i(\pi-\Pi')+i(\pi-\Pi')+i[(n-2)v-(n+1)V+2\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{4}\left\{\xi_1^{n-1,1}+\xi_1^{n+1,-1}\right\}\eta_{,}\eta_{,}'^{2}e^{-i(\pi-\Pi')+i[(n+1)v-nV-\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{4}\left\{\xi_1^{n-1,1}+\xi_1^{n+1,-1}\right\}\eta_{,}\eta_{,}'^{2}e^{i(\pi-\Pi')+i[(n-1)v-nV+\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{4}\xi_1^{n-1,-1}\eta_{,}\eta_{,}'^{2}e^{-i(\pi-\Pi')-2i(\pi'-\Pi')+i[(n+1)v-(n-2)V-\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{4}\xi_1^{n-1,-1}\eta_{,}\eta_{,}'^{2}e^{i(\pi-\Pi')-2i(\pi'-\Pi')+i[(n-1)v-(n-2)V+\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{4}\xi_1^{n+1,1}\eta_{,}\eta_{,}'^{2}e^{-i(\pi-\Pi')+2i(\pi'-\Pi')+i[(n+1)v-(n+2)V-\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{4}\xi_1^{n+1,1}\eta_{,}\eta_{,}'^{2}e^{i(\pi-\Pi')+2i(\pi'-\Pi')+i[(n-1)v-(n+2)V+\omega-n\omega']},$$

$$(12,0,2,3)\quad \rho'^{2}e^{i(nv-v')}=-\frac{1}{2}\Xi_1^{n\varsigma,-1}\eta_{,}\eta_{,}'^{2}e^{-i(\pi-\Pi')+i[(n+1)v-nV-\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{2}\Xi_1^{n\varsigma,1}\eta_{,}\eta_{,}'^{2}e^{i(\pi-\Pi')+i[(n-1)v-nV+\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{4}\Xi_1^{(n-2)\varsigma,-1}\eta_{,}\eta_{,}'^{2}e^{-i(\pi-\Pi')-2i(\pi'-\Pi')+i[(n+1)v-(n-2)V-\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{4}\Xi_1^{(n-2)\varsigma,1}\eta_{,}\eta_{,}'^{2}e^{i(\pi-\Pi')-2i(\pi'-\Pi')+i[(n-1)v-(n-2)V+\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{4}\Xi_1^{(n+2)\varsigma,-1}\eta_{,}\eta_{,}'^{2}e^{-i(\pi-\Pi')+2i(\pi'-\Pi')+i[(n+1)v-(n+2)V-\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{4}\Xi_1^{(n+2)\varsigma,1}\eta_{,}\eta_{,}'^{2}e^{i(\pi-\Pi')+2i(\pi'-\Pi')+i[(n-1)v-(n+2)V+\omega-n\omega']}$$

$$+\left\{\frac{1}{2}\xi_1^{n,-1}+\frac{1}{4}\xi_1^{n-2,1}\right\}\eta_{,}'^{3}e^{-i(\pi'-\Pi')+i[nv-(n-1)V-n\omega']}$$

$$+\left\{\frac{1}{2}\xi_1^{n,1}+\frac{1}{4}\xi_1^{n+2,-1}\right\}\eta_{,}'^{3}e^{i(\pi'-\Pi')+i[nv-(n+1)V-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{4}\xi_1^{n-2,-1}\eta_{,}'^{3}e^{-3i(\pi'-\Pi')+i[nv-(n-3)V-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{4}\xi_1^{n+2,1}\eta_{,}'^{3}e^{3i(\pi'-\Pi')+i[nv-(n+3)V-n\omega']}.$$

$$(12,3,0,3)\quad \rho^3 e^{in(v-V)} = \frac{3}{8}\eta^3 e^{-i(\varpi-\Gamma)+i[(n+1)v-nV-\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{3}{8}\eta^3 e^{i(\varpi-\Gamma)+i[(n-1)v-nV+\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{8}\eta^3 e^{-3i(\varpi-\Gamma)+i[(n+3)v-nV-3\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{8}\eta^3 e^{3i(\varpi-\Gamma)+i[(n-3)v-nV+3\omega-n\omega']},$$

$$(12,2,1,3)\quad \rho^2\rho' e^{in(v-V)} = \frac{1}{4}\eta^2\eta' e^{-i(\varpi'-\Gamma)+i[nv-(n-1)V-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{4}\eta^2\eta' e^{i(\varpi'-\Gamma)+i[nv-(n+1)V-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{8}\eta^2\eta' e^{-2i(\varpi-\Gamma)-i(\varpi'-\Gamma)+i[(n+2)v-(n-1)V-2\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{8}\eta^2\eta' e^{2i(\varpi-\Gamma)-i(\varpi'-\Gamma)+i[(n-2)v-(n-1)V+2\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{8}\eta^2\eta' e^{-2i(\varpi-\Gamma)+i(\varpi'-\Gamma)+i[(n+2)v-(n+1)V-2\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{8}\eta^2\eta' e^{2i(\varpi-\Gamma)+i(\varpi'-\Gamma)+i[(n-2)v-(n+1)V+2\omega-n\omega']},$$

$$(12,1,2,3)\quad \rho\rho'^2 e^{in(v-V)} = \frac{1}{4}\eta\eta'^2 e^{-i(\varpi-\Gamma)+i[(n+1)v-nV-\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{4}\eta\eta'^2 e^{i(\varpi-\Gamma)+i[(n-1)v-nV+\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{8}\eta\eta'^2 e^{-i(\varpi-\Gamma)-2i(\varpi'-\Gamma)+i[(n+1)v-(n-2)V-\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{8}\eta\eta'^2 e^{i(\varpi-\Gamma)-2i(\varpi'-\Gamma)+i[(n-1)v-(n-2)V+\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{8}\eta\eta'^2 e^{-i(\varpi-\Gamma)+2i(\varpi'-\Gamma)+i[(n+1)v-(n+2)V-\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{8}\eta\eta'^2 e^{i(\varpi-\Gamma)+2i(\varpi'-\Gamma)+i[(n-1)v-(n+2)V+\omega-n\omega']},$$

$$(12,0,3,3) \quad \rho'^3 e^{in(v-t)} = \frac{3}{8}\eta_{,}'^3 e^{-i(\varpi-\Gamma)+i[nv-(n-1)V-n\omega]}$$

$$+\frac{3}{8}\eta'^3 e^{i(\varpi-\Gamma)+i[nv-(n+1)V-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{8}\eta_{,}'^3 e^{-3i(\varpi'-\Gamma)+i[nv-(n-3)V-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{8}\eta_{,}'^3 e^{3i(\varpi-\Gamma)+i[nv-(n+3)V-n\omega]}.$$

E) *Termes du quatrième degré.*

$$(13,0,0,4) \quad e^{in(v-t)} = \varepsilon_4^{n\varsigma,0}\eta^4 e^{i(nv-nV-n\omega)}$$

$$-\varepsilon_4^{n\varsigma,-2}\eta^4 e^{-2i(\varpi-\Gamma)+i[(n+2)v-nV-2\omega-n\omega]}$$

$$-\varepsilon_4^{n\varsigma,2}\eta_{,}^4 e^{2i(\varpi-\Gamma)+i[(n-2)v-nV+2\omega-n\omega]}$$

$$+\varepsilon_4^{n\varsigma,-4}\eta_{,}^4 e^{-4i(\varpi-\Gamma)+i[(n+4)v-nV-4\omega-n\omega]}$$

$$+\varepsilon_4^{n\varsigma,4}\eta_{,}^4 e^{4i(\varpi-\Gamma)+i[(n-4)v-nV+4\omega-n\omega]}$$

$$+\xi_1^{n,-1}\varepsilon_3^{(n-1)\varsigma,-1}\eta_{,}^3\eta_{,}' e^{-i(\varpi-\Gamma)-i(\varpi'-\Gamma)+i[(n+1)v-(n-1)V-\omega-n\omega]}$$

$$+\xi_1^{n,-1}\varepsilon_3^{(n-1)\varsigma,1}\eta_{,}^3\eta' e^{i(\varpi-\Gamma)-i(\varpi-\Gamma)+i[(n-1)v-(n-1)V+\omega-n\omega]}$$

$$+\xi_1^{n,1}\varepsilon_3^{(n+1)\varsigma,-1}\eta_{,}^3\eta_{,}' e^{-i(\varpi-\Gamma)+i(\varpi-\Gamma)+i[(n+1)v-(n+1)V-\omega-n\omega]}$$

$$+\xi_1^{n,1}\varepsilon_3^{(n+1)\varsigma,1}\eta^3\eta' e^{i(\varpi-\Gamma)+i(\varpi-\Gamma)+i[(n-1)v-(n+1)V+\omega-n\omega]}$$

$$-\xi_1^{n,-1}\varepsilon_3^{(n-1)\varsigma,-3}\eta_{,}^3\eta_{,}' e^{-3i(\varpi-\Gamma)-i(\varpi-\Gamma)+i[(n+3)v-(n-1)V-3\omega-n\omega]}$$

$$-\xi_1^{n,-1}\varepsilon_3^{(n-1)\varsigma,3}\eta_{,}^3\eta_{,}' e^{3i(\varpi-\Gamma)-i(\varpi-\Gamma)+i[(n-3)v-(n-1)V+3\omega-n\omega]}$$

$$-\xi_1^{n,1}\varepsilon_3^{(n+1)\varsigma,-3}\eta_{,}^3\eta_{,}' e^{-3i(\varpi-\Gamma)+i(\varpi-\Gamma)+i[(n+3)v-(n+1)V-3\omega-n\omega]}$$

$$-\xi_1^{n,1}\varepsilon_3^{(n+1)\varsigma,3}\eta^3\eta_{,}' e^{3i(\varpi-\Gamma)+i(\varpi-\Gamma)+i[(n-3)v-(n+1)V+3\omega-n\omega]}$$

$$+\xi_2^{n,0}\varepsilon_2^{n\varsigma,0}\eta_{,}^2\eta'^2 e^{i(nv-nV-n\omega)}$$

$$-\xi_2^{n,0}\varepsilon_2^{n\varsigma,-2}\eta^2\eta_{,}'^2 e^{-2i(\varpi-\Gamma)+i[(n+2)v-nV-2\omega-n\omega]}$$

$$-\xi_2^{n,0}\varepsilon_2^{n\varsigma,2}\eta_{,}^2\eta'^2 e^{2i(\varpi-\Gamma)+i[(n-2)v-nV+2\omega-n\omega]}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$-\xi_2^{n,-2}\Xi_2^{(n-2)\varsigma,0}\eta^2\eta'^2 e^{-2i(\varpi'-\Gamma')+i[nv-(n-2)V-n\omega]}$$

$$-\xi_2^{n,2}\Xi_2^{(n+2)\varsigma,0}\eta^2\eta'^2 e^{2i(\varpi'-\Gamma')+i[nv-(n+2)V-n\omega]}$$

$$+\xi_2^{n,-2}\Xi_2^{(n-2)\varsigma,-2}\eta^2\eta'^2 e^{-2i(\varpi-\Gamma)-2i(\varpi'-\Gamma')+i[(n+2)v-(n-2)V-2\omega-n\omega]}$$

$$+\xi_2^{n,-2}\Xi_2^{(n-2)\varsigma,2}\eta^2\eta'^2 e^{2i(\varpi-\Gamma)-2i(\varpi'-\Gamma')+i[(n-2)v-(n-2)V+2\omega-n\omega]}$$

$$+\xi_2^{n,2}\Xi_2^{(n+2)\varsigma,-2}\eta^2\eta'^2 e^{-2i(\varpi-\Gamma)+2i(\varpi'-\Gamma')+i[(n+2)v-(n+2)V-2\omega-n\omega]}$$

$$+\xi_2^{n,2}\Xi_2^{(n+2)\varsigma,2}\eta^2\eta'^2 e^{2i(\varpi-\Gamma)+2i(\varpi'-\Gamma')+i[(n-2)v-(n+2)V+2\omega-n\omega]}$$

$$+\xi_3^{n,-1}\Xi_1^{(n-1)\varsigma,-1}\eta\eta'^3 e^{-i(\varpi-\Gamma)-i(\varpi'-\Gamma')+i[(n+1)v-(n-1)V-\omega-n\omega]}$$

$$+\xi_3^{n,-1}\Xi_1^{(n-1)\varsigma,1}\eta\eta'^3 e^{i(\varpi-\Gamma)-i(\varpi'-\Gamma')+i[(n-1)v-(n-1)V+\omega-n\omega]}$$

$$+\xi_3^{n,1}\Xi_1^{(n+1)\varsigma,-1}\eta\eta'^3 e^{-i(\varpi-\Gamma)+i(\varpi'-\Gamma')+i[(n+1)v-(n+1)V-\omega-n\omega]}$$

$$+\xi_3^{n,1}\Xi_1^{(n+1)\varsigma,1}\eta\eta'^3 e^{i(\varpi-\Gamma)+i(\varpi'-\Gamma')+i[(n-1)v-(n+1)V+\omega-n\omega]}$$

$$-\xi_3^{n,-3}\Xi_1^{(n-3)\varsigma,-1}\eta\eta'^3 e^{-i(\varpi-\Gamma)-3i(\varpi'-\Gamma')+i[(n+1)v-(n-3)V-\omega-n\omega]}$$

$$-\xi_3^{n,-3}\Xi_1^{(n-3)\varsigma,1}\eta\eta'^3 e^{i(\varpi-\Gamma)-3i(\varpi'-\Gamma')+i[(n-1)v-(n-3)V+\omega-n\omega]}$$

$$-\xi_3^{n,3}\Xi_1^{(n+3)\varsigma,-1}\eta\eta'^3 e^{-i(\varpi-\Gamma)+3i(\varpi'-\Gamma')+i[(n+1)v-(n+3)V-\omega-n\omega]}$$

$$-\xi_3^{n,3}\Xi_1^{(n+3)\varsigma,1}\eta\eta'^3 e^{i(\varpi-\Gamma)+3i(\varpi'-\Gamma')+i[(n-1)v-(n+3)V+\omega-n\omega]}$$

$$+\xi_4^{n,0}\eta'^4 e^{i(nv-nV-n\omega)}$$

$$-\xi_4^{n,-2}\eta'^4 e^{-2i(\varpi'-\Gamma')+i[nv-(n-2)V-n\omega]}$$

$$-\xi_4^{n,2}\eta'^4 e^{2i(\varpi'-\Gamma')+i[nv-(n+2)V-n\omega]}$$

$$+\xi_4^{n,-4}\eta'^4 e^{-4i(\varpi'-\Gamma')+i[nv-(n-4)V-n\omega]}$$

$$+\xi_4^{n,4}\eta'^4 e^{4i(\varpi'-\Gamma')+i[nv-(n+4)V-n\omega]},$$

$$(13,1,0,4)\qquad \rho e^{in(v-\omega)} = \frac{1}{2}\{\Xi_3^{n\varsigma,-1}+\Xi_3^{n\varsigma,1}\}\eta^4 e^{i(nv-nV-n\omega)}$$

$$+\frac{1}{2}\{\Xi_3^{n\varsigma,-1}-\Xi_3^{n\varsigma,-3}\}\eta^4 e^{-2i(\varpi-\Gamma)+i[(n+2)v-nV-2\omega-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{2}\{\Xi_3^{n\varsigma,1}-\Xi_3^{n\varsigma,3}\}\eta^4 e^{2i(\varpi-\Gamma)+i[(n-2)v-nV+2\omega-n\omega]}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$-\frac{1}{2}\Xi_3^{n\epsilon,-4}\eta^4 e^{-4i(\pi-\Gamma)+i[(n+4)v-nV-4\omega+n\omega]}$$

$$-\frac{1}{2}\Xi_3^{n\epsilon,3}\eta^4 e^{4i(\pi-\Gamma)+i[(n-4)v-nV+4\omega-n\omega]}$$

$$-\frac{1}{2}\xi_1^{n,-1}\{\Xi_2^{(n-1)\epsilon,0}-\Xi_2^{(n-1)\epsilon,-2}\}\eta^3\eta' e^{-i(\pi-\Gamma)-i(\pi-\Gamma')+i[(n+1)v-(n-1)V-\omega-n\omega]}$$

$$-\frac{1}{2}\xi_1^{n,-1}\{\Xi_2^{(n-1)\epsilon,0}-\Xi_2^{(n-1)\epsilon,2}\}\eta^3\eta' e^{i(\pi-\Gamma)+i(\pi-\Gamma')+i[(n-1)v-(n-1)V+\omega-n\omega]}$$

$$-\frac{1}{2}\xi_1^{n,1}\{\Xi_2^{(n+1)\epsilon,0}-\Xi_2^{(n+1)\epsilon,-2}\}\eta^3\eta' e^{-i(\pi-\Gamma)+i(\pi-\Gamma')+i[(n+1)v-(n+1)V-\omega-n\omega]}$$

$$-\frac{1}{2}\xi_1^{n,1}\{\Xi_2^{(n+1)\epsilon,0}-\Xi_2^{(n+1)\epsilon,2}\}\eta^3\eta' e^{i(\pi-\Gamma)+i(\pi-\Gamma')+i[(n-1)v-(n+1)V+\omega-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{2}\xi_1^{n,-1}\Xi_2^{(n-1)\epsilon,-2}\eta^3\eta' e^{-3i(\pi-\Gamma)-i(\pi-\Gamma')+i[(n+3)v-(n-1)V-3\omega-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{2}\xi_1^{n,-1}\Xi_2^{(n-1)\epsilon,2}\eta^3\eta' e^{3i(\pi-\Gamma)+i(\pi-\Gamma')+i[(n-3)v-(n-1)V+3\omega-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{2}\xi_1^{n,1}\Xi_2^{(n+1)\epsilon,-2}\eta^3\eta' e^{-3i(\pi-\Gamma)+i(\pi-\Gamma')+i[(n+3)v-(n+1)V-3\omega-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{2}\xi_1^{n,1}\Xi_2^{(n+1)\epsilon,2}\eta^3\eta' e^{3i(\pi-\Gamma)+i(\pi-\Gamma')+i[(n-3)v-(n+1)V+3\omega-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{2}\xi_2^{n,0}\{\Xi_1^{n\epsilon,-1}+\Xi_1^{n\epsilon,1}\}\eta^2\eta'^2 e^{i(nv-nV-n\omega)}$$

$$+\frac{1}{2}\xi_2^{n,0}\Xi_1^{n\epsilon,-1}\eta^2\eta'^2 e^{-2i(\pi-\Gamma)+i[(n+2)v-nV-2\omega-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{2}\xi_2^{n,0}\Xi_1^{n\epsilon,1}\eta^2\eta'^2 e^{2i(\pi-\Gamma)+i[(n-2)v-nV+2\omega-n\omega]}$$

$$-\frac{1}{2}\xi_2^{n,-2}\{\Xi_1^{(n-2)\epsilon,-1}+\Xi_1^{(n-2)\epsilon,1}\}\eta^2\eta'^2 e^{-2i(\pi-\Gamma')+i[nv-(n-2)V-n\omega]}$$

$$-\frac{1}{2}\xi_2^{n,2}\{\Xi_1^{(n+2)\epsilon,-1}+\Xi_1^{(n+2)\epsilon,1}\}\eta^2\eta'^2 e^{2i(\pi-\Gamma')+i[nv-(n+2)V-n\omega]}$$

$$\frac{1}{2}\xi_2^{n,-2}\Xi_1^{(n-2)\epsilon,-1}\eta^2\eta'^2 e^{-2i(\pi-\Gamma)-2i(\pi-\Gamma')+i[(n+2)v-(n-2)V-2\omega-n\omega]}$$

$$\frac{1}{2}\xi_2^{n,-2}\Xi_1^{(n-2)\epsilon,1}\eta^2\eta'^2 e^{2i(\pi-\Gamma)-2i(\pi-\Gamma')+i[(n-2)v-(n-2)V+2\omega-n\omega]}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$-\frac{1}{2}\xi_2^{n,2}\varepsilon_1^{(n+2)c,-1}\gamma_1^2\gamma_1'^2 e^{i[2(\varpi-\Gamma)+2n(\varpi'-\Gamma')+q(n+2)v-(n+2)V-2\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{2}\xi_2^{n,2}\varepsilon_1^{(n+2)c,1}\gamma_1^2\gamma_1'^2 e^{i[2(\varpi-\Gamma)+2n(\varpi'-\Gamma')+q(n+2)v-(n+2)V+2\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{2}\xi_3^{n,-1}\gamma_1\gamma_1'^3 e^{i[-(\varpi-\Gamma)+n(\varpi'-\Gamma')+q(n+1)v-(n-1)V-\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{2}\xi_3^{n,-1}\gamma_1\gamma_1'^3 e^{i[(\varpi-\Gamma)-n(\varpi'-\Gamma')+q(n-1)v-(n-1)V+\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{2}\xi_3^{n,1}\gamma_1\gamma_1'^3 e^{i[-(\varpi-\Gamma)+n(\varpi'-\Gamma')+q(n+1)v-(n+1)V-\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{2}\xi_3^{n,1}\gamma_1\gamma_1'^3 e^{i[(\varpi-\Gamma)+n(\varpi'-\Gamma')+q(n-1)v-(n+1)V+\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{2}\xi_3^{n,-3}\gamma_1\gamma_1'^3 e^{i[(\varpi-\Gamma)-3n(\varpi'-\Gamma')+q(n+1)v-(n-3)V-\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{2}\xi_3^{n,-3}\gamma_1\gamma_1'^3 e^{i[(\varpi-\Gamma)-3n(\varpi'-\Gamma')+q(n-1)v-(n-3)V+\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{2}\xi_3^{n,3}\gamma_1\gamma_1'^3 e^{-i(\varpi-\Gamma)+3n(\varpi'-\Gamma')+i(n+1)v-(n+3)V-\omega-n\omega'}$$

$$+\frac{1}{2}\xi_3^{n,3}\gamma_1\gamma_1'^3 e^{i[(\varpi-\Gamma)+3n(\varpi'-\Gamma')+q(n-1)v-(n+3)V+\omega-n\omega']},$$

$$(13,0,1,4)\qquad \rho' e^{\ldots} = \frac{1}{2}\varepsilon_3^{(n-1)c,-1}\gamma_1^3\gamma_1' e^{i[-(\varpi-\Gamma)-n(\varpi'-\Gamma')+q(n+1)c-(n-1)V-\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{2}\varepsilon_3^{(n-1)c,1}\gamma_1^3\gamma_1' e^{i[(\varpi-\Gamma)-n(\varpi'-\Gamma')+q(n-1)c-(n-1)V+\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{2}\varepsilon_3^{(n+1)c,-1}\gamma_1^3\gamma_1' e^{i[-(\varpi-\Gamma)+n(\varpi'-\Gamma')+q(n+1)v-(n+1)V-\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{2}\varepsilon_3^{(n+1)c,1}\gamma_1^3\gamma_1' e^{i[(\varpi-\Gamma)+n(\varpi'-\Gamma')+q(n-1)v-(n+1)V+\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{2}\varepsilon_3^{(n-1)c,-3}\gamma_1^3\gamma_1' e^{i[-3(\varpi-\Gamma)-n(\varpi'-\Gamma')+q(n+3)v-(n-1)V-3\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{2}\varepsilon_3^{(n-1)c,3}\gamma_1^3\gamma_1' e^{3i(\varpi-\Gamma)-n(\varpi'-\Gamma')+q(n-3)v-(n-1)V+3\omega-n\omega'}$$

$$-\frac{1}{2}\varepsilon_3^{(n+1)c,-3}\gamma_1^3\gamma_1' e^{-3i(\varpi-\Gamma)+n(\varpi'-\Gamma')+q(n+3)v-(n+1)V-3\omega-n\omega'},$$

Cette formule se continue à la page suivante

$$-\frac{1}{2}\Xi_3^{(n+1)\varsigma,3}\gamma_{\prime}^{3}\gamma_{\prime}'e^{3i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')+i[(n-3)v-(n+1)V+3\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{2}\Xi_2^{n\varsigma,0}\{\xi_1^{n-1,1}+\xi_1^{n+1,-1}\}\gamma_{\prime}^{2}\gamma_{\prime}'^{2}e^{i(nv-nV-n\omega')}$$

$$+\frac{1}{2}\Xi_2^{n\varsigma,-2}\{\xi_1^{n-1,1}+\xi_1^{n+1,-1}\}\gamma_{\prime}^{2}\gamma_{\prime}'^{2}e^{-2i(\pi-\Gamma)+i[(n+2)v-nV-2\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{2}\Xi_2^{n\varsigma,2}\{\xi_1^{n-1,1}+\xi_1^{n+1,-1}\}\gamma_{\prime}^{2}\gamma_{\prime}'^{2}e^{2i(\pi-\Gamma)+i[(n-2)v-nV+2\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{2}\xi_1^{n-1,1}\Xi_2^{(n-2)\varsigma,0}\gamma_{\prime}^{2}\gamma_{\prime}'^{2}e^{-2i(\pi-\Gamma)+i[nv-(n-2)V-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{2}\xi_1^{n+1,1}\Xi_2^{(n+2)\varsigma,0}\gamma_{\prime}^{2}\gamma_{\prime}'^{2}e^{2i(\pi-\Gamma)+i[nv-(n+2)V-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{2}\xi_1^{n-1,1}\Xi_2^{(n-2)\varsigma,-2}\gamma_{\prime}^{2}\gamma_{\prime}'^{2}e^{-2i(\pi-\Gamma)-2i(\pi'-\Gamma')+i[(n+2)v-(n-2)V-2\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{2}\xi_1^{n-1,1}\Xi_2^{(n-2)\varsigma,2}\gamma_{\prime}^{2}\gamma_{\prime}'^{2}e^{2i(\pi-\Gamma)-2i(\pi'-\Gamma')+i[(n-2)v-(n-2)V+2\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{2}\xi_1^{n+1,1}\Xi_2^{(n+2)\varsigma,-2}\gamma_{\prime}^{2}\gamma_{\prime}'^{2}e^{-2i(\pi-\Gamma)+2i(\pi'-\Gamma')+i[(n+2)v-(n+2)V-2\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{2}\xi_1^{n+1,1}\Xi_2^{(n+2)\varsigma,2}\gamma_{\prime}^{2}\gamma_{\prime}'^{2}e^{2i(\pi-\Gamma)+2i(\pi'-\Gamma')+i[(n-2)v-(n+2)V+2\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{2}\Xi_1^{(n-1)\varsigma,-1}\{\xi_2^{n-1,0}-\xi_2^{n+1,-2}\}\gamma_{\prime}\gamma_{\prime}'^{3}e^{-i(\pi-\Gamma)-i(\pi'-\Gamma')+i[(n+1)v-(n-1)V-\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{2}\Xi_1^{(n-1)\varsigma,1}\{\xi_2^{n-1,0}-\xi_2^{n+1,-2}\}\gamma_{\prime}\gamma_{\prime}'^{3}e^{i(\pi-\Gamma)-i(\pi'-\Gamma')+i[(n-1)v-(n-1)V+\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{2}\Xi_1^{(n+1)\varsigma,-1}\{\xi_2^{n+1,0}-\xi_2^{n-1,2}\}\gamma_{\prime}\gamma_{\prime}'^{3}e^{-i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')+i[(n+1)v-(n+1)V-\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{2}\Xi_1^{(n+1)\varsigma,1}\{\xi_2^{n+1,0}-\xi_2^{n-1,2}\}\gamma_{\prime}\gamma_{\prime}'^{3}e^{i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')+i[(n-1)v-(n+1)V+\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{2}\xi_2^{n-1,-2}\Xi_1^{(n-3)\varsigma,-1}\gamma_{\prime}\gamma_{\prime}'^{3}e^{-i(\pi-\Gamma)-3i(\pi'-\Gamma')+i[(n+1)v-(n-3)V-\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{2}\xi_2^{n-1,-2}\Xi_1^{(n-3)\varsigma,1}\gamma_{\prime}\gamma_{\prime}'^{3}e^{i(\pi-\Gamma)-3i(\pi'-\Gamma')+i[(n-1)v-(n-3)V+\omega-n\omega']}$$

$$\frac{1}{2}\xi_2^{n+1,2}\Xi_1^{(n+3)\varsigma,-1}\gamma_{\prime}\gamma_{\prime}'^{3}e^{-i(\pi-\Gamma)+3i(\pi'-\Gamma')+i[(n+1)v-(n+3)V-\omega-n\omega']}$$

(Cette formule se continue à la page suivante.)

$$-\frac{1}{2}\xi_2^{n+1,2}\Xi_1^{(n+3)c,1}\eta\eta'^3 e^{i(\varpi-\Gamma)+3i(\varpi-\Gamma')+i[q(n-1)v-(n+3)V+\omega-n\omega]}$$

$$-\frac{1}{2}\left\{\xi_3^{n-1,1}+\xi_3^{n+1,-1}\right\}\eta'^4 e^{i(nv-nV-n\omega)}$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\xi_3^{n-1,-1}-\xi_3^{n+1,-3}\right\}\eta'^4 e^{-2i(\varpi-\Gamma')+i[nv-(n-2)V-n\omega]}$$

$$-\frac{1}{2}\left\{\xi_3^{n+1,1}-\xi_3^{n-1,3}\right\}\eta'^4 e^{2i(\varpi-\Gamma')+i[nv-(n+2)V-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{2}\xi_3^{n-1,-3}\eta'^4 e^{-4i(\varpi-\Gamma')+i[nv-(n-4)V-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{2}\xi_3^{n+1,3}\eta'^4 e^{4i(\varpi-\Gamma')+i[nv-(n+4)V-n\omega]},$$

(13, 2, 0, 4)
$$\rho^2 e^{im(v-\tau)}=-\left\{\frac{1}{2}\Xi_2^{nc,0}-\frac{1}{4}\Xi_2^{nc,-2}-\frac{1}{4}\Xi_2^{nc,2}\right\}\eta^4 e^{i(nv-nV-n\omega)}$$

$$+\left\{\frac{1}{2}\Xi_2^{nc,-2}-\frac{1}{4}\Xi_2^{nc,0}\right\}\eta^4 e^{-2i(\varpi-\Gamma)+i[(n+2)v-nV-2\omega-n\omega]}$$

$$+\left\{\frac{1}{2}\Xi_2^{nc,2}-\frac{1}{4}\Xi_2^{nc,0}\right\}\eta^4 e^{2i(\varpi-\Gamma)+i[(n-2)v-nV+2\omega-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{4}\Xi_2^{nc,-2}\eta^4 e^{-4i(\varpi-\Gamma)+i[(n+4)v-nV-4\omega-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{4}\Xi_2^{nc,2}\eta^4 e^{4i(\varpi-\Gamma)+i[(n-4)v-nV+4\omega-n\omega]}$$

$$-\xi_1^{n,-1}\left\{\frac{1}{2}\Xi_1^{(n-1)c,-1}+\frac{1}{4}\Xi_1^{(n-1)c,1}\right\}\eta^3\eta' e^{-i(\varpi-\Gamma)-i(\varpi-\Gamma')+i[(n+1)v-(n-1)V-\omega-n\omega]}$$

$$-\xi_1^{n,-1}\left\{\frac{1}{2}\Xi_1^{(n-1)c,1}+\frac{1}{4}\Xi_1^{(n-1)c,-1}\right\}\eta^3\eta' e^{i(\varpi-\Gamma)-i(\varpi-\Gamma')+i[(n-1)v-(n-1)V+\omega-n\omega]}$$

$$-\xi_1^{n,1}\left\{\frac{1}{2}\Xi_1^{(n+1)c,-1}+\frac{1}{4}\Xi_1^{(n+1)c,1}\right\}\eta^3\eta' e^{-i(\varpi-\Gamma)+i(\varpi-\Gamma')+i[(n+1)v-(n+1)V-\omega-n\omega]}$$

$$-\xi_1^{n,1}\left\{\frac{1}{2}\Xi_1^{(n+1)c,1}+\frac{1}{4}\Xi_1^{(n+1)c,-1}\right\}\eta^3\eta' e^{i(\varpi-\Gamma)+i(\varpi-\Gamma')+i[(n-1)v-(n+1)V+\omega-n\omega]}$$

$$-\frac{1}{4}\xi_1^{n,-1}\Xi_1^{(n-1)c,-1}\eta^3\eta' e^{-3i(\varpi-\Gamma)-i(\varpi-\Gamma')+i[(n+3)v-(n-1)V-3\omega-n\omega]}$$

$$-\frac{1}{4}\xi_1^{n,-1}\Xi_1^{(n-1)c,1}\eta^3\eta' e^{3i(\varpi-\Gamma)-i(\varpi-\Gamma')+i[(n-3)v-(n-1)V+3\omega-n\omega]}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$-\frac{1}{4}\xi_1^{n,1}\Xi_1^{(n+1)c,-1}\eta_/^3\eta_/'e^{3i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')+i[(n+3)v-(n+1)V-3\omega-n\omega]}$$

$$-\frac{1}{4}\xi_1^{n,1}\Xi_1^{(n+1)c,-1}\eta_/^3\eta_/'e^{-3i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')+i[(n-3)v-(n+1)V+3\omega-n\omega]}$$

$$-\frac{1}{2}\xi_2^{n,0}\eta_/^2\eta_/'^2e^{i(nv-nV-n\omega)}$$

$$-\frac{1}{4}\xi_2^{n,0}\eta_/^2\eta_/'^2e^{-2i(\pi-\Gamma)+i[(n+2)v-nV-2\omega-n\omega]}$$

$$-\frac{1}{4}\xi_2^{n,0}\eta_/^2\eta_/'^2e^{2i(\pi-\Gamma)+i[(n-2)v-nV+2\omega-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{2}\xi_2^{n,-2}\eta_/^2\eta_/'^2e^{-2i(\pi'-\Gamma')+i[nv-(n-2)V-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{2}\xi_2^{n,2}\eta_/^2\eta_/'^2e^{2i(\pi'-\Gamma')+i[nv-(n+2)V-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{4}\xi_2^{n,-2}\eta_/^2\eta_/'^2e^{-2i(\pi-\Gamma)-2i(\pi'-\Gamma')+i[(n+2)v-(n-2)V-2\omega-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{4}\xi_2^{n,-2}\eta_/^2\eta_/'^2e^{2i(\pi-\Gamma)-2i(\pi'-\Gamma')+i[(n-2)v-(n-2)V+2\omega-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{4}\xi_2^{n,2}\eta_/^2\eta_/'^2e^{-2i(\pi-\Gamma)+2i(\pi'-\Gamma')+i[(n+2)v-(n+2)V-2\omega-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{4}\xi_2^{n,2}\eta_/^2\eta_/'^2e^{2i(\pi-\Gamma)+2i(\pi'-\Gamma')+i[(n-2)v-(n+2)V+2\omega-n\omega]},$$

(13,1,1,4) $$\rho_/\rho'e^{in(v-V)}=-\frac{1}{4}(\Xi_2^{(n-1)c,0}-\Xi_2^{(n-1)c,2})\eta_/^3\eta_/'e^{i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')+i[(n+1)v-(n-1)V-\omega-n\omega]}$$

$$-\frac{1}{4}(\Xi_2^{(n-1)c,0}-\Xi_2^{(n-1)c,2})\eta_/^3\eta_/'e^{-i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')+i[(n-1)v-(n-1)V+\omega-n\omega]}$$

$$-\frac{1}{4}(\Xi_2^{(n+1)c,0}-\Xi_2^{(n+1)c,-2})\eta_/^3\eta_/'e^{i(\pi-\Gamma)-i(\pi'-\Gamma')+i[(n+1)v-(n+1)V-\omega-n\omega]}$$

$$\frac{1}{4}(\Xi_2^{(n+1)c,0}-\Xi_2^{(n+1)c,-2})\eta_/^3\eta_/'e^{-i(\pi-\Gamma)-i(\pi'-\Gamma')+i[(n-1)v-(n+1)V+\omega-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{4}\Xi_2^{(n-1)c,2}\eta_/^3\eta_/'e^{3i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')+i[(n+3)v-(n-1)V-3\omega-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{4}\Xi_2^{(n-1)c,2}\eta_/^3\eta_/'e^{-3i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')+i[(n-3)v-(n-1)V+3\omega-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{4}\Xi_2^{(n+1)c,-2}\eta_/^3\eta_/'e^{3i(\pi-\Gamma)-i(\pi'-\Gamma')+i[(n+3)v-(n+1)V-3\omega-n\omega]}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$+\frac{1}{4}\Xi_2^{n+1,n,2}\eta^3\eta' e^{[illegible]}$

$-\frac{1}{4}\{\Xi_1^{[illegible]} + \Xi_1^{[illegible]}\}\{\xi_1^{n,1,1} + \xi_1^{n+1,1}\}\eta^2\eta'^2 e^{[illegible]}$

$-\frac{1}{4}\Xi_1^{[illegible]}\{\xi_1^{n,1,1} + \xi_1^{n+1,1}\}\eta^2\eta'^2 e^{[illegible]}$

$-\frac{1}{4}\Xi_1^{[illegible]}\{\xi_1^{n,1,1} + \xi_1^{n+1,1}\}\eta^2\eta'^2 e^{[illegible]}$

$-\frac{1}{4}\xi_1^{n,1,1}\{\Xi_1^{[illegible]} + \Xi_1^{[illegible]}\}\eta^2\eta'^2 e^{[illegible]}$

$-\frac{1}{4}\xi_1^{n+1,1}\{\Xi_1^{(n+2),1} + \Xi_1^{(n+2),1}\}\eta^2\eta'^2 e^{[illegible]}$

$-\frac{1}{4}\xi_1^{n-1,1}\Xi_1^{(n-2),1}\eta^2\eta'^2 e^{[illegible]}$

$-\frac{1}{4}\xi_1^{n,1}\Xi_1^{(n-2),1}\eta^2\eta'^2 e^{[illegible]}$

$-\frac{1}{4}\xi_1^{n+1,1}\Xi_1^{(n+2),1}\eta^2\eta'^2 e^{[illegible]}$

$-\frac{1}{4}\xi_1^{n+1,1}\Xi_1^{(n+2),1}\eta^2\eta'^2 e^{[illegible]}$

$-\frac{1}{4}(\xi_2^{n,1,0} - \xi_2^{n+1,2})\eta\eta'^3 e^{[illegible]}$

$-\frac{1}{4}(\xi_2^{n,1,0} - \xi_2^{n+1,2})\eta\eta'^3 e^{[illegible]}$

$-\frac{1}{4}(\xi_2^{n+1,0} - \xi_2^{n,1,2})\eta\eta'^3 e^{[illegible]}$

$-\frac{1}{4}(\xi_2^{n+1,0} - \xi_2^{n,1,2})\eta\eta'^3 e^{[illegible]}$

$+\frac{1}{4}\xi_2^{n-1,2}\eta\eta'^3 e^{[illegible]}$

$+\frac{1}{4}\xi_2^{n,1,2}\eta\eta'^3 e^{[illegible]}$

$+\frac{1}{4}\xi_2^{n+1,2}\eta\eta'^3 e^{[illegible]}$

$+\frac{1}{4}\xi_2^{n+1,2}\eta\eta'^3 e^{[illegible]}.$

$$(13,0,2,4)\quad \rho'^2 e^{inv'\ldots} = -\frac{1}{2}\Xi_2^{n\varsigma,0}\eta^2\eta'^2 e^{i(nv-nV-n\omega)}$$

$$+\frac{1}{2}\Xi_2^{n\varsigma,-2}\eta^2\eta'^2 e^{-2i(\pi-\Gamma)+i[(n+2)v-nV-2\omega-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{2}\Xi_2^{n\varsigma,2}\eta^2\eta'^2 e^{2i(\pi-\Gamma)+i[(n-2)v-nV+2\omega-n\omega]}$$

$$-\frac{1}{4}\Xi_2^{(n-2)\varsigma,0}\eta^2\eta'^2 e^{-2i(\pi'-\Gamma')+i[nv-(n-2)V-n\omega]}$$

$$-\frac{1}{4}\Xi_2^{(n+2)\varsigma,0}\eta^2\eta'^2 e^{2i(\pi'-\Gamma')+i[nv-(n+2)V-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{4}\Xi_2^{(n-2)\varsigma,-2}\eta^2\eta'^2 e^{-2i(\pi-\Gamma)-2i(\pi'-\Gamma')+i[(n+2)v-(n-2)V-2\omega-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{4}\Xi_2^{(n-2)\varsigma,2}\eta^2\eta'^2 e^{2i(\pi-\Gamma)-2i(\pi'-\Gamma')+i[(n-2)v-(n-2)V+2\omega-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{4}\Xi_2^{(n+2)\varsigma,-2}\eta^2\eta'^2 e^{-2i(\pi-\Gamma)+2i(\pi'-\Gamma')+i[(n+2)v-(n+2)V-2\omega-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{4}\Xi_2^{(n+2)\varsigma,2}\eta^2\eta'^2 e^{2i(\pi-\Gamma)+2i(\pi'-\Gamma')+i[(n-2)v-(n+2)V+2\omega-n\omega]}$$

$$-\Xi_1^{(n-1)\varsigma,-1}\left\{\frac{1}{2}\xi_1^{n,-1}+\frac{1}{4}\xi_1^{n-2,1}\right\}\eta\eta'^3 e^{-i(\pi-\Gamma)-i(\pi'-\Gamma')+i[(n+1)v-(n-1)V-\omega-n\omega]}$$

$$-\Xi_1^{(n-1)\varsigma,1}\left\{\frac{1}{2}\xi_1^{n,-1}+\frac{1}{4}\xi_1^{n-2,1}\right\}\eta\eta'^3 e^{i(\pi-\Gamma)-i(\pi'-\Gamma')+i[(n-1)v-(n-1)V+\omega-n\omega]}$$

$$-\Xi_1^{(n+1)\varsigma,-1}\left\{\frac{1}{2}\xi_1^{n,1}+\frac{1}{4}\xi_1^{n+2,-1}\right\}\eta\eta'^3 e^{-i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')+i[(n+1)v-(n+1)V-\omega-n\omega]}$$

$$-\Xi_1^{(n+1)\varsigma,1}\left\{\frac{1}{2}\xi_1^{n,1}+\frac{1}{4}\xi_1^{n+2,-1}\right\}\eta\eta'^3 e^{i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')+i[(n-1)v-(n+1)V+\omega-n\omega]}$$

$$-\frac{1}{4}\xi_1^{n-2,1}\,\Xi_1^{(n-3)\varsigma,-1}\eta\eta'^3 e^{-i(\pi-\Gamma)-3i(\pi'-\Gamma')+i[(n+1)v-(n-3)V-\omega-n\omega]}$$

$$-\frac{1}{4}\xi_1^{n-2,-1}\,\Xi_1^{(n-3)\varsigma,1}\eta\eta'^3 e^{i(\pi-\Gamma)-3i(\pi'-\Gamma')+i[(n-1)v-(n-3)V+\omega-n\omega]}$$

$$-\frac{1}{4}\xi_1^{n+2,1}\,\Xi_1^{(n+3)\varsigma,-1}\eta\eta'^3 e^{-i(\pi-\Gamma)+3i(\pi'-\Gamma')+i[(n+1)v-(n+3)V-\omega-n\omega]}$$

$$-\frac{1}{4}\xi_1^{n+2,1}\,\Xi_1^{(n+3)\varsigma,1}\eta\eta'^3 e^{i(\pi-\Gamma)+3i(\pi'-\Gamma')+i[(n-1)v-(n+3)V+\omega-n\omega]}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$-\left\{\frac{1}{2}\xi_2^{n,0}-\frac{1}{4}\xi_2^{n+2,-2}-\frac{1}{4}\xi_2^{n-2,2}\right\}\eta'^4 e^{i(nv-nV-n\omega)}$$

$$+\left\{\frac{1}{2}\xi_2^{n,-2}-\frac{1}{4}\xi_2^{n-2,0}\right\}\eta'^4 e^{-2i(\varpi'-\Gamma')+i[nv-(n-2)V-n\omega]}$$

$$+\left\{\xi_2^{n,2}-\frac{1}{4}\xi_2^{n+2,0}\right\}\eta'^4 e^{2i(\varpi'-\Gamma')+i[nv-(n+2)V-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{4}\xi_2^{n-2,-2}\eta'^4 e^{-4i(\varpi'-\Gamma')+i[nv-(n-4)V-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{4}\xi_2^{n+2,2}\eta'^4 e^{4i(\varpi'-\Gamma')+i[nv-(n+4)V-n\omega]},$$

$$(13,3,0,4)\quad \rho^4 e^{in(v-V)} = -\frac{3}{8}\left\{\Xi_1^{nc,-1}+\Xi_1^{nc,1}\right\}\eta^4 e^{i(nv-nV-n\omega)}$$

$$-\left\{\frac{3}{8}\Xi_1^{nc,-1}+\frac{1}{8}\Xi_1^{nc,1}\right\}\eta^4 e^{-2i(\varpi-\Gamma)+i[(n+2)v-nV-2\omega-n\omega]}$$

$$-\left\{\frac{3}{8}\Xi_1^{nc,1}+\frac{1}{8}\Xi_1^{nc,-1}\right\}\eta^4 e^{2i(\varpi-\Gamma)+i[(n-2)v-nV+2\omega-n\omega]}$$

$$-\frac{1}{8}\Xi_1^{nc,-1}\eta^4 e^{-4i(\varpi-\Gamma)+i[(n+4)v-nV-4\omega-n\omega]}$$

$$-\frac{1}{8}\Xi_1^{nc,1}\eta^4 e^{4i(\varpi-\Gamma)+i[(n-4)v-nV+4\omega-n\omega]}$$

$$+\frac{3}{8}\xi_1^{n,-1}\eta^3\eta' e^{-i(\varpi-\Gamma)-i(\varpi'-\Gamma')+i[(n+1)v-(n-1)V-\omega-n\omega]}$$

$$+\frac{3}{8}\xi_1^{n,-1}\eta^3\eta' e^{i(\varpi-\Gamma)-i(\varpi'-\Gamma')+i[(n-1)v-(n-1)V+\omega-n\omega]}$$

$$+\frac{3}{8}\xi_1^{n,1}\eta^3\eta' e^{-i(\varpi-\Gamma)+i(\varpi'-\Gamma')+i[(n+1)v-(n+1)V-\omega-n\omega]}$$

$$+\frac{3}{8}\xi_1^{n,1}\eta^3\eta' e^{i(\varpi-\Gamma)+i(\varpi'-\Gamma')+i[(n-1)v-(n+1)V+\omega-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{8}\xi_1^{n,-1}\eta^3\eta' e^{-3i(\varpi-\Gamma)-i(\varpi'-\Gamma')+i[(n+3)v-(n-1)V-3\omega-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{8}\xi_1^{n,-1}\eta^3\eta' e^{3i(\varpi-\Gamma)-i(\varpi'-\Gamma')+i[(n-3)v-(n-1)V+3\omega-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{8}\xi_1^{n,1}\eta^3\eta' e^{-3i(\varpi-\Gamma)+i(\varpi'-\Gamma')+i[(n+3)v-(n+1)V-3\omega-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{8}\xi_1^{n,1}\eta^3\eta' e^{3i(\varpi-\Gamma)+i(\varpi'-\Gamma')+i[(n-3)v-(n+1)V+3\omega-n\omega]},$$

$$(13,2,14)\quad \rho^2\rho' e^{[illegible]} = -\left\{\frac{1}{4}\Xi_1^{(n-1),-1} + \frac{1}{8}\Xi_1^{n-1,1}\right\}\eta_l^3\eta_l' e^{[illegible]}$$

$$-\left\{\frac{1}{4}\Xi_1^{(n-1),1} + \frac{1}{8}\Xi_1^{n-1,-1}\right\}\eta_l^3\eta_l' e^{[illegible]}$$

$$-\left\{\frac{1}{4}\Xi_1^{n+1,-1} + \frac{1}{8}\Xi_1^{n-1,1}\right\}\eta_l^3\eta_l' e^{[illegible]}$$

$$-\left\{\frac{1}{4}\Xi_1^{n+1,1} + \frac{1}{8}\Xi_1^{(n+1),-1}\right\}\eta_l^3\eta_l' e^{[illegible]}$$

$$-\frac{1}{8}\Xi_1^{(n-1),-1}\eta_l^3\eta_l' e^{[illegible]}$$

$$-\frac{1}{8}\Xi_1^{(n-1),1}\eta_l^3\eta_l' e^{[illegible]}$$

$$-\frac{1}{8}\Xi_1^{(n+1),-1}\eta_l^3\eta_l' e^{[illegible]}$$

$$-\frac{1}{8}\Xi_1^{(n+1),1}\eta_l^3\eta_l' e^{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{4}\left\{\xi_1^{n-1,1} + \xi_1^{n+1,-1}\right\}\eta_l^2\eta_l'^2 e^{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{8}\left\{\xi_1^{n-1,1} + \xi_1^{n+1,-1}\right\}\eta_l^2\eta_l'^2 e^{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{8}\left\{\xi_1^{n-1,1} + \xi_1^{n+1,-1}\right\}\eta_l^2\eta_l'^2 e^{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{4}\xi_1^{n-1,-1}\eta_l^2\eta_l'^2 e^{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{4}\xi_1^{n+1,1}\eta_l^2\eta_l'^2 e^{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{8}\xi_1^{n-1,-1}\eta_l^2\eta_l'^2 e^{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{8}\xi_1^{n-1,-1}\eta_l^2\eta_l'^2 e^{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{8}\xi_1^{n+1,1}\eta_l^2\eta_l'^2 e^{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{8}\xi_1^{n+1,1}\eta_l^2\eta_l'^2 e^{[illegible]},$$

$$(13,1,2,4)\quad \rho\rho'^2 e^{i(n\omega\ldots)} = -\frac{1}{4}\left\{\Xi_1^{n,1}+\Xi_1^{(n),1}\right\}\eta^2\eta'^2 e^{i(n\omega-nV-n\omega)}$$

$$-\frac{1}{4}\Xi_1^{n,1}\eta^2\eta'^2 e^{[2(\varpi-\Gamma)+i(n+2)\ldots-nV-2\omega-n\omega]}$$

$$-\frac{1}{4}\Xi_1^{n,1}\eta^2\eta'^2 e^{[2(\varpi-\Gamma)+i\ldots-2\ldots V+2\omega-n\omega]}$$

$$-\frac{1}{8}\left\{\Xi_1^{(n-2),1}+\Xi_1^{n-2,-1}\right\}\eta^2\eta'^2 e^{[2(\varpi-\Gamma)+i(n\ldots-(n-2)V\ldots n\omega]}$$

$$-\frac{1}{8}\left\{\Xi_1^{n+2,1}+\Xi_1^{(n+2),1}\right\}\eta^2\eta'^2 e^{[2(\varpi-\Gamma)+i(n\ldots-(n+2)V\ldots]}$$

$$-\frac{1}{8}\Xi_1^{n-2,1}\eta^2\eta'^2 e^{[2(\varpi-\Gamma)-2(\varpi-\Gamma)+i(n+2)\ldots-(n-2)V-2\omega-n\omega]}$$

$$-\frac{1}{8}\Xi_1^{(n-2),1}\eta^2\eta'^2 e^{[2(\varpi-\Gamma)-2(\varpi-\Gamma)+i(\ldots-2\ldots-(n-2)V+2\omega-n\omega]}$$

$$-\frac{1}{8}\Xi_1^{n+2,1}\eta^2\eta'^2 e^{[2(\varpi-\Gamma)+2(\varpi-\Gamma)+i(n+2)\ldots-(n+2)V-2\omega-n\omega]}$$

$$-\frac{1}{8}\Xi_1^{(n+2),1}\eta^2\eta'^2 e^{[2(\varpi-\Gamma)+2(\varpi-\Gamma)+i(n-2)\ldots-(n+2)V+2\omega-n\omega]}$$

$$+\left\{\frac{1}{4}\Xi_1^{n,1}+\frac{1}{8}\Xi_1^{n-2,1}\right\}\eta\eta'^3 e^{[\ldots]}$$ [illegible]

$$+\left\{\frac{1}{4}\Xi_1^{n,1}+\frac{1}{8}\Xi_1^{n-2,1}\right\}\eta\eta'^3 e^{[\ldots+i(n-1)\ldots-(n-1)V+\omega-n\omega]}$$

$$+\left\{\frac{1}{4}\Xi_1^{n,1}+\frac{1}{8}\Xi_1^{n+2,1}\right\}\eta\eta'^3 e^{[\ldots+i(n-1)\ldots-(n+1)V\ldots-n\omega]}$$

$$+\left\{\frac{1}{4}\Xi_1^{n,1}+\frac{1}{8}\Xi_1^{n+2,1}\right\}\eta\eta'^3 e^{[\ldots+i(n+1)\ldots-(n+1)V\ldots]}$$

$$+\frac{1}{8}\Xi_1^{n-2,1}\eta\eta'^3 e^{[\ldots]}$$ [illegible]

$$+\frac{1}{8}\Xi_1^{n-2,1}\eta\eta'^3 e^{[\ldots]}$$ [illegible]

$$+\frac{1}{8}\Xi_1^{n+2,1}\eta\eta'^3 e^{[(\varpi-\Gamma)+3(\varpi-\Gamma)+i(n+1)\ldots-(n+3)V\ldots-n\omega]},$$

$$+\frac{1}{8}\Xi_1^{n+2,1}\eta\eta'^3 e^{[(\varpi-\Gamma)+3(\varpi-\Gamma)+i(n+1)\ldots-(n+3)V+\omega-n\omega]},$$

$$(13,0,3,4)\quad \rho'^4 e^{i(nv-\nu)} = -\frac{3}{8}\Xi_1^{(n-1)\varsigma,-1}\gamma_{\prime}\gamma_{\prime}'^3 e^{-i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')+i[(n+1)v-(n-1)V-\omega-n\omega_{\prime}]}$$

$$-\frac{3}{8}\Xi_1^{(n-1)\varsigma,1}\gamma_{\prime}\gamma_{\prime}'^3 e^{i(\pi-\Gamma)-i(\pi'-\Gamma')+i[(n-1)v-(n-1)V+\omega-n\omega_{\prime}]}$$

$$-\frac{3}{8}\Xi_1^{(n+1)\varsigma,-1}\gamma_{\prime}\gamma_{\prime}'^3 e^{-i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')+i[(n+1)v-(n+1)V-\omega-n\omega_{\prime}]}$$

$$-\frac{3}{8}\Xi_1^{(n+1)\varsigma,1}\gamma_{\prime}\gamma_{\prime}'^3 e^{i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')+i[(n-1)v-(n+1)V+\omega-n\omega_{\prime}]}$$

$$-\frac{1}{8}\Xi_1^{(n-3)\varsigma,-1}\gamma_{\prime}\gamma_{\prime}'^3 e^{-i(\pi-\Gamma)-3i(\pi'-\Gamma')+i[(n+1)v-(n-3)V-\omega-n\omega_{\prime}]}$$

$$-\frac{1}{8}\Xi_1^{(n-3)\varsigma,1}\gamma_{\prime}\gamma_{\prime}'^3 e^{i(\pi-\Gamma)-3i(\pi'-\Gamma')+i[(n-1)v-(n-3)V+\omega-n\omega_{\prime}]}$$

$$-\frac{1}{8}\Xi_1^{(n+3)\varsigma,-1}\gamma_{\prime}\gamma_{\prime}'^3 e^{-i(\pi-\Gamma)+3i(\pi'-\Gamma')+i[(n+1)v-(n+3)V-\omega-n\omega_{\prime}]}$$

$$-\frac{1}{8}\Xi_1^{(n+3)\varsigma,1}\gamma_{\prime}\gamma_{\prime}'^3 e^{i(\pi-\Gamma)+3i(\pi'-\Gamma')+i[(n-1)v-(n+3)V+\omega-n\omega_{\prime}]}$$

$$+\frac{3}{8}\left\{\Xi_1^{n-1,1}+\Xi_1^{n+1,-1}\right\}\gamma_{\prime}'^4 e^{i(nv-nV-n\omega_{\prime})}$$

$$+\left\{\frac{1}{8}\Xi_1^{n-3,1}+\frac{3}{8}\Xi_1^{n+1,-1}\right\}\gamma_{\prime}'^4 e^{-2i(\pi'-\Gamma')+i[nv-(n-2)V-n\omega_{\prime}]}$$

$$+\left\{\frac{1}{8}\Xi_1^{n+3,-1}+\frac{3}{8}\Xi_1^{n+1,1}\right\}\gamma_{\prime}'^4 e^{2i(\pi'-\Gamma')+i[nv-(n+2)V-n\omega_{\prime}]}$$

$$+\frac{1}{8}\Xi_1^{n-3,-1}\gamma_{\prime}'^4 e^{-4i(\pi'-\Gamma')+i[nv-(n-4)V-n\omega_{\prime}]}$$

$$+\frac{1}{8}\Xi_1^{n+3,1}\gamma_{\prime}'^4 e^{4i(\pi'-\Gamma')+i[nv-(n+4)V-n\omega_{\prime}]},$$

$$(13,4,0,4)\quad \rho^4 e^{i(nv-\nu)} = \frac{3}{8}\gamma_{\prime}^4 e^{i(nv-nV-n\omega_{\prime})}$$

$$+\frac{1}{4}\gamma_{\prime}^4 e^{-2i(\pi-\Gamma)+i[(n+2)v-nV-2\omega-n\omega_{\prime}]}$$

$$+\frac{1}{4}\gamma_{\prime}^4 e^{2i(\pi-\Gamma)+i[(n-2)v-nV+2\omega-n\omega_{\prime}]}$$

$$+\frac{1}{16}\gamma_{\prime}^4 e^{-4i(\pi-\Gamma)+i[(n+4)v-nV-4\omega-n\omega_{\prime}]}$$

$$+\frac{1}{16}\gamma_{\prime}^4 e^{4i(\pi-\Gamma)+i[(n-4)v-nV+4\omega-n\omega_{\prime}]},$$

(13.3.1.4) $\rho^3\rho' e^{[illegible]} = \frac{3}{16}\eta\,\eta' e^{[illegible]}$

$+ \frac{3}{16}\eta^3\eta' e^{[illegible]}$

$+ \frac{3}{16}\eta^3\eta' e^{[illegible]}$

$+ \frac{3}{16}\eta^3\eta' e^{[illegible]}$

$+ \frac{1}{16}\eta^3\eta' e^{[illegible]}$

$+ \frac{1}{16}\eta^3\eta' e^{[illegible]}$,

$+ \frac{1}{16}\eta^3\eta' e^{[illegible]}$

$+ \frac{1}{16}\eta^3\eta' e^{[illegible]}$,

(13.2.2.4) $\rho^2\rho'^2 e^{[illegible]} = \frac{1}{4}\eta^2\eta'^2 e^{[illegible]}$

$+ \frac{1}{8}\eta^2\eta'^2 e^{[illegible]}$

$+ \frac{1}{8}\eta^2\eta'^2 e^{[illegible]}$

$+ \frac{1}{8}\eta^2\eta'^2 e^{[illegible]}$

$+ \frac{1}{8}\eta^2\eta'^2 e^{[illegible]}$

$+ \frac{1}{16}\eta^2\eta'^2 e^{[illegible]}$.

$+ \frac{1}{16}\eta^2\eta'^2 e^{[illegible]}$

$+ \frac{1}{16}\eta^2\eta'^2 e^{[illegible]}$

$+ \frac{1}{16}\eta^2\eta'^2 e^{[illegible]}$.

$$(13,1,3,4)\quad \rho\rho'^3 e^{i(nv-nV)} = \frac{3}{16}\eta\eta'^3 e^{-i(\pi-\Gamma)-i(\pi'-\Gamma')+i[(n+1)v-(n-1)V-\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{3}{16}\eta\eta'^3 e^{i(\pi-\Gamma)-i(\pi'-\Gamma')+i[(n-1)v-(n-1)V+\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{3}{16}\eta\eta'^3 e^{-i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')+i[(n+1)v-(n+1)V-\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{3}{16}\eta\eta'^3 e^{i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')+i[(n-1)v-(n+1)V+\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{16}\eta\eta'^3 e^{-i(\pi-\Gamma)-3i(\pi'-\Gamma')+i[(n+1)v-(n-3)V-\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{16}\eta\eta'^3 e^{i(\pi-\Gamma)-3i(\pi'-\Gamma')+i[(n-1)v-(n-3)V+\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{16}\eta\eta'^3 e^{-i(\pi-\Gamma)+3i(\pi'-\Gamma')+i[(n+1)v-(n+3)V-\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{16}\eta\eta'^3 e^{i(\pi-\Gamma)+3i(\pi'-\Gamma')+i[(n-1)v-(n+3)V+\omega-n\omega']},$$

$$(13,0,4,4)\quad \rho'^4 e^{i(nv-nV)} = \frac{3}{8}\eta'^4 e^{i(nv-nV-n\omega')}$$

$$+\frac{1}{4}\eta'^4 e^{-2i(\pi'-\Gamma')+i[nv-(n-2)V-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{4}\eta'^4 e^{2i(\pi'-\Gamma')+i[nv-(n+2)V-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{16}\eta'^4 e^{-4i(\pi'-\Gamma')+i[nv-(n-4)V-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{16}\eta'^4 e^{4i(\pi'-\Gamma')+i[nv-(n+4)V-n\omega']}.$$

F) *Termes du cinquième degré.*

$$(14,0,0,5)\quad e^{i(nv-nV)} = -\Xi_5^{n\varsigma,1}\eta^5 e^{-i(\pi-\Gamma)+i[(n+1)v-nV-\omega-n\omega']}$$

$$-\Xi_5^{n\varsigma,1}\eta^5 e^{i(\pi-\Gamma)+i[(n-1)v-nV+\omega-n\omega']}$$

$$+\Xi_5^{n\varsigma,3}\eta^5 e^{-3i(\pi-\Gamma)+i[(n+3)v-nV-3\omega-n\omega']},$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$+ \Xi_5^{n\varsigma,3}\eta^5 e^{3i(\varpi-\Gamma)+i[(n-3)\varepsilon-nV+3\omega-n\omega']}$$

$$- \Xi_5^{n\varsigma,-5}\eta^5 e^{-5i(\varpi-\Gamma)+i[(n+5)\varepsilon-nV-5\omega-n\omega']}$$

$$- \Xi_5^{n\varsigma,5}\eta^5 e^{5i(\varpi-\Gamma)+i[(n-5)\varepsilon-nV+5\omega-n\omega']}$$

$$+ \xi_1^{n,-1}\Xi_4^{(n-1)\varsigma,0}\eta^4\eta' e^{-i(\varpi'-\Gamma')+i[n\varepsilon-(n-1)V-n\omega']}$$

$$+ \xi_1^{n,1}\Xi_4^{(n+1)\varsigma,0}\eta^4\eta' e^{i(\varpi'-\Gamma')+i[n\varepsilon-(n+1)V-n\omega']}$$

$$- \xi_1^{n,-1}\Xi_4^{(n-1)\varsigma,-2}\eta^4\eta' e^{-2i(\varpi-\Gamma)-i(\varpi'-\Gamma')+i[(n+2)\varepsilon-(n-1)V-2\omega-n\omega']}$$

$$- \xi_1^{n,-1}\Xi_4^{(n-1)\varsigma,2}\eta^4\eta' e^{2i(\varpi-\Gamma)-i(\varpi'-\Gamma')+i[(n-2)\varepsilon-(n-1)V+2\omega-n\omega']}$$

$$- \xi_1^{n,1}\Xi_4^{(n+1)\varsigma,-2}\eta^4\eta' e^{-2i(\varpi-\Gamma)+i(\varpi'-\Gamma')+i[(n+2)\varepsilon-(n+1)V-2\omega-n\omega']}$$

$$- \xi_1^{n,1}\Xi_4^{(n+1)\varsigma,2}\eta^4\eta' e^{2i(\varpi-\Gamma)+i(\varpi'-\Gamma')+i[(n-2)\varepsilon-(n+1)V+2\omega-n\omega']}$$

$$+ \xi_1^{n,-1}\Xi_4^{(n-1)\varsigma,-4}\eta^4\eta' e^{-4i(\varpi-\Gamma)-i(\varpi'-\Gamma')+i[(n+4)\varepsilon-(n-1)V-4\omega-n\omega']}$$

$$+ \xi_1^{n,-1}\Xi_4^{(n-1)\varsigma,4}\eta^4\eta' e^{4i(\varpi-\Gamma)-i(\varpi'-\Gamma')+i[(n-4)\varepsilon-(n-1)V+4\omega-n\omega']}$$

$$+ \xi_1^{n,1}\Xi_4^{(n+1)\varsigma,-4}\eta^4\eta' e^{-4i(\varpi-\Gamma)+i(\varpi'-\Gamma')+i[(n+4)\varepsilon-(n+1)V-4\omega-n\omega']}$$

$$+ \xi_1^{n,1}\Xi_4^{(n+1)\varsigma,4}\eta^4\eta' e^{4i(\varpi-\Gamma)+i(\varpi'-\Gamma')+i[(n-4)\varepsilon-(n+1)V+4\omega-n\omega']}$$

$$- \xi_2^{n,0}\Xi_3^{n\varsigma,-1}\eta^3\eta'^2 e^{-i(\varpi-\Gamma)+i[(n+1)\varepsilon-nV-\omega-n\omega']}$$

$$- \xi_2^{n,0}\Xi_3^{n\varsigma,1}\eta^3\eta'^2 e^{i(\varpi-\Gamma)+i[(n-1)\varepsilon-nV+\omega-n\omega']}$$

$$+ \xi_2^{n,-2}\Xi_3^{(n-2)\varsigma,-1}\eta^3\eta'^2 e^{-i(\varpi-\Gamma)-2i(\varpi'-\Gamma')+i[(n+1)\varepsilon-(n-2)V-\omega-n\omega']}$$

$$+ \xi_2^{n,-2}\Xi_3^{(n-2)\varsigma,1}\eta^3\eta'^2 e^{i(\varpi-\Gamma)-2i(\varpi'-\Gamma')+i[(n-1)\varepsilon-(n-2)V+\omega-n\omega']}$$

$$+ \xi_2^{n,2}\Xi_3^{(n+2)\varsigma,-1}\eta^3\eta'^2 e^{-i(\varpi-\Gamma)+2i(\varpi'-\Gamma')+i[(n+1)\varepsilon-(n+2)V-\omega-n\omega']}$$

$$+ \xi_2^{n,2}\Xi_3^{(n+2)\varsigma,1}\eta^3\eta'^2 e^{i(\varpi-\Gamma)+2i(\varpi'-\Gamma')+i[(n-1)\varepsilon-(n+2)V+\omega-n\omega']}$$

$$+ \xi_2^{n,0}\Xi_3^{n\varsigma,-3}\eta^3\eta'^2 e^{-3i(\varpi-\Gamma)+i[(n+3)\varepsilon-nV-3\omega-n\omega']}$$

$$+ \xi_2^{n,0}\Xi_3^{n\varsigma,3}\eta^3\eta'^2 e^{3i(\varpi-\Gamma)+i[(n-3)\varepsilon-nV+3\omega-n\omega']}$$

$$\xi_2^{n,-2}\Xi_3^{(n-2)\varsigma,-3}\eta^3\eta'^2 e^{-3i(\varpi-\Gamma)-2i(\varpi'-\Gamma')+i[(n+3)\varepsilon-(n-2)V-3\omega-n\omega']}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

[illegible]

— [illegible]

— [illegible]

+ [illegible]

+ [illegible]

— [illegible]

— [illegible]

— [illegible]

— [illegible]

— [illegible]

— [illegible]

+ [illegible]

+ [illegible]

+ [illegible]

+ [illegible]

[illegible]

— [illegible]

+ [illegible]

+ [illegible]

+ [illegible]

+ [illegible]

— [illegible]

Cette formule se continue à la page suivante

$$- \xi_1^{n,1}\,\Xi_1^{[illegible]}\,\eta\eta'^{1}\,e^{[illegible]}$$

$$- \xi_1^{n,1}\,\Xi_1^{[illegible]}\,\eta\eta'^{1}\,e^{[illegible]}$$

$$- \xi_1^{n,1}\,\Xi_1^{[illegible]}\,\eta\eta'^{1}\,e^{[illegible]}$$

$$+ \xi_3^{n,1}\,\eta'^{3}\,e^{[illegible]}$$

$$+ \xi_3^{n,1}\,\eta'^{3}\,e^{[illegible]}$$

$$- \xi_3^{n,3}\,\eta'^{3}\,e^{[illegible]}$$

$$- \xi_3^{n,3}\,\eta'^{3}\,e^{[illegible]}$$

$$+ \xi_3^{n,5}\,\eta'^{3}\,e^{[illegible]}$$

$$+ \xi_3^{n,5}\,\eta'^{3}\,e^{[illegible]},$$

(114,105) $$\rho^{[illegible]} = \frac{1}{2}\{\Xi_1^{n,0} - \Xi_1^{[illegible]}\}\eta^{3}e^{[illegible]}$$

$$+ \frac{1}{2}\{\Xi_1^{n,0} - \Xi_1^{[illegible]}\}\eta^{3}e^{[illegible]}$$

$$+ \frac{1}{2}\{\Xi_1^{[illegible]} - \Xi_1^{[illegible]}\}\eta^{3}e^{[illegible]}$$

$$+ \frac{1}{2}\{\Xi_1^{[illegible]} - \Xi_1^{[illegible]}\}\eta^{3}e^{[illegible]}$$

$$+ \frac{1}{2}\Xi_1^{[illegible]}\eta^{3}e^{[illegible]}$$

$$+ \frac{1}{2}\Xi_1^{[illegible]}\eta^{3}e^{[illegible]}$$

$$+ \frac{1}{2}\xi_1^{[illegible]}\{\Xi_2^{[illegible]} + \Xi_2^{[illegible]}\}\eta^{1}\eta'e^{[illegible]}$$

$$+ \frac{1}{2}\xi_1^{n,1}\{\Xi_2^{[illegible]} + \Xi_2^{[illegible]}\}\eta^{1}\eta'e^{[illegible]}$$

$$+ \frac{1}{2}\xi_1^{[illegible]}\{\Xi_2^{[illegible]} - \Xi_2^{[illegible]}\}\eta^{1}\eta'e^{[illegible]}$$

$$+ \frac{1}{2}\xi_1^{[illegible]}\{\Xi_2^{[illegible]} - \Xi_2^{[illegible]}\}\eta^{1}\eta'e^{[illegible]}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$+\frac{1}{2}\xi_1^{n,1}\left\{\varepsilon_3^{(n+1)\varsigma,-1}-\varepsilon_3^{(n+1)\varsigma,-3}\right\}\eta_\prime^4\eta_\prime' e^{-2i(\pi-\Gamma)+i(\pi-\Gamma')+i[(n+2)v-(n+1)V-2\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{2}\xi_1^{n,1}\left\{\varepsilon_3^{(n+1)\varsigma,1}-\varepsilon_3^{(n+1)\varsigma,3}\right\}\eta_\prime^4\eta_\prime' e^{2i(\pi-\Gamma)+i(\pi-\Gamma')+i[(n-2)v-(n+1)V+2\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{2}\xi_1^{n,-1}\varepsilon_3^{(n-1)\varsigma,-3}\eta_\prime^4\eta_\prime' e^{-4i(\pi-\Gamma)-i(\pi-\Gamma')+i[(n+4)v-(n-1)V-4\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{2}\xi_1^{n,-1}\varepsilon_3^{(n-1)\varsigma,3}\eta_\prime^4\eta_\prime' e^{4i(\pi-\Gamma)-i(\pi-\Gamma')+i[(n-4)v-(n-1)V+4\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{2}\xi_1^{n,1}\varepsilon_3^{(n+1)\varsigma,-3}\eta_\prime^4\eta_\prime' e^{-4i(\pi-\Gamma)+i(\pi-\Gamma')+i[(n+4)v-(n+1)V-4\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{2}\xi_1^{n,1}\varepsilon_3^{(n+1)\varsigma,3}\eta_\prime^4\eta_\prime' e^{4i(\pi-\Gamma)+i(\pi-\Gamma')+i[(n-4)v-(n+1)V+4\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{2}\xi_2^{n,0}\left\{\varepsilon_2^{n\varsigma,0}-\varepsilon_2^{n\varsigma,-2}\right\}\eta_\prime^3\eta_\prime'^2 e^{-i(\pi-\Gamma)+i[(n+1)v-nV-\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{2}\xi_2^{n,0}\left\{\varepsilon_2^{n\varsigma,0}-\varepsilon_2^{n\varsigma,2}\right\}\eta_\prime^3\eta_\prime'^2 e^{i(\pi-\Gamma)+i[(n-1)v-nV+\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{2}\xi_2^{n,-2}\left\{\varepsilon_2^{(n-2)\varsigma,-2}-\varepsilon_2^{(n-2)\varsigma,0}\right\}\eta_\prime^3\eta_\prime'^2 e^{-i(\pi-\Gamma)-2i(\pi-\Gamma')+i[(n+1)v-(n-2)V-\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{2}\xi_2^{n,-2}\left\{\varepsilon_2^{(n-2)\varsigma,2}-\varepsilon_2^{(n-2)\varsigma,0}\right\}\eta_\prime^3\eta_\prime'^2 e^{i(\pi-\Gamma)-2i(\pi-\Gamma')+i[(n-1)v-(n-2)V+\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{2}\xi_2^{n,2}\left\{\varepsilon_2^{(n+2)\varsigma,-2}-\varepsilon_2^{(n+2)\varsigma,0}\right\}\eta_\prime^3\eta_\prime'^2 e^{-i(\pi-\Gamma)+2i(\pi-\Gamma')+i[(n+1)v-(n+2)V-\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{2}\xi_2^{n,2}\left\{\varepsilon_2^{(n+2)\varsigma,2}-\varepsilon_2^{(n+2)\varsigma,0}\right\}\eta_\prime^3\eta_\prime'^2 e^{i(\pi-\Gamma)+2i(\pi-\Gamma')+i[(n-1)v-(n+2)V+\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{2}\xi_2^{n,0}\varepsilon_2^{n\varsigma,-2}\eta_\prime^3\eta_\prime'^2 e^{-3i(\pi-\Gamma)+i[(n+3)v-nV-3\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{2}\xi_2^{n,0}\varepsilon_2^{n\varsigma,2}\eta_\prime^3\eta_\prime'^2 e^{3i(\pi-\Gamma)+i[(n-3)v-nV+3\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{2}\xi_2^{n,-2}\varepsilon_2^{(n-2)\varsigma,-2}\eta_\prime^3\eta_\prime'^2 e^{-3i(\pi-\Gamma)-2i(\pi-\Gamma')+i[(n+3)v-(n-2)V-3\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{2}\xi_2^{n,-2}\varepsilon_2^{(n-2)\varsigma,2}\eta_\prime^3\eta_\prime'^2 e^{3i(\pi-\Gamma)-2i(\pi-\Gamma')+i[(n-3)v-(n-2)V+3\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{2}\xi_2^{n,2}\varepsilon_2^{(n+2)\varsigma,-2}\eta_\prime^3\eta_\prime'^2 e^{-3i(\pi-\Gamma)+2i(\pi-\Gamma')+i[(n+3)v-(n+2)V-3\omega-n\omega']}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$+\frac{1}{2}\xi_2^{n,2}\Xi_2^{(n+2)c,2}\eta^3\eta'^2 e^{3i(\pi-\Gamma')+2i(\pi-\Gamma)+i[nv-3v-(n+2)V+\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{2}\xi_3^{n,-1}\left\{\Xi_1^{(n-1)c,1}+\Xi_1^{(n-1)c,-1}\right\}\eta^2\eta'^3 e^{i(\pi-\Gamma'')+i[nv-(n-1)V-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{2}\xi_3^{n,1}\left\{\Xi_1^{(n+1)c,1}+\Xi_1^{(n+1)c,-1}\right\}\eta^2\eta'^3 e^{i(\pi'-\Gamma'')+i[nv-(n+1)V-n\omega]}$$

$$-\frac{1}{2}\xi_3^{n,-3}\left\{\Xi_1^{(n-3)c,1}+\Xi_1^{(n-3)c,-1}\right\}\eta^2\eta'^3 e^{3i(\pi-\Gamma')+i[nv-(n-3)V-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{2}\xi_3^{n,3}\left\{\Xi_1^{(n+3)c,1}+\Xi_1^{(n+3)c,-1}\right\}\eta^2\eta'^3 e^{3i(\pi-\Gamma')+i[nv-(n+3)V-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{2}\xi_3^{n,-1}\Xi_1^{(n-1)c,1}\eta^2\eta'^3 e^{2i(\pi-\Gamma)+i(\pi-\Gamma')+i[(n+2)v-(n-1)V-2\omega-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{2}\xi_3^{n,-1}\Xi_1^{(n-1)c,1}\eta^2\eta'^3 e^{2i(\pi-\Gamma)-i(\pi-\Gamma')+i[(n-2)v-(n-1)V+2\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{2}\xi_3^{n,1}\Xi_1^{(n+1)c,1}\eta^2\eta'^3 e^{-2i(\pi-\Gamma)+i(\pi-\Gamma')+i[(n+2)v-(n+1)V-2\omega-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{2}\xi_3^{n,1}\Xi_1^{(n+1)c,1}\eta^2\eta'^3 e^{2i(\pi-\Gamma)+i(\pi-\Gamma')+i[(n-2)v-(n+1)V+2\omega-n\omega]}$$

$$-\frac{1}{2}\xi_3^{n,-3}\Xi_1^{(n-3)c,1}\eta^2\eta'^3 e^{2i(\pi-\Gamma)-3i(\pi-\Gamma')+i[(n+2)v-(n-3)V-2\omega-n\omega]}$$

$$-\frac{1}{2}\xi_3^{n,-3}\Xi_1^{(n-3)c,1}\eta^2\eta'^3 e^{2i(\pi-\Gamma)-3i(\pi'-\Gamma')+i[(n-2)v-(n-3)V+2\omega-n\omega]}$$

$$-\frac{1}{2}\xi_3^{n,3}\Xi_1^{(n+3)c,1}\eta^2\eta'^3 e^{-2i(\pi-\Gamma)+3i(\pi-\Gamma')+i[(n+2)v-(n+3)V-2\omega-n\omega]}$$

$$-\frac{1}{2}\xi_3^{n,3}\Xi_1^{(n+3)c,1}\eta^2\eta'^3 e^{2i(\pi-\Gamma)+3i(\pi-\Gamma')+i[(n-2)v-(n+3)V+2\omega-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{2}\xi_4^{n,0}\eta\eta'^4 e^{-i(\pi-\Gamma)+i[(n+1)v-nV-\omega-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{2}\xi_4^{n,0}\eta\eta'^4 e^{i(\pi-\Gamma)+i[(n-1)v-nV+\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{2}\xi_4^{n,-2}\eta\eta'^4 e^{-i(\pi-\Gamma)+2i(\pi-\Gamma')+i[(n+1)v-(n-2)V-\omega-n\omega]}$$

$$-\frac{1}{2}\xi_4^{n,-2}\eta\eta'^4 e^{i(\pi-\Gamma)-2i(\pi-\Gamma')+i[(n-1)v-(n-2)V+\omega-n\omega]}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$-\frac{1}{2}\xi_1^{n,2}\eta_{\prime}\eta_{\prime}^{\prime 4}e^{[illegible]}$$

$$-\frac{1}{2}\xi_1^{n,2}\eta_{\prime}\eta_{\prime}^{\prime 4}e^{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{2}\xi_1^{n,4}\eta_{\prime}\eta_{\prime}^{\prime 4}e^{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{2}\xi_1^{n,4}\eta_{\prime}\eta_{\prime}^{\prime 4}e^{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{2}\xi_1^{n,4}\eta_{\prime}\eta_{\prime}^{\prime 4}e^{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{2}\xi_1^{n,4}\eta_{\prime}\eta_{\prime}^{\prime 4}e^{[illegible]},$$

(14, 0, 1, 5) $\rho' e^{m(t-\tau)} = \frac{1}{2}\varepsilon_1^{(n-1)e,0}\eta_{\prime}^{4}\eta_{\prime}^{\prime}e^{[illegible]}$

$$+\frac{1}{2}\varepsilon_1^{(n+1)e,0}\eta_{\prime}^{4}\eta_{\prime}^{\prime}e^{[illegible]}$$

$$-\frac{1}{2}\varepsilon_1^{(n-1)e,2}\eta_{\prime}^{4}\eta_{\prime}^{\prime}e^{[illegible]}$$

$$-\frac{1}{2}\varepsilon_1^{(n-1)e,2}\eta_{\prime}^{4}\eta_{\prime}^{\prime}e^{[illegible]}$$

$$-\frac{1}{2}\varepsilon_1^{(n+1)e,2}\eta_{\prime}^{4}\eta_{\prime}^{\prime}e^{[illegible]}$$

$$-\frac{1}{2}\varepsilon_1^{(n+1)e,2}\eta_{\prime}^{4}\eta_{\prime}^{\prime}e^{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{2}\varepsilon_1^{(n-1)e,4}\eta_{\prime}^{4}\eta_{\prime}^{\prime}e^{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{2}\varepsilon_1^{(n-1)e,4}\eta_{\prime}^{4}\eta_{\prime}^{\prime}e^{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{2}\varepsilon_1^{(n+1)e,4}\eta_{\prime}^{4}\eta_{\prime}^{\prime}e^{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{2}\varepsilon_1^{(n+1)e,4}\eta_{\prime}^{4}\eta_{\prime}^{\prime}e^{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\xi_1^{n+1,1}+\xi_1^{n-1,1}\right\}\varepsilon_2^{[illegible]}\eta_{\prime}^{3}\eta_{\prime}^{\prime 2}e^{[illegible]}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$+\frac{1}{2}\{\xi_1^{n+1,\,1}+\xi_1^{n,\,1,1}\}\,\Xi_3\,\eta^3\eta'^2 e$ [illegible]

$+\frac{1}{2}\xi_1^{n,\,1,\,1}\,\Xi_3^{(n-2)}\,\eta^3\eta'^2 e$ [illegible]

$+\frac{1}{2}\xi_1^{n,\,1,\,1}\,\Xi_3^{(n-2)}\,\eta^3\eta'^2 e$ [illegible]

$+\frac{1}{2}\xi_1^{n+1,1}\,\Xi_3^{(n+2)}\,\eta^3\eta'^2 e$ [illegible]

$+\frac{1}{2}\xi_1^{n+1,1}\,\Xi_3^{(n+2)}\,\eta^3\eta'^2 e$ [illegible]

$-\frac{1}{2}\{\xi_1^{n+1,\,1}+\xi_1^{n,\,1,1}\}\,\Xi_3\,\eta^3\eta'^2 e$ [illegible]

$-\frac{1}{2}\{\xi_1^{n+1,\,1}+\xi_1^{n,\,1,1}\}\,\Xi_3\,\eta^3\eta'^2 e$ [illegible]

$-\frac{1}{2}\xi_1^{n-1,\,1}\,\Xi_3^{n-2}\,\eta^3\eta'^2 e$ [illegible]

$-\frac{1}{2}\xi_1^{n-1,\,1}\,\Xi_3\,\eta^3\eta'^2 e$ [illegible]

$-\frac{1}{2}\xi_1^{n+1,1}\,\Xi_3^{(n+2)}\,\eta^3\eta'^2 e$ [illegible]

$-\frac{1}{2}\xi_1^{n+1,1}\,\Xi_3^{(n+2)}\,\eta^3\eta'^2 e$ [illegible]

$+\frac{1}{2}\{\xi_2^{n,\,1,0}-\xi_2^{n+1,\,2}\}\,\Xi_2^{(n-1)}\,\eta^2\eta'^2 e$ [illegible]

$+\frac{1}{2}\{\xi_2^{n+1,0}-\xi_2^{n,\,1,2}\}\,\Xi_2^{(n+1)}\,\eta^2\eta'^3 e$ [illegible]

$-\frac{1}{2}\xi_2^{n-1,\,2}\,\Xi_2^{(n-3)}\,\eta^2\eta'^3 e$ [illegible]

$-\frac{1}{2}\xi_2^{n+1,2}\,\Xi_2^{(n+3)}\,\eta^2\eta'^3 e$ [illegible]

$+\frac{1}{2}\{\xi_2^{n+1,\,2}-\xi_2^{n,\,1,0}\}\,\Xi_2\,\eta^2\eta'^3 e$ [illegible]

$+\frac{1}{2}\{\xi_2^{n-1,\,2}-\xi_2^{n-1,0}\}\,\Xi_2\,\eta^2\eta' e$ [illegible]

Cette formule se continue à la page suivante.

$$+\frac{1}{2}\left\{\Xi_2^{n-1,2} - \Xi_2^{n+1,0}\right\}\Xi_2^{n+1,[illegible]}\,\eta_{\prime}^2\eta_{\prime}'^3 e^{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\Xi_2^{n-1,2} - \Xi_2^{n+1,0}\right\}\Xi_2^{n+1,[illegible]}\,\eta_{\prime}^2\eta_{\prime}'^3 e^{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{2}\Xi_2^{n-1,2}\,\Xi_2^{[illegible]}\,\eta_{\prime}^2\eta_{\prime}'^3 e^{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{2}\Xi_2^{n-1,2}\,\Xi_2^{[illegible]}\,\eta_{\prime}^2\eta_{\prime}'^3 e^{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{2}\Xi_2^{n+1,[illegible]}\,\Xi_2^{n+[illegible]}\,\eta_{\prime}^2\eta_{\prime}'^3 e^{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{2}\Xi_2^{n+1,2}\,\Xi_2^{n+5,[illegible]}\,\eta_{\prime}^2\eta_{\prime}'^3 e^{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\Xi_3^{n-1,1} + \Xi_3^{n+1,-1}\right\}\Xi_1^{n,[illegible]}\,\eta_{\prime}\eta_{\prime}'^4 e^{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\Xi_3^{n-1,1} + \Xi_3^{n+1,-1}\right\}\Xi_1^{n,[illegible]}\,\eta_{\prime}\eta_{\prime}'^4 e^{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\Xi_3^{n-1,-1} - \Xi_3^{n+1,-3}\right\}\Xi_1^{n-2,[illegible]}\,\eta_{\prime}\eta_{\prime}'^4 e^{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\Xi_3^{n-1,-1} - \Xi_3^{n+1,-3}\right\}\Xi_1^{n-2,[illegible]}\,\eta_{\prime}\eta_{\prime}'^4 e^{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\Xi_3^{n+1,1} - \Xi_3^{n-1,3}\right\}\Xi_1^{n+2,[illegible]}\,\eta_{\prime}\eta_{\prime}'^4 e^{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\Xi_3^{n+1,1} - \Xi_3^{n-1,3}\right\}\Xi_1^{n+2,[illegible]}\,\eta_{\prime}\eta_{\prime}'^4 e^{[illegible]}$$

$$-\frac{1}{2}\Xi_3^{n-1,[illegible]}\,\Xi_1^{n-4,[illegible]}\,\eta_{\prime}\eta_{\prime}'^4 e^{[illegible]}$$

$$-\frac{1}{2}\Xi_3^{n-1,[illegible]}\,\Xi_1^{n-4,[illegible]}\,\eta_{\prime}\eta_{\prime}'^4 e^{[illegible]}$$

$$-\frac{1}{2}\Xi_3^{n+1,[illegible]}\,\Xi_1^{n+4,[illegible]}\,\eta_{\prime}\eta_{\prime}'^4 e^{[illegible]}$$

$$-\frac{1}{2}\Xi_3^{n+1,[illegible]}\,\Xi_1^{n+4,[illegible]}\,\eta_{\prime}\eta_{\prime}'^4 e^{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\Xi_1^{n-1,0} + \Xi_1^{n+1,-2}\right\}\eta_{\prime}'^5 e^{[illegible]}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

[illegible]

14.2.0.5 [illegible]

Cette formule se continue à la page suivante.

$$+\frac{1}{4}\Xi_1^{n,1}\,\varepsilon_2^{(n-1)c,2}\,\eta_{\prime}^{4}\eta_{\prime}'\,e^{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{4}\Xi_1^{n,1}\,\varepsilon_2^{(n-1)c,2}\,\eta_{\prime}^{4}\eta_{\prime}'\,e^{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{4}\Xi_1^{n,1}\,\varepsilon_2^{(n+1)c,2}\,\eta_{\prime}^{4}\eta_{\prime}'\,e^{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{4}\Xi_1^{n,1}\,\varepsilon_2^{(n+1)c,2}\,\eta_{\prime}^{4}\eta_{\prime}'\,e^{[illegible]}$$

$$+\Xi_2^{n,0}\left\{\frac{1}{2}\varepsilon_1^{nc,1}+\frac{1}{4}\varepsilon_1^{nc,1}\right\}\eta_{\prime}^{3}\eta_{\prime}'^{2}\,e^{[illegible]}$$

$$+\Xi_2^{n,0}\left\{\frac{1}{2}\varepsilon_1^{nc,1}+\frac{1}{4}\varepsilon_1^{nc,1}\right\}\eta_{\prime}^{3}\eta_{\prime}'^{2}\,e^{[illegible]}$$

$$-\Xi_2^{n,2}\left\{\frac{1}{2}\varepsilon_1^{(n-2)c,1}+\frac{1}{4}\varepsilon_1^{(n-2)c,1}\right\}\eta_{\prime}^{3}\eta_{\prime}'^{2}\,e^{[illegible]}$$

$$-\Xi_2^{n,2}\left\{\frac{1}{2}\varepsilon_1^{(n-2)c,1}+\frac{1}{4}\varepsilon_1^{(n-2)c,1}\right\}\eta_{\prime}^{3}\eta_{\prime}'^{2}\,e^{[illegible]}$$

$$-\Xi_2^{n,2}\left\{\frac{1}{2}\varepsilon_1^{(n+2)c,1}+\frac{1}{4}\varepsilon_1^{(n+2)c,1}\right\}\eta_{\prime}^{3}\eta_{\prime}'^{2}\,e^{[illegible]}$$

$$-\Xi_2^{n,2}\left\{\frac{1}{2}\varepsilon_1^{(n+2)c,1}+\frac{1}{4}\varepsilon_1^{(n+2)c,1}\right\}\eta_{\prime}^{3}\eta_{\prime}'^{2}\,e^{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{4}\Xi_2^{n,0}\,\varepsilon_1^{nc,1}\,\eta_{\prime}^{3}\eta_{\prime}'^{2}\,e^{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{4}\Xi_2^{n,0}\,\varepsilon_1^{nc,1}\,\eta_{\prime}^{3}\eta_{\prime}'^{2}\,e^{[illegible]}$$

$$-\frac{1}{4}\Xi_2^{n,2}\,\varepsilon_1^{(n-2)c,1}\,\eta_{\prime}^{3}\eta_{\prime}'^{2}\,e^{[illegible]}$$

$$-\frac{1}{4}\Xi_2^{n,2}\,\varepsilon_1^{(n-2)c,1}\,\eta_{\prime}^{3}\eta_{\prime}'^{2}\,e^{[illegible]}$$

$$-\frac{1}{4}\Xi_2^{n,2}\,\varepsilon_1^{(n+2)c,1}\,\eta_{\prime}^{3}\eta_{\prime}'^{2}\,e^{[illegible]}$$

$$-\frac{1}{4}\Xi_2^{n,2}\,\varepsilon_1^{(n+2)c,1}\,\eta_{\prime}^{3}\eta_{\prime}'^{2}\,e^{[illegible]}$$

$$-\frac{1}{2}\Xi_3^{[illegible]}\,\eta_{\prime}^{2}\eta_{\prime}'^{[illegible]}\,e^{[illegible]}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$\frac{1}{2}\Xi_{3}^{n,1}\eta^2\eta'^{n}e^{[illegible]},$$

$$+\frac{1}{2}\Xi_{3}^{n,3}\eta^2\eta'^{3}e^{3(\varpi-\Gamma)+[illegible]},$$

$$+\frac{1}{2}\Xi_{3}^{n,3}\eta^2\eta'^{3}e^{[illegible](n+3)[illegible]},$$

$$-\frac{1}{4}\Xi_{3}^{n,1}\eta^2\eta'^{n}e^{2(\varpi-\Gamma)[illegible]}$$

$$-\frac{1}{4}\Xi_{3}^{n,1}\eta^2\eta'^{3}e^{2(\varpi-\Gamma)[illegible]}$$

$$-\frac{1}{4}\Xi_{3}^{n,1}\eta^2\eta'^{3}e^{2(\varpi-\Gamma)[illegible]}$$

$$-\frac{1}{4}\Xi_{3}^{n,1}\eta^2\eta'^{3}e^{2(\varpi-\Gamma)[illegible]}$$

$$+\frac{1}{4}\Xi_{3}^{n,3}\eta^2\eta'^{3}e^{2(\varpi-\Gamma)[illegible]}$$

$$+\frac{1}{4}\Xi_{3}^{n,3}\eta^2\eta'^{3}e^{2(\varpi-\Gamma)+3(\varpi-\Gamma)+[illegible]}$$

$$+\frac{1}{4}\Xi_{3}^{n,3}\eta^2\eta'^{3}e^{2(\varpi-\Gamma)+3(\varpi-\Gamma)+[illegible](n+3)[illegible]}$$

$$+\frac{1}{4}\Xi_{3}^{n,3}\eta^2\eta'^{3}e^{2(\varpi-\Gamma)+3(\varpi-\Gamma)+[illegible]},$$

$$(14,1,1,5)\quad \rho\rho' e^{[illegible]} = \frac{1}{4}\left\{\Xi_{3}^{(n-1)c,1}+\Xi_{3}^{(n-1)c,1}\right\}\eta^4\eta' e^{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{4}\left\{\Xi_{3}^{(n+1)c,1}+\Xi_{3}^{(n+1)c,1}\right\}\eta^4\eta' e^{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{4}\left\{\Xi_{3}^{(n-1)c,1}-\Xi_{3}^{(n-1)c,3}\right\}\eta^4\eta' e^{2(\varpi-\Gamma)[illegible]},$$

$$+\frac{1}{4}\left\{\Xi_{3}^{(n-1)c,1}-\Xi_{3}^{(n-1)c,3}\right\}\eta^4\eta' e^{2(\varpi-\Gamma)[illegible]}$$

$$+\frac{1}{4}\left\{\Xi_{3}^{(n+1)c,1}-\Xi_{3}^{(n+1)c,3}\right\}\eta^4\eta' e^{2(\varpi-\Gamma)[illegible]}$$

$$+\frac{1}{4}\left\{\Xi_{3}^{(n+1)c,1}-\Xi_{3}^{(n+1)c,3}\right\}\eta^4\eta' e^{2(\varpi-\Gamma)[illegible]}.$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$-\frac{1}{4}\Xi_3^{(n-1)e,3}\eta_{,}^4\eta_{,}'e^{[illegible]}$$

$$-\frac{1}{4}\Xi_3^{(n-1)e,3}\eta_{,}^4\eta_{,}'e^{[illegible]}$$

$$\frac{1}{4}\Xi_3^{(n+1)e,3}\eta_{,}^4\eta_{,}'e^{[illegible]}$$

$$-\frac{1}{4}\Xi_3^{(n+1)e,3}\eta_{,}^4\eta_{,}'e^{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{4}\left\{\Xi_1^{n+1,1}+\Xi_1^{n-1,1}\right\}\left\{\Xi_2^{ne,-2}-\Xi_2^{ne,0}\right\}\eta_{,}^3\eta_{,}'^2e^{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{4}\left\{\Xi_1^{n+1,1}+\Xi_1^{n-1,1}\right\}\left\{\Xi_2^{ne,2}-\Xi_2^{ne,0}\right\}\eta_{,}^3\eta_{,}'^2e^{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{4}\Xi_1^{n-1,1}\left\{\Xi_2^{(n-2)e,-2}-\Xi_2^{(n-2)e,0}\right\}\eta_{,}^3\eta_{,}'^2e^{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{4}\Xi_1^{n-1,1}\left\{\Xi_2^{(n-2)e,2}-\Xi_2^{(n-2)e,0}\right\}\eta_{,}^3\eta_{,}'^2e^{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{4}\Xi_1^{n+1,1}\left\{\Xi_2^{(n+2)e,-2}-\Xi_2^{(n+2)e,0}\right\}\eta_{,}^3\eta_{,}'^2e^{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{4}\Xi_1^{n+1,1}\left\{\Xi_2^{(n+2)e,2}-\Xi_2^{(n+2)e,0}\right\}\eta_{,}^3\eta_{,}'^2e^{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{4}\left\{\Xi_1^{n+1,1}+\Xi_1^{n-1,1}\right\}\Xi_2^{ne,-2}\eta_{,}^3\eta_{,}'^2e^{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{4}\left\{\Xi_1^{n+1,1}+\Xi_1^{n-1,1}\right\}\Xi_2^{ne,2}\eta_{,}^3\eta_{,}'^2e^{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{4}\Xi_1^{n-1,1}\Xi_2^{(n-2)e,-2}\eta_{,}^3\eta_{,}'^2e^{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{4}\Xi_1^{n-1,1}\Xi_2^{(n-2)e,2}\eta_{,}^3\eta_{,}'^2e^{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{4}\Xi_1^{n+1,1}\Xi_2^{(n+2)e,-2}\eta_{,}^3\eta_{,}'^2e^{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{4}\Xi_1^{n+1,1}\Xi_2^{(n+2)e,2}\eta_{,}^3\eta_{,}'^2e^{[illegible]}$$

$$+\frac{1}{4}\left\{\Xi_2^{n-1,0}-\Xi_2^{n+1,2}\right\}\left\{\Xi_1^{(n-1)e,1}+\Xi_1^{(n-1)e,1}\right\}\eta_{,}^2\eta_{,}'^3e^{[illegible]}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

[illegible]

Cette formule se continue à la page suivante.

$$+\frac{1}{4}\Xi_3^{n-1,3}\gamma_1\gamma_1'^4 e^{i(\pi-\Gamma)-4i(\pi-\Gamma')+i[(n+1)t-(n-4)V-\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{4}\Xi_3^{n-1,3}\gamma_1\gamma_1'^4 e^{-i(\pi-\Gamma)-4i(\pi-\Gamma')+i[(n-1)t-(n-4)V+\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{4}\Xi_3^{n+1,3}\gamma_1\gamma_1'^4 e^{-i(\pi-\Gamma)+4i(\pi-\Gamma')+i[(n+1)t-(n+4)V-\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{4}\Xi_3^{n+1,3}\gamma_1\gamma_1'^4 e^{i(\pi-\Gamma)+4i(\pi-\Gamma')+i[(n-1)t-(n+4)V+\omega-n\omega']}.$$

$$(14.0.2.5)\quad \rho'^2 e^{in\omega'} = \frac{1}{2}\Xi_3^{n,1}\gamma_1^3\gamma_1'^2 e^{-i(\pi-\Gamma)+i[(n+1)t-nV-\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{2}\Xi_3^{n,1}\gamma_1^3\gamma_1'^2 e^{i(\pi-\Gamma)+i[(n-1)t-nV+\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{4}\Xi_3^{(n-2),1}\gamma_1^3\gamma_1'^2 e^{-i(\pi-\Gamma)-2i(\pi-\Gamma')+i[(n+1)t-(n-2)V-\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{4}\Xi_3^{(n-2),1}\gamma_1^3\gamma_1'^2 e^{i(\pi-\Gamma)-2i(\pi-\Gamma')+i[(n-1)t-(n-2)V+\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{4}\Xi_3^{(n+2),1}\gamma_1^3\gamma_1'^2 e^{-i(\pi-\Gamma)+2i(\pi-\Gamma')+i[(n+1)t-(n+2)V-\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{4}\Xi_3^{(n+2),1}\gamma_1^3\gamma_1'^2 e^{i(\pi-\Gamma)+2i(\pi-\Gamma')+i[(n-1)t-(n+2)V+\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{2}\Xi_3^{n,3}\gamma_1^3\gamma_1'^2 e^{-3i(\pi-\Gamma)+i[(n+3)t-nV-3\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{2}\Xi_3^{n,3}\gamma_1^3\gamma_1'^2 e^{3i(\pi-\Gamma)+i[(n-3)t-nV+3\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{4}\Xi_3^{(n-2),3}\gamma_1^3\gamma_1'^2 e^{-3i(\pi-\Gamma)-2i(\pi-\Gamma')+i[(n+3)t-(n-2)V-3\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{4}\Xi_3^{(n-2),3}\gamma_1^3\gamma_1'^2 e^{3i(\pi-\Gamma)-2i(\pi-\Gamma')+i[(n-3)t-(n-2)V+3\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{4}\Xi_3^{(n+2),3}\gamma_1^3\gamma_1'^2 e^{-3i(\pi-\Gamma)+2i(\pi-\Gamma')+i[(n+3)t-(n+2)V-3\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{4}\Xi_3^{(n+2),3}\gamma_1^3\gamma_1'^2 e^{3i(\pi-\Gamma)+2i(\pi-\Gamma')+i[(n-3)t-(n+2)V+3\omega-n\omega']}$$

$$-\left\{\frac{1}{2}\Xi_1^{n,1}+\frac{1}{4}\Xi_1^{n-2,1}\right\}\Xi_3^{(n-1),3}\gamma_1^2\gamma_1'^3 e^{i(\pi-\Gamma')+i[nt-(n-1)V-n\omega']}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$-\left\{\frac{1}{2}\xi_1^{n,1}+\frac{1}{4}\xi_1^{n+2,-1}\right\}\varepsilon_2^{(n+1)\varsigma,0}\eta^2\eta'^3e^{i(\pi'-\Gamma')+i[nv-(n+1)V-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{4}\xi_1^{n-2,-1}\varepsilon_2^{(n-3)\varsigma,0}\eta^2\eta'^3e^{-3i(\pi'-\Gamma')+i[nv-(n-3)V-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{4}\xi_1^{n+2,1}\varepsilon_2^{(n+3)\varsigma,0}\eta^2\eta'^3e^{3i(\pi'-\Gamma')+i[nv-(n+3)V-n\omega']}$$

$$+\left\{\frac{1}{2}\xi_1^{n,-1}+\frac{1}{4}\xi_1^{n-2,1}\right\}\varepsilon_2^{(n-1)\varsigma,-2}\eta^2\eta'^3e^{-2i(\pi-\Gamma)-i(\pi'-\Gamma')+i[(n+2)v-(n-1)V-2\omega-n\omega']}$$

$$+\left\{\frac{1}{2}\xi_1^{n,-1}+\frac{1}{4}\xi_1^{n-2,1}\right\}\varepsilon_2^{(n-1)\varsigma,2}\eta^2\eta'^3e^{2i(\pi-\Gamma)-i(\pi'-\Gamma')+i[(n-2)v-(n-1)V+2\omega-n\omega']}$$

$$+\left\{\frac{1}{2}\xi_1^{n,1}+\frac{1}{4}\xi_1^{n+2,-1}\right\}\varepsilon_2^{(n+1)\varsigma,-2}\eta^2\eta'^3e^{-2i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')+i[(n+2)v-(n+1)V-2\omega-n\omega']}$$

$$+\left\{\frac{1}{2}\xi_1^{n,1}+\frac{1}{4}\xi_1^{n+2,-1}\right\}\varepsilon_2^{(n+1)\varsigma,2}\eta^2\eta'^3e^{2i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')+i[(n-2)v-(n+1)V+2\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{4}\xi_1^{n-2,-1}\varepsilon_2^{(n-3)\varsigma,-2}\eta^2\eta'^3e^{-2i(\pi-\Gamma)-3i(\pi'-\Gamma')+i[(n+2)v-(n-3)V-2\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{4}\xi_1^{n-2,-1}\varepsilon_2^{(n-3)\varsigma,2}\eta^2\eta'^3e^{2i(\pi-\Gamma)-3i(\pi'-\Gamma')+i[(n-2)v-(n-3)V+2\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{4}\xi_1^{n+2,1}\varepsilon_2^{(n+3)\varsigma,-2}\eta^2\eta'^3e^{-2i(\pi-\Gamma)+3i(\pi'-\Gamma')+i[(n+2)v-(n+3)V-2\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{4}\xi_1^{n+2,1}\varepsilon_2^{(n+3)\varsigma,2}\eta^2\eta'^3e^{2i(\pi-\Gamma)+3i(\pi'-\Gamma')+i[(n-2)v-(n+3)V+2\omega-n\omega']}$$

$$+\left\{\frac{1}{2}\xi_2^{n,0}-\frac{1}{4}\xi_2^{n+2,-2}-\frac{1}{4}\xi_2^{n-2,2}\right\}\varepsilon_1^{n\varsigma,-1}\eta\eta'^4e^{-i(\pi-\Gamma)+i[(n+1)v-nV-\omega-n\omega']}$$

$$+\left\{\frac{1}{2}\xi_2^{n,0}-\frac{1}{4}\xi_2^{n+2,-2}-\frac{1}{4}\xi_2^{n-2,2}\right\}\varepsilon_1^{n\varsigma,1}\eta\eta'^4e^{i(\pi-\Gamma)+i[(n-1)v-nV+\omega-n\omega']}$$

$$-\left\{\frac{1}{2}\xi_2^{n,-2}-\frac{1}{4}\xi_2^{n-2,0}\right\}\varepsilon_1^{(n-2)\varsigma,-1}\eta\eta'^4e^{-i(\pi-\Gamma)-2i(\pi'-\Gamma')+i[(n+1)v-(n-2)V-\omega-n\omega']}$$

$$-\left\{\frac{1}{2}\xi_2^{n,-2}-\frac{1}{4}\xi_2^{n-2,0}\right\}\varepsilon_1^{(n-2)\varsigma,1}\eta\eta'^4e^{i(\pi-\Gamma)-2i(\pi'-\Gamma')+i[(n-1)v-(n-2)V+\omega-n\omega']}$$

$$-\left\{\frac{1}{2}\xi_2^{n,2}-\frac{1}{4}\xi_2^{n+2,0}\right\}\varepsilon_1^{(n+2)\varsigma,-1}\eta\eta'^4e^{-i(\pi-\Gamma)+2i(\pi'-\Gamma')+i[(n+1)v-(n+2)V-\omega-n\omega']}$$

$$-\left\{\frac{1}{2}\xi_2^{n,2}-\frac{1}{4}\xi_2^{n+2,0}\right\}\varepsilon_1^{(n+2)\varsigma,1}\eta\eta'^4e^{i(\pi-\Gamma)+2i(\pi'-\Gamma')+i[(n-1)v-(n+2)V+\omega-n\omega']}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$-\frac{1}{4}\xi_2^{n-2,-2}\varepsilon_1^{(n-4)\varsigma,-1}\eta_{\prime}\eta_{\prime}'^{4}e^{-i(\pi-\Gamma')-4i(\pi'-\Gamma'')+i[(n+1)v-(n-4)V-\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{4}\xi_2^{n-2,2}\varepsilon_1^{(n-4)\varsigma,1}\eta_{\prime}\eta_{\prime}'^{4}e^{i(\pi-\Gamma')-4i(\pi'-\Gamma'')+i[(n-1)v-(n-4)V+\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{4}\xi_2^{n+2,2}\varepsilon_1^{(n+4)\varsigma,-1}\eta\eta_{\prime}'^{4}e^{-i(\pi-\Gamma')+4i(\pi'-\Gamma'')+i[(n+1)v-(n+4)V-\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{4}\xi_2^{n+2,2}\varepsilon_1^{(n+4)\varsigma,1}\eta_{\prime}\eta'^{4}e^{i(\pi-\Gamma')+4i(\pi'-\Gamma'')+i[(n-1)v-(n+4)V+\omega-n\omega']}$$

$$-\left\{\frac{1}{2}\xi_3^{n,-1}+\frac{1}{4}\xi_3^{n-2,1}-\frac{1}{4}\xi_3^{n+2,-3}\right\}\eta'^{5}e^{-i(\pi'-\Gamma'')+i[nv-(n-1)V-n\omega']}$$

$$-\left\{\frac{1}{2}\xi_3^{n,1}+\frac{1}{4}\xi_3^{n+2,-1}-\frac{1}{4}\xi_3^{n-2,3}\right\}\eta'^{5}e^{i(\pi'-\Gamma'')+i[nv-(n+1)V-n\omega']}$$

$$+\left\{\frac{1}{2}\xi_3^{n,-3}-\frac{1}{4}\xi_3^{n-2,-1}\right\}\eta'^{5}e^{-3i(\pi'-\Gamma'')+i[nv-(n-3)V-n\omega']}$$

$$+\left\{\frac{1}{2}\xi_3^{n,3}-\frac{1}{4}\xi_3^{n+2,1}\right\}\eta_{\prime}'^{5}e^{3i(\pi'-\Gamma'')+i[nv-(n+3)V-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{4}\xi_3^{n-2,-3}\eta_{\prime}'^{5}e^{-5i(\pi'-\Gamma'')+i[nv-(n-5)V-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{4}\xi_3^{n+2,3}\eta'^{5}e^{5i(\pi'-\Gamma'')+i[nv-(n+5)V-n\omega']},$$

(14, 3,0,5) $$\rho^3 e^{in(v-v')} = \left\{\frac{1}{8}\varepsilon_2^{n\varsigma,2}+\frac{3}{8}\varepsilon_2^{n\varsigma,-2}-\frac{3}{8}\varepsilon_2^{n\varsigma,0}\right\}\eta_{\prime}^{5}e^{-i(\pi-\Gamma')+i[(n+1)v-nV-\omega-n\omega']}$$

$$+\left\{\frac{1}{8}\varepsilon_2^{n\varsigma,-2}+\frac{3}{8}\varepsilon_2^{n\varsigma,2}-\frac{3}{8}\varepsilon_2^{n\varsigma,0}\right\}\eta^{5}e^{i(\pi-\Gamma')+i[(n-1)v-nV+\omega-n\omega']}$$

$$+\left\{\frac{3}{8}\varepsilon_2^{n\varsigma,-2}-\frac{1}{8}\varepsilon_2^{n\varsigma,0}\right\}\eta^{5}e^{-3i(\pi-\Gamma')+i[(n+3)v-nV-3\omega-n\omega']}$$

$$+\left\{\frac{3}{8}\varepsilon_2^{n\varsigma,2}-\frac{1}{8}\varepsilon_2^{n\varsigma,0}\right\}\eta_{\prime}^{5}e^{3i(\pi-\Gamma')+i[(n-3)v-nV+3\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{8}\varepsilon_2^{n\varsigma,-2}\eta^{5}e^{-5i(\pi-\Gamma')+i[(n+5)v-nV-5\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{8}\varepsilon_2^{n\varsigma,2}\eta_{\prime}^{5}e^{5i(\pi-\Gamma')+i[(n-5)v-nV+5\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{3}{8}\xi_1^{n,-1}\left\{\varepsilon_1^{(n-1)\varsigma,1}+\varepsilon_1^{(n-1)\varsigma,-1}\right\}\eta_{\prime}^{4}\eta' e^{-i(\pi'-\Gamma'')+i[nv-(n-1)V-n\omega']}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$-\frac{3}{8}\xi_1^{n,1}\left\{\varepsilon_1^{(n+1)\varphi,1}+\varepsilon_1^{(n+1)\varphi,-1}\right\}\eta^4\eta' e^{i(\pi-\Gamma')+i[nv-(n+1)V-n\omega]}$$

$$-\xi_1^{n,-1}\left\{\frac{1}{8}\varepsilon_1^{(n-1)\varphi,1}+\frac{3}{8}\varepsilon_1^{(n-1)\varphi,-1}\right\}\eta^4\eta' e^{-2i(\pi-\Gamma)-i(\pi-\Gamma')+i[(n+2)v-(n-1)V-2\omega-n\omega']}$$

$$-\xi_1^{n,-1}\left\{\frac{1}{8}\varepsilon_1^{(n-1)\varphi,-1}+\frac{3}{8}\varepsilon_1^{(n-1)\varphi,1}\right\}\eta^4\eta' e^{2i(\pi-\Gamma)-i(\pi-\Gamma')+i[(n-2)v-(n-1)V+2\omega-n\omega]}$$

$$-\xi_1^{n,1}\left\{\frac{1}{8}\varepsilon_1^{(n+1)\varphi,1}+\frac{3}{8}\varepsilon_1^{(n+1)\varphi,-1}\right\}\eta^4\eta' e^{-2i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')+i[(n+2)v-(n+1)V-2\omega-n\omega]}$$

$$-\xi_1^{n,1}\left\{\frac{1}{8}\varepsilon_1^{(n+1)\varphi,-1}+\frac{3}{8}\varepsilon_1^{(n+1)\varphi,1}\right\}\eta^4\eta' e^{2i(\pi-\Gamma)+i(\pi-\Gamma')+i[(n-2)v-(n+1)V+2\omega-n\omega]}$$

$$-\frac{1}{8}\xi_1^{n,-1}\varepsilon_1^{(n-1)\varphi,-1}\eta^4\eta' e^{-4i(\pi-\Gamma)-i(\pi-\Gamma')+i[(n+4)v-(n-1)V-4\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{8}\xi_1^{n,-1}\varepsilon_1^{(n-1)\varphi,1}\eta^4\eta' e^{4i(\pi-\Gamma)-i(\pi-\Gamma')+i[(n-4)v-(n-1)V+4\omega-n\omega]}$$

$$-\frac{1}{8}\xi_1^{n,1}\varepsilon_1^{(n+1)\varphi,-1}\eta^4\eta' e^{-4i(\pi-\Gamma)+i(\pi-\Gamma')+i[(n+4)v-(n+1)V-4\omega-n\omega]}$$

$$-\frac{1}{8}\xi_1^{n,1}\varepsilon_1^{(n+1)\varphi,1}\eta^4\eta' e^{4i(\pi-\Gamma)+i(\pi-\Gamma')+i[(n-4)v-(n+1)V+4\omega-n\omega]}$$

$$-\frac{3}{8}\xi_2^{n,0}\eta^3\eta'^2 e^{-i(\pi-\Gamma)+i[(n+1)v-nV-\omega-n\omega]}$$

$$-\frac{3}{8}\xi_2^{n,0}\eta^3\eta'^2 e^{i(\pi-\Gamma)+i[(n-1)v-nV+\omega-n\omega]}$$

$$+\frac{3}{8}\xi_2^{n,-2}\eta^3\eta'^2 e^{-i(\pi-\Gamma)-2i(\pi-\Gamma')+i[(n+1)v-(n-2)V-\omega-n\omega]}$$

$$+\frac{3}{8}\xi_2^{n,-2}\eta^3\eta'^2 e^{i(\pi-\Gamma)-2i(\pi-\Gamma')+i[(n-1)v-(n-2)V+\omega-n\omega]}$$

$$+\frac{3}{8}\xi_2^{n,2}\eta^3\eta'^2 e^{-i(\pi-\Gamma)+2i(\pi-\Gamma')+i[(n+1)v-(n+2)V-\omega-n\omega]}$$

$$+\frac{3}{8}\xi_2^{n,2}\eta^3\eta'^2 e^{i(\pi-\Gamma)+2i(\pi-\Gamma')+i[(n-1)v-(n+2)V+\omega-n\omega]}$$

$$-\frac{1}{8}\xi_2^{n,0}\eta^3\eta'^2 e^{-3i(\pi-\Gamma)+i[(n+3)v-nV-3\omega-n\omega]}$$

$$-\frac{1}{8}\xi_2^{n,0}\eta^3\eta'^2 e^{3i(\pi-\Gamma)+i[(n-3)v-nV+3\omega-n\omega]}$$

Cette formule se continue à la page suivante

$$+\frac{1}{8}\xi_2^{n,-2}\eta^3\eta'^2 e^{-3i(\pi-\Gamma')-2i(\pi'-\Gamma'')+i[(n+3)v-(n-2)V-3\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{8}\xi_2^{n,-2}\eta^3\eta'^2 e^{3i(\pi-\Gamma')-2i(\pi'-\Gamma'')+i[(n-3)v-(n-2)V+3\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{8}\xi_2^{n,2}\eta^3\eta'^2 e^{-3i(\pi-\Gamma')+2i(\pi'-\Gamma'')+i[(n+3)v-(n+2)V-3\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{8}\xi_2^{n,2}\eta^3\eta'^2 e^{3i(\pi-\Gamma')+2i(\pi'-\Gamma'')+i[(n-3)v-(n+2)V+3\omega-n\omega']},$$

$$(14,2,1,5)\quad \rho^2\rho' e^{in(v-V)} = \left\{\frac{1}{8}\varepsilon_2^{(n-1)\varphi,2}+\frac{1}{8}\varepsilon_2^{(n-1)\varphi,-2}-\frac{1}{4}\varepsilon_2^{(n-1)\varphi,0}\right\}\eta^4\eta' e^{-i(\pi'-\Gamma'')+i[nv-(n-1)V-n\omega']}$$

$$+\left\{\frac{1}{8}\varepsilon_2^{(n+1)\varphi,2}+\frac{1}{8}\varepsilon_2^{(n+1)\varphi,-2}-\frac{1}{4}\varepsilon_2^{(n+1)\varphi,0}\right\}\eta^4\eta' e^{i(\pi'-\Gamma'')+i[nv-(n+1)V-n\omega']}$$

$$+\left\{\frac{1}{4}\varepsilon_2^{(n-1)\varphi,-2}-\frac{1}{8}\varepsilon_2^{(n-1)\varphi,0}\right\}\eta^4\eta' e^{-2i(\pi-\Gamma')-i(\pi'-\Gamma'')+i[(n+2)v-(n-1)V-2\omega-n\omega']}$$

$$+\left\{\frac{1}{4}\varepsilon_2^{(n-1)\varphi,2}-\frac{1}{8}\varepsilon_2^{(n-1)\varphi,0}\right\}\eta^4\eta' e^{2i(\pi-\Gamma')-i(\pi'-\Gamma'')+i[(n-2)v-(n-1)V+2\omega-n\omega']}$$

$$+\left\{\frac{1}{4}\varepsilon_2^{(n+1)\varphi,-2}-\frac{1}{8}\varepsilon_2^{(n+1)\varphi,0}\right\}\eta^4\eta' e^{-2i(\pi-\Gamma')+i(\pi'-\Gamma'')+i[(n+2)v-(n+1)V-2\omega-n\omega']}$$

$$+\left\{\frac{1}{4}\varepsilon_2^{(n+1)\varphi,2}-\frac{1}{8}\varepsilon_2^{(n+1)\varphi,0}\right\}\eta^4\eta' e^{2i(\pi-\Gamma')+i(\pi'-\Gamma'')+i[(n-2)v-(n+1)V+2\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{8}\varepsilon_2^{(n-1)\varphi,-2}\eta^4\eta' e^{-4i(\pi-\Gamma')-i(\pi'-\Gamma'')+i[(n+4)v-(n-1)V-4\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{8}\varepsilon_2^{(n-1)\varphi,2}\eta^4\eta' e^{4i(\pi-\Gamma')-i(\pi'-\Gamma'')+i[(n-4)v-(n-1)V+4\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{8}\varepsilon_2^{(n+1)\varphi,-2}\eta^4\eta' e^{-4i(\pi-\Gamma')+i(\pi'-\Gamma'')+i[(n+4)v-(n+1)V-4\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{8}\varepsilon_2^{(n+1)\varphi,2}\eta^4\eta' e^{4i(\pi-\Gamma')+i(\pi'-\Gamma'')+i[(n-4)v-(n+1)V+4\omega-n\omega']}$$

$$-\left\{\xi_1^{n+1,-1}+\xi_1^{n-1,1}\right\}\left\{\frac{1}{8}\varepsilon_1^{n\varphi,1}+\frac{1}{4}\varepsilon_1^{n\varphi,-1}\right\}\eta^3\eta'^2 e^{-i(\pi-\Gamma')+i[(n+1)v-nV-\omega-n\omega']}$$

$$-\left\{\xi_1^{n+1,-1}+\xi_1^{n-1,1}\right\}\left\{\frac{1}{8}\varepsilon_1^{n\varphi,-1}+\frac{1}{4}\varepsilon_1^{n\varphi,1}\right\}\eta^3\eta'^2 e^{i(\pi-\Gamma')+i[(n-1)v-nV+\omega-n\omega']}$$

$$-\xi_1^{n-1,-1}\left\{\frac{1}{8}\varepsilon_1^{(n-2)\varphi,1}+\frac{1}{4}\varepsilon_1^{(n-2)\varphi,-1}\right\}\eta^3\eta'^2 e^{-i(\pi-\Gamma')-2i(\pi'-\Gamma'')+i[(n+1)v-(n-2)V-\omega-n\omega']}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$-\xi_1^{n-1,-1}\left\{\frac{1}{8}\varepsilon_1^{(n-2)\varphi,-1}+\frac{1}{4}\varepsilon_1^{(n-2)\varphi,1}\right\}\eta^3\eta'^2 e^{i(\pi-\Gamma)-2i(\pi'-\Gamma')+i[(n-1)v-(n-2)V+\omega-n\omega']}$$

$$-\xi_1^{n+1,1}\left\{\frac{1}{8}\varepsilon_1^{(n+2)\varphi,1}+\frac{1}{4}\varepsilon_1^{(n+2)\varphi,-1}\right\}\eta^3\eta_{/}'^2 e^{-i(\pi-\Gamma)+2i(\pi'-\Gamma')+i[(n+1)v-(n+2)V-\omega-n\omega']}$$

$$-\xi_1^{n+1,1}\left\{\frac{1}{8}\varepsilon_1^{(n+2)\varphi,-1}+\frac{1}{4}\varepsilon_1^{(n+2)\varphi,1}\right\}\eta^3\eta'^2 e^{i(\pi-\Gamma)+2i(\pi'-\Gamma')+i[(n-1)v-(n+2)V+\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{8}\left\{\xi_1^{n+1,-1}+\xi_1^{n-1,1}\right\}\varepsilon_1^{n\varphi,-1}\eta_{/}^3\eta_{/}'^2 e^{-3i(\pi-\Gamma)+i[(n+3)v-nV-3\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{8}\left\{\xi_1^{n+1,-1}+\xi_1^{n-1,1}\right\}\varepsilon_1^{n\varphi,1}\eta^3\eta_{/}'^2 e^{3i(\pi-\Gamma)+i[(n-3)v-nV+3\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{8}\xi_1^{n-1,-1}\varepsilon_1^{(n-2)\varphi,-1}\eta_{/}^3\eta_{/}'^2 e^{-3i(\pi-\Gamma)-2i(\pi'-\Gamma')+i[(n+3)v-(n-2)V-3\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{8}\xi_1^{n-1,-1}\varepsilon_1^{(n-2)\varphi,1}\eta_{/}^3\eta_{/}'^2 e^{3i(\pi-\Gamma)-2i(\pi'-\Gamma')+i[(n-3)v-(n-2)V+3\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{8}\xi_1^{n+1,1}\varepsilon_1^{(n+2)\varphi,-1}\eta_{/}^3\eta'^2 e^{-3i(\pi-\Gamma)+2i(\pi'-\Gamma')+i[(n+3)v-(n+2)V-3\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{8}\xi_1^{n+1,1}\varepsilon_1^{(n+2)\varphi,1}\eta^3\eta'^2 e^{3i(\pi-\Gamma)+2i(\pi'-\Gamma')+i[(n-3)v-(n+2)V+3\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{4}\left\{\xi_2^{n+1,-2}-\xi_2^{n-1,0}\right\}\eta^2\eta_{/}'^3 e^{-i(\pi'-\Gamma')+i[nv-(n-1)V-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{4}\left\{\xi_2^{n-1,2}-\xi_2^{n+1,0}\right\}\eta^2\eta'^3 e^{i(\pi'-\Gamma')+i[nv-(n+1)V-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{4}\xi_2^{n-1,-2}\eta^2\eta_{/}'^3 e^{-3i(\pi'-\Gamma')+i[nv-(n-3)V-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{4}\xi_2^{n+1,2}\eta_{/}^2\eta_{/}'^3 e^{3i(\pi'-\Gamma')+i[nv-(n+3)V-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{8}\left\{\xi_2^{n+1,-2}-\xi_2^{n-1,0}\right\}\eta_{/}^2\eta_{/}'^3 e^{-2i(\pi-\Gamma)-i(\pi'-\Gamma')+i[(n+2)v-(n-1)V-2\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{8}\left\{\xi_2^{n+1,-2}-\xi_2^{n-1,0}\right\}\eta_{/}^2\eta_{/}'^3 e^{2i(\pi-\Gamma)-i(\pi'-\Gamma')+i[(n-2)v-(n-1)V+2\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{8}\left\{\xi_2^{n-1,2}-\xi_2^{n+1,0}\right\}\eta_{/}^2\eta_{/}'^3 e^{-2i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')+i[(n+2)v-(n+1)V-2\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{8}\left\{\xi_2^{n-1,2}-\xi_2^{n+1,0}\right\}\eta_{/}^2\eta_{/}'^3 e^{2i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')+i[(n-2)v-(n+1)V+2\omega-n\omega']}$$

Cette formule se continue à la page suivante

$$+\frac{1}{8}\xi_2^{n-1,-2}\eta^2\eta'^3e^{-2i(\pi-\Gamma')-3i(\pi'-\Gamma')+i[(n+2)v-(n-3)V-2\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{8}\xi_2^{n-1,-2}\eta^2\eta'^3e^{2i(\pi-\Gamma')-3i(\pi'-\Gamma')+i[(n-2)v-(n-3)V+2\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{8}\xi_2^{n+1,2}\eta^2\eta'^3e^{-2i(\pi-\Gamma')+3i(\pi'-\Gamma'')+i[(n+2)v-(n+3)V-2\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{8}\xi_2^{n+1,2}\eta^2\eta'^3e^{2i(\pi-\Gamma')+3i(\pi'-\Gamma')+i[(n-2)v-(n+3)V+2\omega-n\omega]},$$

$$(14,1,2,5)\quad \rho\rho'^2e^{in(v-v')}=\frac{1}{4}\left\{\varepsilon_2^{n\varphi,-2}-\varepsilon_2^{n\varphi,0}\right\}\eta^3\eta'^2e^{-i(\pi-\Gamma')+i[(n+1)v-nV-\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{4}\left\{\varepsilon_2^{n\varphi,2}-\varepsilon_2^{n\varphi,0}\right\}\eta^3\eta'^2e^{i(\pi-\Gamma')+i[(n-1)v-nV+\omega-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{8}\left\{\varepsilon_2^{(n-2)\varphi,-2}-\varepsilon_2^{(n-2)\varphi,0}\right\}\eta^3\eta'^2e^{-i(\pi-\Gamma')-2i(\pi'-\Gamma'')+i[(n+1)v-(n-2)V-\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{8}\left\{\varepsilon_2^{(n-2)\varphi,2}-\varepsilon_2^{(n-2)\varphi,0}\right\}\eta^3\eta'^2e^{i(\pi-\Gamma')-2i(\pi'-\Gamma')+i[(n-1)v-(n-2)V+\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{8}\left\{\varepsilon_2^{(n+2)\varphi,-2}-\varepsilon_2^{(n+2)\varphi,0}\right\}\eta^3\eta'^2e^{-i(\pi-\Gamma')+2i(\pi-\Gamma')+i[(n+1)v-(n+2)V-\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{8}\left\{\varepsilon_2^{(n+2)\varphi,2}-\varepsilon_2^{(n+2)\varphi,0}\right\}\eta^3\eta'^2e^{i(\pi-\Gamma')+2i(\pi'-\Gamma')+i[(n-1)v-(n+2)V+\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{4}\varepsilon_2^{n\varphi,-2}\eta^3\eta'^2e^{-3i(\pi-\Gamma')+i[(n+3)v-nV-3\omega-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{4}\varepsilon_2^{n\varphi,2}\eta^3\eta'^2e^{3i(\pi-\Gamma')+i[(n-3)v-nV+3\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{8}\varepsilon_2^{(n-2)\varphi,-2}\eta^3\eta'^2e^{-3i(\pi-\Gamma')-2i(\pi-\Gamma')+i[(n+3)v-(n-2)V-3\omega-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{8}\varepsilon_2^{(n-2)\varphi,2}\eta^3\eta'^2e^{3i(\pi-\Gamma')-2i(\pi'-\Gamma'')+i[(n-3)v-(n-2)V+3\omega-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{8}\varepsilon_2^{(n+2)\varphi,-2}\eta^3\eta'^2e^{-3i(\pi-\Gamma')+2i(\pi'-\Gamma')+i[(n+3)v-(n+2)V-3\omega-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{8}\varepsilon_2^{(n+2)\varphi,2}\eta^3\eta'^2e^{3i(\pi-\Gamma')+2i(\pi'-\Gamma')+i[(n-3)v-(n+2)V+3\omega-n\omega']}$$

$$-\left\{\frac{1}{8}\xi_1^{n-2,1}+\frac{1}{4}\xi_1^{n,-1}\right\}\left\{\varepsilon_1^{(n-1)\varphi,1}+\varepsilon_1^{(n-1)\varphi,-1}\right\}\eta^2\eta'^3e^{-i(\pi'-\Gamma'')+i[nv-(n-1)V-n\omega']}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$-\left\{\frac{1}{8}\xi_1^{n+2,-1}+\frac{1}{4}\xi_1^{n,1}\right\}\left\{\varepsilon_1^{(n+1)\varphi,1}+\varepsilon_1^{(n+1)\varphi,-1}\right\}\eta^2\eta'^3e^{i(\pi'-\Gamma')+i[nv-(n+1)V-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{8}\xi_1^{n-2,-1}\left\{\varepsilon_1^{(n-3)\varphi,1}+\varepsilon_1^{(n-3)\varphi,-1}\right\}\eta^2\eta'^3e^{-3i(\pi'-\Gamma'')+i[nv-(n-3)V-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{8}\xi_1^{n+2,1}\left\{\varepsilon_1^{(n+3)\varphi,1}+\varepsilon_1^{(n+3)\varphi,-1}\right\}\eta^2\eta'^3e^{3i(\pi'-\Gamma'')+i[nv-(n+3)V-n\omega']}$$

$$-\left\{\frac{1}{8}\xi_1^{n-2,1}+\frac{1}{4}\xi_1^{n,-1}\right\}\varepsilon_1^{(n-1)\varphi,-1}\eta^2\eta'^3e^{-2i(\pi-\Gamma')-i(\pi'-\Gamma')+i[(n+2)v-(n-1)V-2\omega-n\omega']}$$

$$-\left\{\frac{1}{8}\xi_1^{n-2,1}+\frac{1}{4}\xi_1^{n,-1}\right\}\varepsilon_1^{(n-1)\varphi,1}\eta^2\eta'^3e^{2i(\pi-\Gamma')-i(\pi'-\Gamma')+i[(n-2)v-(n-1)V+2\omega-n\omega']}$$

$$-\left\{\frac{1}{8}\xi_1^{n+2,-1}+\frac{1}{4}\xi_1^{n,1}\right\}\varepsilon_1^{(n+1)\varphi,-1}\eta^2\eta'^3e^{-2i(\pi-\Gamma')+i(\pi'-\Gamma'')+i[(n+2)v-(n+1)V-2\omega-n\omega']}$$

$$-\left\{\frac{1}{8}\xi_1^{n+2,-1}+\frac{1}{4}\xi^{n,1}\right\}\varepsilon_1^{(n+1)\varphi,1}\eta^2\eta'^3e^{2i(\pi-\Gamma')+i(\pi-\Gamma')+i[(n-2)v-(n+1)V+2\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{8}\xi_1^{n-2,-1}\varepsilon_1^{(n-3)\varphi,-1}\eta^2\eta'^3e^{-2i(\pi-\Gamma')-3i(\pi'-\Gamma'')+i[(n+2)v-(n-3)V-2\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{8}\xi_1^{n-2,-1}\varepsilon_1^{(n-3)\varphi,1}\eta^2\eta'^3e^{2i(\pi-\Gamma')-3i(\pi'-\Gamma'')+i[(n-2)v-(n-3)V+2\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{8}\xi_1^{n+2,1}\varepsilon_1^{(n+3)\varphi,-1}\eta^2\eta'^3e^{-2i(\pi-\Gamma')+3i(\pi'-\Gamma'')+i[(n+2)v-(n+3)V-2\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{8}\xi_1^{n+2,1}\varepsilon_1^{(n+3)\varphi,1}\eta^2\eta'^3e^{2i(\pi-\Gamma')+3i(\pi'-\Gamma'')+i[(n-2)v-(n+3)V+2\omega-n\omega']}$$

$$+\left\{\frac{1}{8}\xi_2^{n-2,2}+\frac{1}{8}\xi_2^{n+2,-2}-\frac{1}{4}\xi_2^{n,0}\right\}\eta\eta'^4e^{-i(\pi-\Gamma')+i[(n+1)v-nV-\omega-n\omega']}$$

$$+\left\{\frac{1}{8}\xi_2^{n-2,2}+\frac{1}{8}\xi_2^{n+2,-2}-\frac{1}{4}\xi_2^{n,0}\right\}\eta\eta'^4e^{i(\pi-\Gamma')+i[(n-1)v-nV+\omega-n\omega']}$$

$$+\left\{\frac{1}{4}\xi_2^{n,-2}-\frac{1}{8}\xi_2^{n-2,0}\right\}\eta\eta'^4e^{-i(\pi-\Gamma')-2i(\pi'-\Gamma'')+i[(n+1)v-(n-2)V-\omega-n\omega']}$$

$$+\left\{\frac{1}{4}\xi_2^{n,-2}-\frac{1}{8}\xi_2^{n-2,0}\right\}\eta\eta'^4e^{i(\pi-\Gamma')-2i(\pi'-\Gamma'')+i[(n-1)v-(n-2)V+\omega-n\omega']}$$

$$+\left\{\frac{1}{4}\xi_2^{n,2}-\frac{1}{8}\xi_2^{n+2,0}\right\}\eta\eta'^4e^{-i(\pi-\Gamma')+2i(\pi'-\Gamma'')+i[(n+1)v-(n+2)V-\omega-n\omega']}$$

$$+\left\{\frac{1}{4}\xi_2^{n,2}-\frac{1}{8}\xi_2^{n+2,0}\right\}\eta\eta'^4e^{i(\pi-\Gamma')+2i(\pi'-\Gamma'')+i[(n-1)v-(n+2)V+\omega-n\omega']}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$+\frac{1}{8}\xi_2^{n-2,-2}\eta\eta'^4 e^{-i(\pi-\Gamma)-4i(\pi-\Gamma')+i[(n+1)v-(n-4)V-\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{8}\xi_2^{n-2,2}\eta\eta'^4 e^{i(\pi-\Gamma)-4i(\pi-\Gamma')+i[(n-1)v-(n-4)V+\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{8}\xi_2^{n+2,2}\eta\eta'^4 e^{-i(\pi-\Gamma)+4i(\pi'-\Gamma')+i[(n+1)v-(n+4)V-\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{8}\xi_2^{n+2,2}\eta\eta'^4 e^{i(\pi-\Gamma)+4i(\pi'-\Gamma'')+i[(n-1)v-(n+4)V+\omega-n\omega']},$$

$$(14,0,3,5)\quad \rho'^3 e^{in(v-v')} = -\frac{3}{8}\varepsilon_2^{(n-1)\varphi,0}\eta^2\eta'^3 e^{-i(\pi'-\Gamma')+i[nv-(n-1)V-n\omega']}$$

$$-\frac{3}{8}\varepsilon_2^{(n+1)\varphi,0}\eta^2\eta'^3 e^{i(\pi'-\Gamma'')+i[nv-(n+1)V-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{8}\varepsilon_2^{(n-3)\varphi,0}\eta^2\eta'^3 e^{-3i(\pi-\Gamma')+i[nv-(n-3)V-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{8}\varepsilon_2^{(n+3)\varphi,0}\eta^2\eta'^3 e^{3i(\pi'-\Gamma'')+i[nv-(n+3)V-n\omega']}$$

$$+\frac{3}{8}\varepsilon_2^{(n-1)\varphi,-2}\eta^2\eta'^3 e^{-2i(\pi-\Gamma)-i(\pi'-\Gamma')+i[(n+2)v-(n-1)V-2\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{3}{8}\varepsilon_2^{(n-1)\varphi,2}\eta^2\eta'^3 e^{2i(\pi-\Gamma)-i(\pi'-\Gamma')+i[(n-2)v-(n-1)V+2\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{3}{8}\varepsilon_2^{(n+1)\varphi,-2}\eta^2\eta'^3 e^{-2i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma'')+i[(n+2)v-(n+1)V-2\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{3}{8}\varepsilon_2^{(n+1)\varphi,2}\eta^2\eta'^3 e^{2i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')+i[(n-2)v-(n+1)V+2\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{8}\varepsilon_2^{(n-3)\varphi,-2}\eta^2\eta'^3 e^{-2i(\pi-\Gamma)-3i(\pi-\Gamma')+i[(n+2)v-(n-3)V-2\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{8}\varepsilon_2^{(n-3)\varphi,2}\eta^2\eta'^3 e^{2i(\pi-\Gamma)-3i(\pi'-\Gamma')+i[(n-2)v-(n-3)V+2\omega-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{8}\varepsilon_2^{(n+3)\varphi,-2}\eta^2\eta'^3 e^{-2i(\pi-\Gamma)+3i(\pi'-\Gamma'')+i[(n+2)v-(n+3)V-2\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{8}\varepsilon_2^{(n+3)\varphi,2}\eta^2\eta'^3 e^{2i(\pi-\Gamma)+3i(\pi'-\Gamma'')+i[(n-2)v-(n+3)V+2\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{3}{8}\left\{\xi_1^{n+1,-1}+\xi_1^{n-1,1}\right\}\varepsilon_1^{n\varphi,1}\eta\eta'^4 e^{-i(\pi-\Gamma)+i[(n+1)v-nV-\omega-n\omega']}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$-\frac{3}{8}\left\{\xi_1^{n+1,-1}+\xi_1^{n-1,1}\right\}\varepsilon_1^{n\varsigma,1}\eta_{,}\eta'^4 e^{i(\pi-\Gamma)+i[(n-1)v-nV+\omega-n\omega']}$$

$$-\left\{\frac{1}{8}\xi_1^{n-3,1}+\frac{3}{8}\xi_1^{n-1,-1}\right\}\varepsilon_1^{(n-2)\varsigma,-1}\eta\eta'^4 e^{-i(\pi-\Gamma)-2i(\pi'-\Gamma')+i[(n+1)v-(n-2)V-\omega-n\omega']}$$

$$-\left\{\frac{1}{8}\xi_1^{n-3,1}+\frac{3}{8}\xi_1^{n-1,-1}\right\}\varepsilon_1^{(n-2)\varsigma,1}\eta\eta'^4 e^{i(\pi-\Gamma)-2i(\pi'-\Gamma')+i[(n-1)v-(n-2)V+\omega-n\omega']}$$

$$-\left\{\frac{1}{8}\xi_1^{n+3,-1}+\frac{3}{8}\xi_1^{n+1,1}\right\}\varepsilon_1^{(n+2)\varsigma,-1}\eta\eta'^4 e^{-i(\pi-\Gamma)+2i(\pi'-\Gamma')+i[(n+1)v-(n+2)V-\omega-n\omega']}$$

$$-\left\{\frac{1}{8}\xi_1^{n+3,-1}+\frac{3}{8}\xi_1^{n+1,1}\right\}\varepsilon_1^{(n+2)\varsigma,1}\eta_{,}\eta'^4 e^{i(\pi-\Gamma)+2i(\pi'-\Gamma')+i[(n-1)v-(n+2)V+\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{8}\xi_1^{n-3,-1}\varepsilon_1^{(n-4)\varsigma,-1}\eta\eta'^4 e^{-i(\pi-\Gamma)-4i(\pi'-\Gamma')+i[(n+1)v-(n-4)V-\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{8}\xi_1^{n-3,-1}\varepsilon_1^{(n-4)\varsigma,1}\eta_{,}\eta'^4 e^{i(\pi-\Gamma)-4i(\pi'-\Gamma')+i[(n-1)v-(n-4)V+\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{8}\xi_1^{n+3,1}\varepsilon_1^{(n+4)\varsigma,-1}\eta\eta'^4 e^{-i(\pi-\Gamma)+4i(\pi'-\Gamma')+i[(n+1)v-(n+4)V-\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{8}\xi_1^{n+3,1}\varepsilon_1^{(n+4)\varsigma,1}\eta_{,}\eta'^4 e^{i(\pi-\Gamma)+4i(\pi'-\Gamma')+i[(n-1)v-(n+4)V+\omega-n\omega']}$$

$$+\left\{\frac{1}{8}\xi_2^{n-3,2}-\frac{3}{8}\xi_2^{n-1,0}+\frac{3}{8}\xi_2^{n+1,-2}\right\}\eta'^5 e^{-i(\pi'-\Gamma')+i[nv-(n-1)V-n\omega']}$$

$$+\left\{\frac{1}{8}\xi_2^{n+3,-2}-\frac{3}{8}\xi_2^{n+1,0}+\frac{3}{8}\xi_2^{n-1,2}\right\}\eta_{,}'^5 e^{i(\pi'-\Gamma')+i[nv-(n+1)V-n\omega']}$$

$$+\left\{\frac{3}{8}\xi_2^{n-1,-2}-\frac{1}{8}\xi_2^{n-3,0}\right\}\eta'^5 e^{-3i(\pi'-\Gamma')+i[nv-(n-3)V-n\omega']}$$

$$+\left\{\frac{3}{8}\xi_2^{n+1,2}-\frac{1}{8}\xi_2^{n+3,0}\right\}\eta'^5 e^{3i(\pi'-\Gamma')+i[nv-(n+3)V-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{8}\xi_2^{n-3,-2}\eta_{,}'^5 e^{-5i(\pi'-\Gamma')+i[nv-(n-5)V-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{8}\xi_2^{n+3,2}\eta'^5 e^{5i(\pi'-\Gamma')+i[nv-(n+5)V-n\omega']},$$

$$(14,4,0,5)\quad \rho^4 e^{in(v-v')} = -\left\{\frac{1}{4}\varepsilon_1^{n\varphi,1} + \frac{3}{8}\varepsilon_1^{n\varphi,-1}\right\}\eta^5 e^{-i(\pi-\Gamma)+i[(n+1)v-nV-\omega-n\omega']}$$

$$-\left\{\frac{1}{4}\varepsilon_1^{n\varphi,-1} + \frac{3}{8}\varepsilon_1^{n\varphi,1}\right\}\eta^5 e^{i(\pi-\Gamma)+i[(n-1)v-nV+\omega-n\omega']}$$

$$-\left\{\frac{1}{16}\varepsilon_1^{n\varphi,1} + \frac{1}{4}\varepsilon_1^{n\varphi,-1}\right\}\eta^5 e^{-3i(\pi-\Gamma)+i[(n+3)v-nV-3\omega-n\omega']}$$

$$-\left\{\frac{1}{16}\varepsilon_1^{n\varphi,-1} + \frac{1}{4}\varepsilon_1^{n\varphi,1}\right\}\eta^5 e^{3i(\pi-\Gamma)+i[(n-3)v-nV+3\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{16}\varepsilon_1^{n\varphi,-1}\eta^5 e^{-5i(\pi-\Gamma)+i[(n+5)v-nV-5\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{16}\varepsilon_1^{n\varphi,1}\eta^5 e^{5i(\pi-\Gamma)+i[(n-5)v-nV+5\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{3}{8}\xi_1^{n,-1}\eta^4\eta' e^{-i(\pi'-\Gamma')+i[nv-(n-1)V-n\omega']}$$

$$+\frac{3}{8}\xi_1^{n,1}\eta^4\eta' e^{i(\pi'-\Gamma')-i[nv-(n+1)V-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{4}\xi_1^{n,-1}\eta^4\eta' e^{-2i(\pi-\Gamma)-i(\pi'-\Gamma')+i[(n+2)v-(n-1)V-2\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{4}\xi_1^{n,-1}\eta^4\eta' e^{2i(\pi-\Gamma)-i(\pi'-\Gamma')+i[(n-2)v-(n-1)V+2\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{4}\xi_1^{n,1}\eta^4\eta' e^{-2i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')+i[(n+2)v-(n+1)V-2\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{4}\xi_1^{n,1}\eta^4\eta' e^{2i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')+i[(n-2)v-(n+1)V+2\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{16}\xi_1^{n,-1}\eta^4\eta' e^{-4i(\pi-\Gamma)-i(\pi'-\Gamma')+i[(n+4)v-(n-1)V-4\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{16}\xi_1^{n,-1}\eta^4\eta' e^{4i(\pi-\Gamma)-i(\pi'-\Gamma')+i[(n-4)v-(n-1)V+4\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{16}\xi_1^{n,1}\eta^4\eta' e^{-4i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')+i[(n+4)v-(n+1)V-4\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{16}\xi_1^{n,1}\eta^4\eta' e^{4i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')+i[(n-4)v-(n+1)V+4\omega-n\omega']},$$

$$(14,3,1,5)\;\rho^3\rho' e^{in(v-v')} = -\frac{3}{16}\left\{\Xi_1^{(n-1)\varsigma,1} + \Xi_1^{(n-1)\varsigma,-1}\right\}\eta^4\eta' e^{-i(\pi'-\Gamma')+i[nv-(n-1)V-n\omega']}$$

$$-\frac{3}{16}\left\{\Xi_1^{(n+1)\varsigma,1} + \Xi_1^{(n+1)\varsigma,-1}\right\}\eta^4\eta' e^{i(\pi'-\Gamma')+i[nv-(n+1)V-n\omega']}$$

$$-\left\{\frac{1}{16}\Xi_1^{(n-1)\varsigma,1} + \frac{3}{16}\Xi_1^{(n-1)\varsigma,-1}\right\}\eta^4\eta' e^{-2i(\pi-\Gamma)-i(\pi'-\Gamma')+i[(n+2)v-(n-1)V-2\omega-n\omega']}$$

$$-\left\{\frac{1}{16}\Xi_1^{(n-1)\varsigma,-1} + \frac{3}{16}\Xi_1^{(n-1)\varsigma,1}\right\}\eta^4\eta' e^{2i(\pi-\Gamma)-i(\pi'-\Gamma')+i[(n-2)v-(n-1)V+2\omega-n\omega']}$$

$$-\left\{\frac{1}{16}\Xi_1^{(n+1)\varsigma,1} + \frac{3}{16}\Xi_1^{(n+1)\varsigma,-1}\right\}\eta^4\eta' e^{-2i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')+i[(n+2)v-(n+1)V-2\omega-n\omega']}$$

$$-\left\{\frac{1}{16}\Xi_1^{(n+1)\varsigma,-1} + \frac{3}{16}\Xi_1^{(n+1)\varsigma,1}\right\}\eta^4\eta' e^{2i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')+i[(n-2)v-(n+1)V+2\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{16}\Xi_1^{(n-1)\varsigma,-1}\eta^4\eta' e^{-4i(\pi-\Gamma)-i(\pi'-\Gamma')+i[(n+4)v-(n-1)V-4\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{16}\Xi_1^{(n-1)\varsigma,1}\eta^4\eta' e^{4i(\pi-\Gamma)-i(\pi'-\Gamma')+i[(n-4)v-(n-1)V+4\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{16}\Xi_1^{(n+1)\varsigma,-1}\eta^4\eta' e^{-4i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')+i[(n+4)v-(n+1)V-4\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{16}\Xi_1^{(n+1)\varsigma,1}\eta^4\eta' e^{4i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')+i[(n-4)v-(n+1)V+4\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{3}{16}\left\{\xi_1^{n-1,1} + \xi_1^{n+1,-1}\right\}\eta^3\eta'^2 e^{-i(\pi-\Gamma)+i[(n+1)v-nV-\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{3}{16}\left\{\xi_1^{n-1,1} + \xi_1^{n+1,-1}\right\}\eta^3\eta'^2 e^{i(\pi-\Gamma)+i[(n-1)v-nV+\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{3}{16}\xi_1^{n-1,-1}\eta^3\eta'^2 e^{-i(\pi-\Gamma)-2i(\pi'-\Gamma')+i[(n+1)v-(n-2)V-\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{3}{16}\xi_1^{n-1,-1}\eta^3\eta'^2 e^{i(\pi-\Gamma)-2i(\pi'-\Gamma')+i[(n-1)v-(n-2)V+\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{3}{16}\xi_1^{n+1,1}\eta^3\eta'^2 e^{-i(\pi-\Gamma)+2i(\pi'-\Gamma')+i[(n+1)v-(n+2)V-\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{3}{16}\xi_1^{n+1,1}\eta^3\eta'^2 e^{i(\pi-\Gamma)+2i(\pi'-\Gamma')+i[(n-1)v-(n+2)V+\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{16}\left\{\xi_1^{n-1,1} + \xi_1^{n+1,-1}\right\}\eta^3\eta'^2 e^{-3i(\pi-\Gamma)+i[(n+3)v-nV-3\omega-n\omega']}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$+\frac{1}{16}\left\{\xi_1^{n-1,1}+\xi_1^{n+1,-1}\right\}\eta^3\eta'^2e^{3i(\pi-\Gamma')+i[(n-3)v-nV+3\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{16}\xi_1^{n-1,-1}\eta^3\eta'^2e^{-3i(\pi-\Gamma')-2i(\pi'-\Gamma'')+i[(n+3)v-(n-2)V-3\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{16}\xi_1^{n-1,-1}\eta^3\eta'^2e^{3i(\pi-\Gamma')-2i(\pi'-\Gamma')+i[(n-3)v-(n-2)V+3\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{16}\xi_1^{n+1,1}\eta^3\eta'^2e^{-3i(\pi-\Gamma')+2i(\pi'-\Gamma'')+i[(n+3)v-(n+2)V-3\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{16}\xi_1^{n+1,1}\eta^3\eta'^2e^{3i(\pi-\Gamma')+2i(\pi'-\Gamma')+i[(n-3)v-(n+2)V+3\omega-n\omega']},$$

$$(14,2,2,5)\quad \rho^2\rho'^2e^{in(v-v')}=-\left\{\frac{1}{8}\varepsilon_1^{n\varphi,1}+\frac{1}{4}\varepsilon_1^{n\varphi,-1}\right\}\eta^3\eta'^2e^{-i(\pi-\Gamma')+i[(n+1)v-nV-\omega-n\omega']}$$

$$-\left\{\frac{1}{8}\varepsilon_1^{n\varphi,-1}+\frac{1}{4}\varepsilon_1^{n\varphi,1}\right\}\eta^3\eta'^2e^{i(\pi-\Gamma')+i[(n-1)v-nV+\omega-n\omega']}$$

$$-\left\{\frac{1}{16}\varepsilon_1^{(n-2)\varphi,1}+\frac{1}{8}\varepsilon_1^{(n-2)\varphi,-1}\right\}\eta^3\eta'^2e^{-i(\pi-\Gamma')-2i(\pi'-\Gamma')+i[(n+1)v-(n-2)V-\omega-n\omega']}$$

$$-\left\{\frac{1}{16}\varepsilon_1^{(n-2)\varphi,-1}+\frac{1}{8}\varepsilon_1^{(n-2)\varphi,1}\right\}\eta^3\eta'^2e^{i(\pi-\Gamma')-2i(\pi-\Gamma')+i[(n-1)v-(n-2)V+\omega-n\omega']}$$

$$-\left\{\frac{1}{16}\varepsilon_1^{(n+2)\varphi,1}+\frac{1}{8}\varepsilon_1^{(n+2)\varphi,-1}\right\}\eta^3\eta'^2e^{-i(\pi-\Gamma')+2i(\pi'-\Gamma')+i[(n+1)v-(n+2)V-\omega-n\omega']}$$

$$-\left\{\frac{1}{16}\varepsilon_1^{(n+2)\varphi,-1}+\frac{1}{8}\varepsilon_1^{(n+2)\varphi,1}\right\}\eta^3\eta'^2e^{i(\pi-\Gamma')+2i(\pi'-\Gamma')+i[(n-1)v-(n+2)V+\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{8}\varepsilon_1^{n\varphi,-1}\eta^3\eta'^2e^{-3i(\pi-\Gamma')+i[(n+3)v-nV-3\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{8}\varepsilon_1^{n\varphi,1}\eta^3\eta'^2e^{3i(\pi-\Gamma')+i[(n-3)v-nV+3\omega-n\omega]}$$

$$-\frac{1}{16}\varepsilon_1^{(n-2)\varphi,-1}\eta^3\eta'^2e^{-3i(\pi-\Gamma')-2i(\pi'-\Gamma')+i[(n+3)v-(n-2)V-3\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{16}\varepsilon_1^{(n-2)\varphi,1}\eta^3\eta'^2e^{3i(\pi-\Gamma')-2i(\pi'-\Gamma')+i[(n-3)v-(n-2)V+3\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{16}\varepsilon_1^{(n+2)\varphi,-1}\eta^3\eta'^2e^{-3i(\pi-\Gamma')+2i(\pi'-\Gamma')+i[(n+3)v-(n+2)V-3\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{16}\varepsilon_1^{(n+2)\varphi,1}\eta^3\eta'^2e^{3i(\pi-\Gamma')+2i(\pi-\Gamma'')+i[(n-3)v-(n+2)V+3\omega-n\omega']}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$+\left\{\frac{1}{8}\xi_1^{n-2,1}+\frac{1}{4}\xi_1^{n,-1}\right\}\eta^2\eta'^3 e^{-i(\pi-\Gamma')+i[nv-(n-1)V-n\omega]}$$

$$+\left\{\frac{1}{8}\xi_1^{n+2,-1}+\frac{1}{4}\xi_1^{n,1}\right\}\eta^2\eta'^3 e^{i(\pi'-\Gamma'')+i[nv-(n+1)V-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{8}\xi_1^{n-2,-1}\eta^2\eta'^3 e^{-3i(\pi'-\Gamma'')+i[nv-(n-3)V-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{8}\xi_1^{n+2,1}\eta^2\eta'^3 e^{3i(\pi'-\Gamma'')+i[nv-(n+3)V-n\omega]}$$

$$+\left\{\frac{1}{16}\xi_1^{n-2,1}+\frac{1}{8}\xi_1^{n,-1}\right\}\eta^2\eta'^3 e^{-2i(\pi-\Gamma')-i(\pi'-\Gamma'')+i[(n+2)v-(n-1)V-2\omega-n\omega']}$$

$$+\left\{\frac{1}{16}\xi_1^{n-2,1}+\frac{1}{8}\xi_1^{n,-1}\right\}\eta^2\eta'^3 e^{2i(\pi-\Gamma')-i(\pi'-\Gamma'')+i[(n-2)v-(n-1)V+2\omega-n\omega]}$$

$$+\left\{\frac{1}{16}\xi_1^{n+2,-1}+\frac{1}{8}\xi_1^{n,1}\right\}\eta^2\eta'^3 e^{-2i(\pi-\Gamma')+i(\pi-\Gamma')+i[(n+2)v-(n+1)V-2\omega-n\omega]}$$

$$+\left\{\frac{1}{16}\xi_1^{n+2,-1}+\frac{1}{8}\xi_1^{n,1}\right\}\eta^2\eta'^3 e^{2i(\pi-\Gamma')+i(\pi'-\Gamma')+i[(n-2)v-(n+1)V+2\omega-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{16}\xi_1^{n-2,-1}\eta^2\eta'^3 e^{-2i(\pi-\Gamma')-3i(\pi'-\Gamma')+i[(n+2)v-(n-3)V-2\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{16}\xi_1^{n-2,-1}\eta^2\eta'^3 e^{2i(\pi-\Gamma')-3i(\pi'-\Gamma'')+i[(n-2)v-(n-3)V+2\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{16}\xi_1^{n+2,1}\eta^2\eta'^3 e^{-2i(\pi-\Gamma')+3i(\pi'-\Gamma'')+i[(n+2)v-(n+3)V-2\omega-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{16}\xi_1^{n+2,1}\eta^2\eta'^3 e^{2i(\pi-\Gamma')+3i(\pi'-\Gamma')+i[(n-2)v-(n+3)V+2\omega-n\omega']},$$

(14, 1,3,5) $$\rho\rho'^3 e^{in(v-v')} = -\frac{3}{16}\left\{\varepsilon_1^{(n-1)\varphi,1}+\varepsilon_1^{(n-1)\varphi,-1}\right\}\eta^2\eta'^3 e^{-i(\pi'-\Gamma'')+i[nv-(n-1)V-n\omega']}$$

$$-\frac{3}{16}\left\{\varepsilon_1^{(n+1)\varphi,1}+\varepsilon_1^{(n+1)\varphi,-1}\right\}\eta^2\eta'^3 e^{i(\pi-\Gamma')+i[nv-(n+1)V-n\omega]}$$

$$-\frac{1}{16}\left\{\varepsilon_1^{(n-3)\varphi,1}+\varepsilon_1^{(n-3)\varphi,-1}\right\}\eta^2\eta'^3 e^{-3i(\pi-\Gamma')+i[nv-(n-3)V-n\omega]}$$

$$-\frac{1}{16}\left\{\varepsilon_1^{(n+3)\varphi,1}+\varepsilon_1^{(n+3)\varphi,-1}\right\}\eta^2\eta'^3 e^{3i(\pi'-\Gamma')+i[nv-(n+3)V-n\omega']}$$

$$-\frac{3}{16}\varepsilon_1^{(n-1)\varphi,-1}\eta^2\eta'^3 e^{-2i(\pi-\Gamma')-i(\pi'-\Gamma'')+i[(n+2)v-(n-1)V-2\omega-n\omega]}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$-\frac{3}{16}\varepsilon_1^{(n-1)\varphi,1}\eta^2\eta'^3e^{2i(\pi-I')-i(\pi'-I'')+i[(n-2)v-(n-1)V+2\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{3}{16}\varepsilon_1^{(n+1)\varphi,-1}\eta^2\eta'^3e^{-2i(\pi-I')+i(\pi'-I'')+i[(n+2)v-(n+1)V-2\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{3}{16}\varepsilon_1^{(n+1)\varphi,1}\eta^2\eta'^3e^{2i(\pi-I')+i(\pi'-I'')+i[(n-2)v-(n+1)V+2\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{16}\varepsilon_1^{(n-3)\varphi,-1}\eta^2\eta'^3e^{-2i(\pi-I')-3i(\pi'-I'')+i[(n+2)v-(n-3)V-2\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{16}\varepsilon_1^{(n-3)\varphi,1}\eta^2\eta'^3e^{2i(\pi-I')-3i(\pi'-I'')+i[(n-2)v-(n-3)V+2\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{16}\varepsilon_1^{(n+3)\varphi,-1}\eta^2\eta'^3e^{-2i(\pi-I')+3i(\pi'-I'')+i[(n+2)v-(n+3)V-2\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{16}\varepsilon_1^{(n+3)\varphi,1}\eta^2\eta'^3e^{2i(\pi-I')+3i(\pi-I'')+i[(n-2)v-(n+3)V+2\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{3}{16}\left\{\xi_1^{n-1,1}+\xi_1^{n+1,-1}\right\}\eta\eta'^4e^{-i(\pi-I')+i[(n+1)v-nV-\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{3}{16}\left\{\xi_1^{n-1,1}+\xi_1^{n+1,-1}\right\}\eta\eta'^4e^{i(\pi-I')+i[(n-1)v-nV+\omega-n\omega']}$$

$$+\left\{\frac{1}{16}\xi_1^{n-3,1}+\frac{3}{16}\xi_1^{n-1,-1}\right\}\eta\eta'^4e^{-i(\pi-I')-2i(\pi'-I'')+i[(n+1)v-(n-2)V-\omega-n\omega']}$$

$$+\left\{\frac{1}{16}\xi_1^{n-3,1}+\frac{3}{16}\xi_1^{n-1,-1}\right\}\eta\eta'^4e^{i(\pi-I')-2i(\pi'-I'')+i[(n-1)v-(n-2)V+\omega-n\omega']}$$

$$+\left\{\frac{1}{16}\xi_1^{n+3,-1}+\frac{3}{16}\xi_1^{n+1,1}\right\}\eta\eta'^4e^{-i(\pi-I')+2i(\pi'-I'')+i[(n+1)v-(n+2)V-\omega-n\omega']}$$

$$+\left\{\frac{1}{16}\xi_1^{n+3,-1}+\frac{3}{16}\xi_1^{n+1,1}\right\}\eta\eta'^4e^{i(\pi-I')+2i(\pi'-I'')+i[(n-1)v-(n+2)V+\omega-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{16}\xi_1^{n-3,-1}\eta\eta'^4e^{i(\pi-I')-4i(\pi'-I'')+i[(n+1)v-(n-4)V-\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{16}\xi_1^{n-3,-1}\eta\eta'^4e^{i(\pi-I')-4i(\pi-I'')+i[(n-1)v-(n-4)V+\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{16}\xi_1^{n+3,1}\eta\eta'^4e^{-i(\pi-I')+4i(\pi-I'')+i[(n+1)v-(n+4)V-\omega-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{16}\xi_1^{n+3,1}\eta\eta'^4e^{i(\pi-I')+4i(\pi'-I'')+i[(n-1)v-(n+4)V+\omega-n\omega']},$$

$$(14,0,4,5)\quad \rho'^4 e^{in(v-v)} = -\frac{3}{8}\varepsilon_1^{n\varphi,-1}\eta\eta'^4 e^{-i(\pi-l')+i[(n+1)v-nV-\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{3}{8}\varepsilon_1^{n\varphi,1}\eta\eta'^4 e^{i(\pi-l')+i[(n-1)v-nV+\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{4}\varepsilon_1^{(n-2)\varphi,-1}\eta\eta'^4 e^{-i(\pi-l')-2i(\pi'-l'')+i[(n+1)v-(n-2)V-\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{4}\varepsilon_1^{(n-2)\varphi,1}\eta\eta'^4 e^{i(\pi-l')-2i(\pi'-l'')+i[(n-1)v-(n-2)V+\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{4}\varepsilon_1^{(n+2)\varphi,-1}\eta\eta'^4 e^{-i(\pi-l')+2i(\pi'-l'')+i[(n+1)v-(n+2)V-\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{4}\varepsilon_1^{(n+2)\varphi,1}\eta\eta'^4 e^{i(\pi-l')+2i(\pi'-l'')+i[(n-1)v-(n+2)V+\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{16}\varepsilon_1^{(n-4)\varphi,-1}\eta\eta'^4 e^{-i(\pi-l')-4i(\pi'-l'')+i[(n+1)v-(n-4)V-\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{16}\varepsilon_1^{(n-4)\varphi,1}\eta\eta'^4 e^{i(\pi-l')-4i(\pi'-l'')+i[(n-1)v-(n-4)V+\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{16}\varepsilon_1^{(n+4)\varphi,-1}\eta\eta'^4 e^{-i(\pi-l')+4i(\pi'-l'')+i[(n+1)v-(n+4)V-\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{16}\varepsilon_1^{(n+4)\varphi,1}\eta\eta'^4 e^{i(\pi-l')+4i(\pi'-l'')+i[(n-1)v-(n+4)V+\omega-n\omega']}$$

$$+\left\{\frac{1}{4}\xi_1^{n-2,1}+\frac{3}{8}\xi_1^{n,-1}\right\}\eta'^5 e^{-i(\pi'-l'')+i[nv-(n-1)V-n\omega']}$$

$$+\left\{\frac{1}{4}\xi_1^{n+2,-1}+\frac{3}{8}\xi_1^{n,1}\right\}\eta'^5 e^{i(\pi'-l'')+i[nv-(n+1)V-n\omega']}$$

$$+\left\{\frac{1}{16}\xi_1^{n-4,1}+\frac{1}{4}\xi_1^{n-2,-1}\right\}\eta'^5 e^{-3i(\pi'-l'')+i[nv-(n-3)V-n\omega']}$$

$$+\left\{\frac{1}{16}\xi_1^{n+4,-1}+\frac{1}{4}\xi_1^{n+2,1}\right\}\eta'^5 e^{3i(\pi'-l'')+i[nv-(n+3)V-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{16}\xi_1^{n-4,-1}\eta'^5 e^{-5i(\pi'-l'')+i[nv-(n-5)V-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{16}\xi_1^{n+4,1}\eta'^5 e^{5i(\pi'-l'')+i[nv-(n+5)V-n\omega']},$$

$$(14,_{5,0,5})\ \rho^5 e^{in(v-v')} = \frac{5}{16}\eta^5 e^{-i(\pi-\Gamma)+i[(n+1)v-nV-\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{5}{16}\eta^5 e^{i(\pi-\Gamma)+i[(n-1)v-nV+\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{5}{32}\eta^5 e^{-3i(\pi-\Gamma)+i[(n+3)v-nV-3\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{5}{32}\eta^5 e^{3i(\pi-\Gamma)+i[(n-3)v-nV+3\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{32}\eta^5 e^{-5i(\pi-\Gamma)+i[(n+5)v-nV-5\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{32}\eta^5 e^{5i(\pi-\Gamma)+i[(n-5)v-nV+5\omega-n\omega']},$$

$$(14,_{4,1,5})\ \rho^4\rho' e^{in(v-v')} = \frac{3}{16}\eta^4\eta' e^{-i(\pi'-\Gamma')+i[nv-(n-1)V-n\omega']}$$

$$+\frac{3}{16}\eta^4\eta' e^{i(\pi'-\Gamma')+i[nv-(n+1)V-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{8}\eta^4\eta' e^{-2i(\pi-\Gamma)-i(\pi'-\Gamma')+i[(n+2)v-(n-1)V-2\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{8}\eta^4\eta' e^{2i(\pi-\Gamma)-i(\pi'-\Gamma')+i[(n-2)v-(n-1)V+2\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{8}\eta^4\eta' e^{-2i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')+i[(n+2)v-(n+1)V-2\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{8}\eta^4\eta' e^{2i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')+i[(n-2)v-(n+1)V+2\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{32}\eta^4\eta' e^{-4i(\pi-\Gamma)-i(\pi'-\Gamma')+i[(n+4)v-(n-1)V-4\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{32}\eta^4\eta' e^{4i(\pi-\Gamma)-i(\pi'-\Gamma')+i[(n-4)v-(n-1)V+4\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{32}\eta^4\eta' e^{-4i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')+i[(n+4)v-(n+1)V-4\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{32}\eta^4\eta' e^{4i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')+i[(n-4)v-(n+1)V+4\omega-n\omega']},$$

$$(14,3,2,5)\quad \rho^3\rho'^2 e^{in(v-V)} = \frac{3}{16}\gamma^3\gamma'^2 e^{-n(\varpi-\Gamma)+i[(n+1)v-nV-\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{3}{16}\gamma^3\gamma'^2 e^{n(\varpi-\Gamma)+i[(n-1)v-nV+\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{3}{32}\gamma^3\gamma'^2 e^{-n(\varpi-\Gamma)-2n(\varpi'-\Gamma')+i[(n+1)v-(n-2)V-\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{3}{32}\gamma^3\gamma'^2 e^{n(\varpi-\Gamma)-2n(\varpi'-\Gamma')+i[(n-1)v-(n-2)V+\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{3}{32}\gamma^3\gamma'^2 e^{-n(\varpi-\Gamma)+2n(\varpi'-\Gamma')+i[(n+1)v-(n+2)V-\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{3}{32}\gamma^3\gamma'^2 e^{n(\varpi-\Gamma)+2n(\varpi'-\Gamma')+i[(n-1)v-(n+2)V+\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{16}\gamma^3\gamma'^2 e^{-3n(\varpi-\Gamma)+i[(n+3)v-nV-3\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{16}\gamma^3\gamma'^2 e^{3n(\varpi-\Gamma)+i[(n-3)v-nV+3\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{32}\gamma^3\gamma'^2 e^{-3n(\varpi-\Gamma)-2n(\varpi'-\Gamma')+i[(n+3)v-(n-2)V-3\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{32}\gamma^3\gamma'^2 e^{3n(\varpi-\Gamma)-2n(\varpi'-\Gamma')+i[(n-3)v-(n-2)V+3\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{32}\gamma^3\gamma'^2 e^{-3n(\varpi-\Gamma)+2n(\varpi'-\Gamma')+i[(n+3)v-(n+2)V-3\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{32}\gamma^3\gamma'^2 e^{3n(\varpi-\Gamma)+2n(\varpi'-\Gamma')+i[(n-3)v-(n+2)V+3\omega-n\omega']},$$

$$(14,2,3,5)\quad \rho^2\rho'^3 e^{in(v-V)} = \frac{3}{16}\gamma^2\gamma'^3 e^{-n(\varpi'-\Gamma')+i[nv-(n-1)V-n\omega']}$$

$$+\frac{3}{16}\gamma^2\gamma'^3 e^{n(\varpi'-\Gamma')+i[nv-(n+1)V-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{16}\gamma^2\gamma'^3 e^{-3n(\varpi'-\Gamma')+i[nv-(n-3)V-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{16}\gamma^2\gamma'^3 e^{3n(\varpi'-\Gamma')+i[nv-(n+3)V-n\omega']}$$

$$+\frac{3}{32}\gamma^2\gamma'^3 e^{-2n(\varpi-\Gamma)-n(\varpi'-\Gamma')+i[(n+2)v-(n-1)V-2\omega-n\omega']}$$

Cette formule se continue à la page suivante

$$+\frac{3}{32}\eta^2\eta'^3 e^{2i(\pi-\Gamma)-i(\pi'-\Gamma')+i[(n-2)v-(n-1)V+2\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{3}{32}\eta^2\eta'^3 e^{-2i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')+i[(n+2)v-(n+1)V-2\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{3}{32}\eta^2\eta'^3 e^{2i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')+i[(n-2)v-(n+1)V+2\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{32}\eta^2\eta'^3 e^{-2i(\pi-\Gamma)-3i(\pi'-\Gamma')+i[(n+2)v-(n-3)V-2\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{32}\eta^2\eta'^3 e^{2i(\pi-\Gamma)-3i(\pi'-\Gamma')+i[(n-2)v-(n-3)V+2\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{32}\eta^2\eta'^3 e^{-2i(\pi-\Gamma)+3i(\pi'-\Gamma')+i[(n+2)v-(n+3)V-2\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{32}\eta^2\eta'^3 e^{2i(\pi-\Gamma)+3i(\pi'-\Gamma')+i[(n-2)v-(n+3)V+2\omega-n\omega']},$$

(14, 1, 4, 5) $$\rho\rho'^4 e^{in(v-v')}=\frac{3}{16}\eta\eta'^4 e^{-i(\pi-\Gamma)+i[(n+1)v-nV-\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{3}{16}\eta\eta'^4 e^{i(\pi-\Gamma)+i[(n-1)v-nV+\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{8}\eta\eta'^4 e^{-i(\pi-\Gamma)-2i(\pi'-\Gamma')+i[(n+1)v-(n-2)V-\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{8}\eta\eta'^4 e^{i(\pi-\Gamma)-2i(\pi'-\Gamma')+i[(n-1)v-(n-2)V+\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{8}\eta\eta'^4 e^{-i(\pi-\Gamma)+2i(\pi'-\Gamma')+i[(n+1)v-(n+2)V-\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{8}\eta\eta'^4 e^{i(\pi-\Gamma)+2i(\pi'-\Gamma')+i[(n-1)v-(n+2)V+\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{32}\eta\eta'^4 e^{-i(\pi-\Gamma)-4i(\pi'-\Gamma')+i[(n+1)v-(n-4)V-\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{32}\eta\eta'^4 e^{i(\pi-\Gamma)-4i(\pi'-\Gamma')+i[(n-1)v-(n-4)V+\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{32}\eta\eta'^4 e^{-i(\pi-\Gamma)+4i(\pi'-\Gamma')+i[(n+1)v-(n+4)V-\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{32}\eta\eta'^4 e^{i(\pi-\Gamma)+4i(\pi'-\Gamma')+i[(n-1)v-(n+4)V+\omega-n\omega']},$$

$$(14, 0, 5, 5) \qquad \rho'^5 e^{in(v-v')} = \frac{5}{16}\eta'^5 e^{-n(\pi'-\Gamma')+i[nv-(n-1)V-n\omega']}$$

$$+ \frac{5}{16}\eta'^5 e^{n(\pi'-\Gamma')+i[nv-(n+1)V-n\omega']}$$

$$+ \frac{5}{32}\eta'^5 e^{-3(\pi'-\Gamma')+i[nv-(n-3)V-n\omega']}$$

$$+ \frac{5}{32}\eta'^5 e^{3(\pi'-\Gamma')+i[nv-(n+3)V-n\omega']}$$

$$+ \frac{1}{32}\eta'^5 e^{-5(\pi'-\Gamma')+i[nv-(n-5)V-n\omega']}$$

$$+ \frac{1}{32}\eta'^5 e^{5(\pi'-\Gamma')+i[nv-(n+5)V-n\omega']}.$$

On pourrait quelquefois être forcé d'aller plus loin, très rarement toutefois dans les cas des grandes planètes; mais puisque les expressions générales des termes du sixième et du septième degré deviennent extrêmement prolixes, je préfère d'en calculer indépendamment d'après les formules (4, s, s′) ou (4′, s, s′), en temps et lieu, les termes, du reste peu nombreux, qui acquièrent des valeurs appréciables.

Pour la formation des expressions (11′, 0, 0, 2), (11′, 1, 0, 2), ..., (14′, 0, 5, 5) je renvoie à la règle donnée déjà à l'occasion des termes du degré zéro.

60. Les expressions que nous venons d'établir dans le numéro précédent, se vérifient de diverses manières. D'abord, si l'on avait calculé les termes de l'ordre s de la fonction $\rho^s \rho'^{s'} e^{in(v-v')}$, on aurait trouvé les termes de l'ordre s + 1 appartenant à l'expression du produit $\rho^{s+1}\rho'^{s'} e^{in(v-v')}$, tout simplement en multipliant l'expression de l'ordre s par

$$\rho = \frac{1}{2}\eta\left[e^{-(\pi-\Gamma)+i(v-\omega)} + e^{(\pi-\Gamma)-i(v-\omega)}\right]$$

De la sorte, on pourra contrôler toutes les formules (10, s, s′, 1), (11, s, s′, 2), ..., (14, s, s′, 5), le nombre s étant plus grand que zéro. De même, la vérification d'une formule (10′, s, s′, 1), ..., (14′, s, s′, 5) s'opère en multipliant les formules (9′, s, s′ — 1, 0), ..., (13′, s, s′ — 1, 4) par l'expression de ρ'

Mais on pourrait aussi, au moyen de multiplications faites par ρ', calculer les produits dont il s'agit, et on obtiendrait ainsi des résultats servant à vérifier les formules du dernier numéro. Dans ce but, on devrait exprimer ρ' au moyen des arguments v et V. Ce mode de contrôle étant toutefois assez laborieux, lorsqu'il s'agit de produits d'un ordre élevé, je me restreins à n'en donner qu'un seul exemple.

Si l'on suppose, dans les expressions (10, 0, 1, 1) et (11, 0, 1, 2), n égal à zéro, on obtiendra l'expression suivante de ρ' renfermant les termes du premier et du deuxième degré. Les voici:

$$
\begin{aligned}
\rho' = \; & \tfrac{1}{2}\eta' e^{-i(\pi'-\Gamma')+iV} \\
& + \tfrac{1}{2}\eta' e^{i(\pi'-\Gamma')-iV} \\
& - \tfrac{1}{2}\Xi_1^{0,1}\eta\eta' e^{-i(\pi-\Gamma)-i(\pi'-\Gamma')+i(v+V-\omega)} \\
& - \tfrac{1}{2}\Xi_1^{0,1}\eta\eta' e^{i(\pi-\Gamma)-i(\pi'-\Gamma')+i(-v+V+\omega)} \\
& - \tfrac{1}{2}\Xi_1^{0,1}\eta\eta' e^{-i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')+i(v-V-\omega)} \\
& - \tfrac{1}{2}\Xi_1^{0,1}\eta\eta' e^{i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')-i(v+V+\omega)} \\
& + \tfrac{1}{2}\Xi_1^{1,1}\eta'^2 e^{-2i(\pi'-\Gamma')+2iV} \\
& + \Xi_1^{1,1}\eta'^2 \\
& + \tfrac{1}{2}\Xi_1^{1,1}\eta'^2 e^{2i(\pi'-\Gamma')-2iV}.
\end{aligned}
$$

En multipliant, par les deux premiers termes de l'expression mise en évidence, la formule (11, 0, 1, 2), et, par les autres termes de la dite expression, la formule (10, 0, 1, 1), la somme des produits obtenus de la sorte doit être égale au produit $\rho'^2 e^{in(v-v')}$, en n'y considérant que les termes du troisième degré. On obtient en effet:

$$\rho'^2 e^{(n+1)vi} = -\frac{1}{4}\left(\Xi_1^{(n-1)\varsigma,-1} + \Xi_1^{(n+1)\varsigma,-1} + \Xi_1^{\varsigma,-1} + \Xi_1^{\varsigma,1}\right)$$

$$\times\, \eta\eta'^2 e^{i(\pi-\Gamma)+i[(n+1)v-nV-\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{4}\left(\Xi_1^{(n-1)\varsigma,1} + \Xi_1^{(n+1)\varsigma,1} + \Xi_1^{\varsigma,-1} + \Xi_1^{\varsigma,1}\right)$$

$$\times\, \eta\eta'^2 e^{i(\pi-\Gamma)+i[(n-1)v-nV+\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{4}\left(\Xi_1^{(n-1)\varsigma,-1} + \Xi_1^{\varsigma,1}\right)\eta\eta'^2 e^{i(\pi-\Gamma)-2i(\pi-\Gamma)+i[(n+1)v-(n-2)V-\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{4}\left(\Xi_1^{(n-1)\varsigma,1} + \Xi_1^{\varsigma,-1}\right)\eta\eta'^2 e^{i(\pi-\Gamma)-2i(\pi-\Gamma)+i[(n-1)v-(n-2)V+\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{4}\left(\Xi_1^{(n+1)\varsigma,-1} + \Xi_1^{\varsigma,-1}\right)\eta\eta'^2 e^{i(\pi-\Gamma)+2i(\pi-\Gamma)+i[(n+1)v-(n+2)V-\omega-n\omega']}$$

$$-\frac{1}{4}\left(\Xi_1^{(n+1)\varsigma,1} + \Xi_1^{\varsigma,1}\right)\eta\eta'^2 e^{i(\pi-\Gamma)+2i(\pi-\Gamma)+i[(n-1)v-(n+2)V+\omega-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{4}\left(\Xi_1^{n-1,-1} + \Xi_1^{n-1,1} + \Xi_1^{n+1,-1} + \Xi_1^{1,1} + 2\Xi_1^{1,-1}\right)$$

$$\times\, \eta'^3 e^{i(\pi-\Gamma)+i[nv-(n-1)V-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{4}\left(\Xi_1^{n+1,1} + \Xi_1^{n-1,1} + \Xi_1^{n+1,-1} + \Xi_1^{1,1} + 2\Xi_1^{1,-1}\right)$$

$$\times\, \eta'^3 e^{i(\pi-\Gamma)+i[nv-(n+1)V-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{4}\left(\Xi_1^{n-1,-1} + \Xi_1^{1,1}\right)\eta'^3 e^{-3i(\pi-\Gamma)+i[nv-(n-3)V-n\omega']}$$

$$+\frac{1}{4}\left(\Xi_1^{n+1,1} + \Xi_1^{1,1}\right)\eta'^3 e^{3i(\pi-\Gamma)+i[nv-(n+3)V-n\omega']}.$$

L'expression mise en évidence devant être identique avec celle que nous venons de donner moyennant la formule (12, 0, 2, 3), on ne saurait remplir cette condition à moins qu'on n'ait:

$$\Xi_1^{n\varsigma,-1} = -\frac{1}{2}\left(\Xi_1^{(n-1)\varsigma,-1} + \Xi_1^{(n+1)\varsigma,-1} + \Xi_1^{\varsigma,-1} + \Xi_1^{\varsigma,1}\right),$$

$$\Xi_1^{n\varsigma,1} = -\frac{1}{2}\left(\Xi_1^{(n-1)\varsigma,1} + \Xi_1^{(n+1)\varsigma,1} + \Xi_1^{\varsigma,-1} + \Xi_1^{\varsigma,1}\right),$$

$$\Xi_1^{(n-2)\varsigma,-1} = -\Xi_1^{(n-1)\varsigma,-1} + \Xi_1^{\varsigma,1},$$

$$\Xi_1^{(n-2)\varsigma,1} = -\Xi_1^{(n-1)\varsigma,1} + \Xi_1^{\varsigma,-1},$$

$$\varepsilon_1^{(n+2)\varsigma,-1} = \varepsilon_1^{(n+1)\varsigma,-1} + \varepsilon_1^{\varsigma,-1},$$

$$\varepsilon_1^{(n+2)\varsigma,1} = \varepsilon_1^{(n+1)\varsigma,1} + \varepsilon_1^{\varsigma,1},$$

$$\xi_1^{n,-1} + \frac{1}{2}\xi_1^{n-2,1} = \frac{1}{2}(\xi_1^{n-1,-1} + \xi_1^{n-1,1} + \xi_1^{n+1,-1} + \xi_1^{1,1} + 2\xi_1^{1,-1}),$$

$$\xi_1^{n,1} + \frac{1}{2}\xi_1^{n+2,-1} = \frac{1}{2}(\xi_1^{n+1,1} + \xi_1^{n-1,1} + \xi_1^{n+1,-1} + \xi_1^{1,1} + 2\xi_1^{1,-1}),$$

$$\xi_1^{n-2,-1} = \xi_1^{n-1,-1} + \xi_1^{1,1},$$

$$\xi_1^{n+2,1} = \xi_1^{n+1,1} + \xi_1^{1,1}.$$

Mais en substituant, dans ces équations de condition, les valeurs des coefficients ε et ξ qu'on a données dans les n°s 29 et 30, on s'aperçoit facilement de l'identité des équations dont il s'agit.

On a ainsi établi une vérification profonde des résultats obtenus relativement aux produits $\rho' e^{in(v-v')}$ et $\rho'^2 e^{in(v-v')}$; mais ce qui est le plus important, c'est que cette vérification entraîne celle d'une grande partie de nos développements exposés dans le livre présent. Ce principe étant trouvé légitime, il ne paraît pas nécessaire de vérifier, par le procédé indiqué, toutes les formules du numéro précédent, vu qu'elles sont obtenues indépendamment par deux personnes.

Une dernière remarque: si l'on admettait les notations

$$\varpi = \omega - G; \qquad \varpi' = \omega' - G',$$

on pourrait changer, dans toutes les formules du numéro présent, v en v, v' en v' et ω' en ϖ'

61. Nous allons maintenant chercher les termes dépendant, et des fonctions diastématiques, et des fonctions anastématiques. Le principe de leur calcul étant fort simple, on les obtient sans peine: cependant, puisque leur nombre est très grand, en considérant tous les termes jusqu'au cinquième degré inclusivement, leur exposition causerait un travail assez considérable, si l'on voulait mettre en évidence tous ces termes. Mais heureusement, il y a seulement un nombre plus restreint de ces termes utiles à nos recherches, tandis que les autres deviendront insensibles dans l'expression des inégalités. Parmi les termes exerçant une influence sensible,

il y en a un certain nombre du deuxième degré dépendant du produit d'une fonction diastématique par une fonction anastématique; il y a encore des termes très importants du troisième degré, dont les coefficients sont formés, ou par une fonction diastématique multipliée par un facteur du second degré par rapport aux fonctions anastématiques, ou par une fonction anastématique multipliée par un facteur du second degré relativement aux fonctions diastématiques. Parmi les termes du quatrième et du cinquième degré, il y en a seulement très peu qu'il faut considérer: ceux-là sont principalement les termes devenant élémentaires par l'intégration. Je commence par m'occuper des termes du premier et du second degré.

Il s'agira d'abord des termes provenant du développement des produits $\zeta \cos nH$ et $\zeta' \cos nH$, où l'on peut mettre $v - v'$ ou $\mathrm{v} - \mathrm{v}'$ au lieu de H, vu qu'on ne tiendra compte, à cette occasion, que des termes du premier degré par rapport aux fonctions anastématiques.

En employant toujours les notations

$$\mathrm{v} = v - G; \qquad \mathrm{v}' = v' - G',$$

$$\bar{\vartheta} = \vartheta - G; \qquad \bar{\vartheta}' = \vartheta' - G',$$

on aura facilement, en vertu de l'expression (49) du n° 23, les suivantes:

$$(15) \quad \zeta = I \sin(\mathrm{v} - \bar{\vartheta} - (\Omega - \Theta)); \qquad \zeta' = I' \sin(\mathrm{v}' - \bar{\vartheta}' - (\Omega' - \Theta')),$$

ou bien celle-ci:

$$(16) \qquad \zeta = -\frac{1}{2} i I e^{-i(\Omega-\Theta)+i(\mathrm{v}-\bar{\vartheta})} + \frac{1}{2} i I e^{i(\Omega-\Theta)-i(\mathrm{v}-\bar{\vartheta})}$$

$$= -\frac{1}{2} i I e^{-i(\Omega-\Theta)+i(\mathrm{v}'-\bar{\vartheta})+i(\mathrm{v}-\mathrm{v}')}$$

$$+ \frac{1}{2} i I e^{i(\Omega-\Theta)-i(\mathrm{v}'-\bar{\vartheta})-i(\mathrm{v}-\mathrm{v}')},$$

$$(16') \qquad \zeta' = -\frac{1}{2} i I' e^{-i(\Omega'-\Theta')+i(\mathrm{v}'-\bar{\vartheta}')} + \frac{1}{2} i I' e^{i(\Omega'-\Theta')-i(\mathrm{v}'-\bar{\vartheta}')}$$

$$= -\frac{1}{2} i I' e^{-i(\Omega'-\Theta')+i(\mathrm{v}-\bar{\vartheta}')-i(\mathrm{v}-\mathrm{v}')}$$

$$+ \frac{1}{2} i I' e^{i(\Omega'-\Theta')-i(\mathrm{v}-\bar{\vartheta}')+i(\mathrm{v}-\mathrm{v}')}.$$

De ces expressions, on tire immédiatement, en considérant les formules (9, 0, 0, 0) et (9′, 0, 0, 0), les termes du premier degré par rapport aux fonctions anastématiques. Les voici:

(i) *Termes du premier degré.*

(17, 0,0,1,0,1) $$\mathfrak{z}e^{in(v-v')} = -\frac{1}{2}iIe^{-i(\Omega-\Theta)+i[(n+1)v-nV-n\varpi'-\vartheta]}$$
$$+\frac{1}{2}iIe^{i(\Omega-\Theta)+i[(n-1)v-nV-n\varpi'+\vartheta]},$$

(17, 0,0,0,1,1) $$\mathfrak{z}'e^{in(v-v')} = -\frac{1}{2}iI'e^{-i(\Omega'-\Theta')+i[nv-(n-1)V-(n-1)\varpi'-\bar{\vartheta}']}$$
$$+\frac{1}{2}iI'e^{i(\Omega'-\Theta')+i[nv-(n+1)V-(n+1)\varpi'+\vartheta']},$$

(17′, 0,0,1,0,1) $$\mathfrak{z}e^{in(v'-v)} = -\frac{1}{2}iIe^{-i(\Omega-\Theta)+i[nv'-(n+1)V'-(n+1)\bar{\varpi}+\vartheta]}$$
$$+\frac{1}{2}iIe^{i(\Omega-\Theta)+i[nv'-(n-1)V'-(n-1)\bar{\varpi}-\bar{\vartheta}]},$$

(17′, 0,0,0,1,1) $$\mathfrak{z}'e^{in(v'-v)} = -\frac{1}{2}iI'e^{-i(\Omega'-\Theta')+i[(n-1)v'-nV'-n\bar{\varpi}+\bar{\vartheta}']}$$
$$+\frac{1}{2}iI'e^{i(\Omega'-\Theta')+i[(n+1)v'-nV'-n\bar{\varpi}-\bar{\vartheta}']}.$$

Evidemment, la dernière de ces formules résulte immédiatement de la première, en y changeant $\mathfrak{z}$ en $\mathfrak{z}'$, v en v′, v′ en v, V en V′, I en I', Ω en Ω', Θ en Θ′ $\bar{\varpi}'$ en $\bar{\varpi}$, $\bar{\vartheta}$ en $\bar{\vartheta}'$ et n en $-n$. De même, par les changements mentionnés la troisième formule dérive de la deuxième, et vice versa.

Maintenant, pour avoir les termes du deuxième degré, il faut d'abord considérer les relations

(18, 1) $$\mathfrak{z}e^{in(v-v')} = -\frac{1}{2}iIe^{-i(\Omega-\Theta)+i(v-\bar{\vartheta})+in(v-v')}$$
$$+\frac{1}{2}iIe^{i(\Omega-\Theta)-i(v-\bar{\vartheta})+in(v-v')},$$

(18, 2) $$\zeta' e^{in(v-v')} = -\frac{1}{2} i I' e^{-i(\Omega-\Theta')+i(v-\bar{\pi}')+i(n-1)(v-v')}$$

$$+\frac{1}{2} i I' e^{i(\Omega-\Theta')-i(v-\bar{\pi}')+i(n+1)(v-v')},$$

(18, 3) $$\zeta \rho e^{in(v-v')} = -\frac{1}{2} i I e^{-i(\Omega-\Theta)+i(v-\bar{\pi})} \rho e^{in(v-v')}$$

$$+\frac{1}{2} i I e^{i(\Omega-\Theta)-i(v-\bar{\pi})} \rho e^{in(v-v')},$$

(18, 4) $$\zeta' \rho e^{in(v-v')} = -\frac{1}{2} i I' e^{-i(\Omega-\Theta')+i(v-\bar{\pi}')} \rho e^{i(n-1)(v-v')}$$

$$+\frac{1}{2} i I' e^{i(\Omega-\Theta')-i(v-\bar{\pi}')} \rho e^{i(n+1)(v-v')},$$

ainsi que les expressions analogues provenant du changement de ρ en ρ'. En y introduisant les valeurs (10, 0, 0, 1), (10, 1, 0, 1) et (10, 0, 1, 1), il en résultera:

II) *Termes du second degré.*

(19, 0,0,1,0,2) $$\zeta e^{in(v-v')} = -\frac{1}{2} i \varepsilon_1^{n\varsigma,-1} \eta I e^{-i(\pi-\Gamma)-i(\Omega-\Theta)+i[(n+2)v-nV-\omega-n\omega-\bar{\pi}]}$$

$$+\frac{1}{2} i \varepsilon_1^{n\varsigma,1} \eta I e^{i(\pi-\Gamma)-i(\Omega-\Theta)+i[nv-nV+\omega-n\omega-\bar{\pi}]}$$

$$-\frac{1}{2} i \xi_1^{n,-1} \eta' I e^{-i(\pi'-\Gamma')-i(\Omega-\Theta)+i[(n+1)v-(n-1)V-n\omega'-\bar{\pi}]}$$

$$-\frac{1}{2} i \xi_1^{n,1} \eta' I e^{-i(\pi'-\Gamma')-i(\Omega-\Theta)+i[(n+1)v-(n+1)V-n\omega'-\bar{\pi}]}$$

$$-\frac{1}{2} i \varepsilon_1^{n\varsigma,-1} \eta I e^{i(\pi-\Gamma)+i(\Omega-\Theta)+i[nv-nV-\omega-n\omega+\bar{\pi}]}$$

$$-\frac{1}{2} i \varepsilon_1^{n\varsigma,1} \eta I e^{i(\pi-\Gamma)+i(\Omega-\Theta)+i[(n-2)v-nV+\omega-n\omega+\bar{\pi}]}$$

$$+\frac{1}{2} i \xi_1^{n,-1} \eta' I e^{-i(\pi'-\Gamma')+i(\Omega-\Theta)+i[(n-1)v-(n-1)V-n\omega'+\bar{\pi}]}$$

$$+\frac{1}{2} i \xi_1^{n,1} \eta' I e^{i(\pi'-\Gamma')+i(\Omega-\Theta)+i[(n-1)v-(n+1)V-n\omega'+\bar{\pi}]},$$

(19. 0,0,0,1,2) $$\zeta' e^{in(v-v')} = \frac{1}{2} i\varepsilon_1^{(n-1)\varsigma,-1}\eta_{,} I' e^{-i(\pi-\Gamma')-i(\Omega-\theta)+i[(n+1)v-(n-1)V-\omega-(n-1)\bar\omega-\bar\vartheta']}$$

$$+\frac{1}{2} i\varepsilon_1^{(n-1)\varsigma,1}\eta_{,} I' e^{i(\pi-\Gamma')-i(\Omega-\theta)+i[(n-1)v-(n-1)V+\bar\omega-(n-1)\bar\omega'-\bar\vartheta]}$$

$$-\frac{1}{2} i\xi_1^{n-1,-1}\eta_{,}' I' e^{-i(\pi-\Gamma')-i(\Omega-\theta)+i[nv-(n-2)V-(n-1)\bar\omega'-\vartheta]}$$

$$-\frac{1}{2} i\xi_1^{n-1,1}\eta_{,}' I' e^{i(\pi'-\Gamma'')-i(\Omega'-\theta)+i[nv-nV-(n-1)\bar\omega-\bar\vartheta]}$$

$$-\frac{1}{2} i\varepsilon_1^{(n+1)\varsigma,-1}\eta_{,} I' e^{-i(\pi-\Gamma')+i(\Omega-\theta)+i[(n+1)v-(n+1)V-\bar\omega-(n+1)\bar\omega+\bar\vartheta]}$$

$$-\frac{1}{2} i\varepsilon_1^{(n+1)\varsigma,1}\eta_{,} I' e^{i(\pi-\Gamma')+i(\Omega'-\theta)+i[(n-1)v-(n+1)V+\bar\omega-(n+1)\bar\omega+\bar\vartheta]}$$

$$+\frac{1}{2} i\xi_1^{n+1,-1}\eta_{,}' I' e^{-i(\pi'-\Gamma')+i(\Omega'-\theta')+i[nv-nV-(n+1)\bar\omega'+\bar\vartheta']}$$

$$+\frac{1}{2} i\xi_1^{n+1,1}\eta_{,}' I' e^{i(\pi-\Gamma')+i(\Omega-\theta)+i[nv-(n+2)V-(n+1)\bar\omega+\bar\vartheta]},$$

(19. 1,0,1,0,2) $$\zeta\rho e^{in(v-v')} = -\frac{1}{4} i\eta_{,} I e^{-i(\pi-\Gamma)-i(\Omega-\theta)+i[(n+2)v-nV-\bar\omega-n\bar\omega-\bar\vartheta]}$$

$$-\frac{1}{4} i\eta_{,} I e^{i(\pi-\Gamma)-i(\Omega-\theta)+i[nv-nV+\bar\omega-n\bar\omega'-\vartheta]}$$

$$+\frac{1}{4} i\eta_{,} I e^{-i(\pi-\Gamma)+i(\Omega-\theta)+i[nv-nV-\bar\omega-n\bar\omega'+\bar\vartheta]}$$

$$+\frac{1}{4} i\eta_{,} e^{i(\pi-\Gamma)+i(\Omega-\theta)+i[(n-2)v-nV+\omega-n\bar\omega+\vartheta]},$$

(19. 0,1,1,0,2) $$\zeta\rho' e^{in(v-v')} = -\frac{1}{4} i\eta_{,}' I e^{-i(\pi-\Gamma')-i(\Omega-\theta)+i[(n+1)v-(n-1)V-n\omega-\bar\vartheta]}$$

$$-\frac{1}{4} i\eta_{,}' I e^{i(\pi'-\Gamma')-i(\Omega-\theta)+i[(n+1)v-(n+1)V-n\omega'-\bar\vartheta]}$$

$$+\frac{1}{4} i\eta_{,}' I e^{-i(\pi'-\Gamma')+i(\Omega-\theta)+i[(n-1)v-(n-1)V-n\bar\omega+\vartheta]}$$

$$+\frac{1}{4} i\eta_{,}' I e^{i(\pi-\Gamma')+i(\Omega-\theta)+i[(n-1)v-(n+1)V-n\omega+\bar\vartheta]},$$

$$(19, 1, 0, 0, 1, 2) \qquad \mathfrak{z}'\rho e^{in(v-V)} = -\frac{1}{4} i\eta I' e^{-i(\pi-\Gamma')-i(\Omega-\theta)+i[(n+1)v-(n-1)V-\omega-(n-1)\omega-\vartheta]}$$

$$-\frac{1}{4} i\eta I' e^{i(\pi-\Gamma')-i(\Omega-\theta)+i[(n-1)v-(n-1)V+\omega-(n-1)\omega-\vartheta]}$$

$$+\frac{1}{4} i\eta I' e^{-i(\pi-\Gamma')+i(\Omega-\theta)+i[(n+1)v-(n+1)V-\omega-(n+1)\omega'+\vartheta]}$$

$$+\frac{1}{4} i\eta I' e^{i(\pi-\Gamma')+i(\Omega-\theta)+i[(n-1)v-(n+1)V+\omega-(n+1)\omega+\vartheta]},$$

$$(19, 0, 1, 0, 1, 2) \qquad \mathfrak{z}'\rho' e^{in(v-V)} = -\frac{1}{4} i\eta' I' e^{-i(\pi-\Gamma')-i(\Omega-\theta)+i[nv-(n-2)V-(n-1)\omega-\vartheta]}$$

$$-\frac{1}{4} i\eta' I' e^{i(\pi-\Gamma')-i(\Omega-\theta)+i[nv-nV-(n-1)\omega'-\vartheta]}$$

$$+\frac{1}{4} i\eta' I' e^{-i(\pi'-\Gamma'')+i(\Omega-\theta)+i[nv-nV-(n+1)\omega+\vartheta]}$$

$$+\frac{1}{4} i\eta' I' e^{i(\pi-\Gamma')+i(\Omega-\theta)+i[nv-(n+2)V-(n+1)\omega'+\vartheta]}.$$

Pour avoir les formules (19′, 0, 0, 1, 0, 2), etc., c'est-à-dire les développements de $\mathfrak{z}e^{in(v-v')}$, etc., exprimés moyennant les variables v′ et V′, il suffit de changer, dans les formules précédentes, $\mathfrak{z}$ en $\mathfrak{z}'$, $\mathfrak{z}'$ en $\mathfrak{z}$, etc., et n en $-n$.

Une partie des termes du deuxième ordre par rapport aux fonctions anastématiques seules sont donnés déjà dans le chapitre précédent, savoir ceux qui sont contenus dans les expressions de $\cos nH$; pour déduire les autres, qui nous seront nécessaires plus tard, on établira les formules

$$(20) \qquad \mathfrak{z}^2 = \frac{1}{2} I^2 - \frac{1}{4} I^2 e^{-2i(\Omega-\theta)+2i(v-\varpi)} - \frac{1}{4} I^2 e^{2i(\Omega-\theta)-2i(v-\varpi)}$$

$$= \frac{1}{2} I^2 - \frac{1}{4} I^2 e^{-2i(\Omega-\theta)+2i(V-\varpi)+2i(v-V)}$$

$$- \frac{1}{4} I^2 e^{2i(\Omega-\theta)-2i(V-\varpi)-2i(v-V)},$$

$$(21) \qquad \mathfrak{z}'^2 = \frac{1}{2} I'^2 - \frac{1}{4} I'^2 e^{-2i(\Omega-\theta)+2i(v-\varpi)} - \frac{1}{4} I'^2 e^{2i(\Omega-\theta)-2i(v-\varpi)}$$

$$= \frac{1}{2} I'^2 - \frac{1}{4} I'^2 e^{-2i(\Omega-\theta)+2i(V-\varpi)-2i(v-V)}$$

$$- \frac{1}{4} I'^2 e^{2i(\Omega-\theta)-2i(V-\varpi)+2i(v-V)},$$

$$(22)\qquad \mathfrak{z}\mathfrak{z}' = \frac{1}{4} II' e^{-i(\Omega-\Theta)+i(\Omega'-\Theta')+i(v-v'-\bar\vartheta+\bar\vartheta')}$$
$$+ \frac{1}{4} II' e^{i(\Omega-\Theta)-i(\Omega'-\Theta')-i(v-v'-\bar\vartheta+\bar\vartheta')}$$
$$- \frac{1}{4} II' e^{-i(\Omega-\Theta)-i(\Omega'-\Theta')+i(v+v'-\bar\vartheta-\bar\vartheta')}$$
$$- \frac{1}{4} II' e^{i(\Omega-\Theta)+i(\Omega'-\Theta')-i(v+v'-\bar\vartheta-\bar\vartheta')},$$

$$(23)\qquad \mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{z}}{dv} = -\frac{1}{4} iI^2 e^{-2i(\Omega-\Theta)+2i(v-\bar\vartheta)} + \frac{1}{4} iI^2 e^{2i(\Omega-\Theta)-2i(v-\bar\vartheta)},$$

$$(24)\qquad \left(\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)^2 = \frac{1}{2} I^2 + \frac{1}{4} I^2 e^{-2i(\Omega-\Theta)+2i(v-\bar\vartheta)} + \frac{1}{4} I^2 e^{2i(\Omega-\Theta)-2i(v-\bar\vartheta)},$$

$$(25)\qquad \mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}}{dv} = \frac{1}{4} iII' e^{-i(\Omega-\Theta)+i(\Omega'-\Theta')+i(v-v'-\bar\vartheta+\bar\vartheta')}$$
$$- \frac{1}{4} iII' e^{i(\Omega-\Theta)-i(\Omega'-\Theta')-i(v-v'-\bar\vartheta+\bar\vartheta')}$$
$$- \frac{1}{4} iII' e^{-i(\Omega-\Theta)-i(\Omega'-\Theta')+i(v+v'-\bar\vartheta-\bar\vartheta')}$$
$$+ \frac{1}{4} iII' e^{i(\Omega-\Theta)+i(\Omega'-\Theta')-i(v+v'-\bar\vartheta-\bar\vartheta')},$$

dont les trois dernières sont obtenues en considérant comme constantes, les fonctions élémentaires $Ie^{i(\Omega-\Theta)}$ et $I'e^{i(\Omega'-\Theta')}$, ainsi que les arguments v', $\bar\vartheta$ et $\bar\vartheta'$.

J'ajoute encore la formule

$$(26)\qquad \mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}'}{dv'} = -\frac{1}{4} iI^2 e^{-2i(\Omega-\Theta)+2(v-\bar\vartheta)} + \frac{1}{4} iI^2 e^{2i(\Omega-\Theta)-2i(v-\bar\vartheta)}.$$

On tire facilement, des expressions signalées, en n'y ayant égard qu'aux termes du deuxième degré:

I) *Termes du second degré dependant des fonctions anastématiques seules.*

$$(27,\ 0,0,2,0,2)\qquad \mathfrak{z}^2 e^{in(v-V)} = \frac{1}{2} I^2 e^{i[nv-nV-n\omega]}$$
$$- \frac{1}{4} I^2 e^{-2i(\Omega-\Theta)+i[(n+2)v-nV-n\omega-2\bar\vartheta]}$$
$$- \frac{1}{4} I^2 e^{2i(\Omega-\Theta)+i[(n-2)v-nV-n\omega+2\bar\vartheta]},$$

(27, 0,0,1,1,2) $$\mathfrak{z}\mathfrak{z}'e^{in(v-V)} = -\frac{1}{4}II'e^{-i(\Omega-\theta)+i(\Omega'-\theta')+i[(n+1)v-(n+1)V-(n+1)\varpi-\sigma+\sigma']}$$

$$+\frac{1}{4}II'e^{i(\Omega-\theta)-i(\Omega'-\theta')+i[(n-1)v-(n-1)V-(n-1)\varpi+\sigma-\sigma']}$$

$$-\frac{1}{4}II'e^{-i(\Omega-\theta)-i(\Omega'-\theta')+i[(n+1)v-(n-1)V-(n-1)\varpi-\sigma-\sigma']}$$

$$-\frac{1}{4}II'e^{i(\Omega-\theta)+i(\Omega'-\theta')+i[(n-1)v-(n+1)V-(n+1)\varpi+\sigma+\sigma']},$$

(27, 0,0,0,2,2) $$\mathfrak{z}'^2e^{in(v-V)} = \frac{1}{2}I'^2e^{i[nv-nV-n\varpi]}$$

$$-\frac{1}{4}I'^2e^{-2i(\Omega'-\theta')+i[nv-(n-2)V-(n-2)\varpi-2\sigma']}$$

$$-\frac{1}{4}I'^2e^{2i(\Omega'-\theta')+i[nv-(n+2)V-(n+2)\varpi+2\sigma']},$$

(27, 0,0,2',0,2) $$\mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{z}}{dv}e^{in(v-V)} = -\frac{1}{4}iI^2e^{-2i(\Omega-\theta)+i[(n+2)v-nV-n\varpi-2\sigma]}$$

$$+\frac{1}{4}iI^2e^{2i(\Omega-\theta)+i[(n-2)v-nV-n\varpi+2\sigma]},$$

(27, 0,0,1'1',0,2) $$\left(\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)^2e^{in(v-V)} = \frac{1}{2}I^2e^{i[nv-nV-n\varpi]}$$

$$+\frac{1}{4}I^2e^{-2i(\Omega-\theta)+i[(n+2)v-nV-n\varpi-2\sigma]}$$

$$+\frac{1}{4}I^2e^{2i(\Omega-\theta)+i[(n-2)v-nV-n\varpi+2\sigma]},$$

(27, 0,0,1',1,2) $$\mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}}{dv}e^{in(v-V)} = -\frac{1}{4}iII'e^{-i(\Omega-\theta)+i(\Omega'-\theta')+i[(n+1)v-(n+1)V-(n+1)\varpi-\sigma+\sigma']}$$

$$-\frac{1}{4}iII'e^{i(\Omega-\theta)-i(\Omega'-\theta')+i[(n-1)v-(n-1)V-(n-1)\varpi+\sigma-\sigma']}$$

$$-\frac{1}{4}iII'e^{-i(\Omega-\theta)-i(\Omega'-\theta')+i[(n+1)v-(n-1)V-(n-1)\varpi-\sigma-\sigma']}$$

$$+\frac{1}{4}iII'e^{i(\Omega-\theta)+i(\Omega'-\theta')+i[(n-1)v-(n+1)V-(n+1)\varpi+\sigma+\sigma']},$$

$$(27,0,0,0,2,2) \qquad \zeta' \frac{d\zeta}{dv} e^{i(nv-V)} = -\frac{1}{4} i I'^2 e^{-2i(\Omega-\theta)+i[nv-(n-2)V-(n-2)\omega-2\tilde{\omega}]}$$

$$+ \frac{1}{4} i I'^2 e^{2i(\Omega-\theta)+i[nv-(n+2)V-(n+2)\omega+2\tilde{\omega}]}$$

Evidemment, on pourra, dans toutes ces formules, échanger les indices simultanément avec n en $-n$, et on parviendra ainsi à exprimer les fonctions dont il s'agit moyennant les variables v′ et V′.

62. Les termes du troisième degré, dont il s'agit maintenant de trouver les expressions, se divisent en deux groupes bien distincts, l'un de l'autre. Le premier groupe renferme les termes du troisième et du premier degré par rapport aux fonctions anastématiques, je les appelle *termes à caractère anastématique,* et l'autre groupe, les termes du deuxième degré par rapport aux fonctions anastématiques, multipliés par une fonction diastématique du premier degré: ces termes seront nommés *termes à caractère diastématiques.*

Pour déduire les termes du premier groupe, voici quelques formules utiles:

$$(28) \qquad \zeta^3 = -\frac{3}{8} i I^3 e^{i(\Omega-\theta)+i(v-\tilde{\omega})} + \frac{3}{8} i I^3 e^{-i(\Omega-\theta)-i(v-\tilde{\omega})}$$

$$+ \frac{1}{8} i I^3 e^{-3i(\Omega-\theta)-3i(v-\tilde{\omega})} - \frac{1}{8} i I^3 e^{3i(\Omega-\theta)+3i(v-\tilde{\omega})},$$

$$(29) \qquad \zeta^2 \zeta' = \frac{1}{4} i I^2 I' e^{i(\Omega-\theta)+i(v-\tilde{\omega})+i(v-V)}$$

$$- \frac{1}{4} i I^2 I' e^{-i(\Omega-\theta)-i(v-\tilde{\omega})+i(v-V)}$$

$$- \frac{1}{8} i I^2 I' e^{2i(\Omega-\theta)+i(\Omega'-\theta')+i(v-2\tilde{\omega}+\tilde{\omega}')+i(v-V)}$$

$$- \frac{1}{8} i I^2 I' e^{2i(\Omega-\theta)+i(\Omega'-\theta')+i(3v+2\tilde{\omega}+\tilde{\omega}')+i(v-V)}$$

$$+ \frac{1}{8} i I^2 I' e^{2i(\Omega-\theta)-i(\Omega'-\theta')+i(3v-2\tilde{\omega}-\tilde{\omega}')-i(v-V)}$$

$$+ \frac{1}{8} i I^2 I' e^{2i(\Omega-\theta)-i(\Omega'-\theta')+i(v+2\tilde{\omega}-\tilde{\omega}')-i(v-V)},$$

$$(30)\quad \zeta'^2 = \frac{1}{4} i I I'^2 e^{i(\Omega'-\Theta)-i(v-\varpi)}$$

$$-\frac{1}{4} i I I'^2 e^{-i(\Omega'-\Theta)+i(v-\varpi)}$$

$$+\frac{1}{8} i I I'^2 e^{i(\Omega'-\Theta)-2i(\Omega'-\Theta)+i(3v-\tilde{\omega}-2\varpi)-2i(v-v)}$$

$$-\frac{1}{8} i I I'^2 e^{i(\Omega'-\Theta)-2i(\Omega'-\Theta)+i(v+\tilde{\omega}-2\varpi)-2i(v-v)}$$

$$+\frac{1}{8} i I I'^2 e^{-i(\Omega'-\Theta)+2i(\Omega'-\Theta)+i(-v-\tilde{\omega}+2\varpi)+2i(v-v)}$$

$$-\frac{1}{8} i I I'^2 e^{i(\Omega'-\Theta)+2i(\Omega'-\Theta)+i(-3v+\tilde{\omega}+2\varpi)+2i(v-v)},$$

$$(31)\quad \zeta'^3 = -\frac{3}{8} i I'^3 e^{-i(\Omega'-\Theta)+i(v-\tilde{\omega})-i(v-v)} + \frac{3}{8} i I'^3 e^{i(\Omega'-\Theta)-i(v-\tilde{\omega})+i(v-v)}$$

$$+\frac{1}{8} i I'^3 e^{-3i(\Omega'-\Theta)+3i(v-\tilde{\omega})-3i(v-v)} - \frac{1}{8} i I'^3 e^{3i(\Omega'-\Theta)-3i(v-\tilde{\omega})+3i(v-v)},$$

En multipliant ces expressions par

$$e^{in(v-V)} - e^{in(v-V-\omega)},$$

on aura immédiatement les termes à caractère anastématique du troisième degré, dont les coefficients sont indépendants des fonctions diastématiques. Il paraît donc inutile de les reproduire ici.

Quant aux termes à caractère anastématique du troisième degré qui se trouvent multipliés par un facteur diastématique du deuxième degré, on les obtient facilement par substitution des expressions du groupe C dans les formules (18, 1), (18, 2), (18, 3), (18, 4), ainsi que dans celles qu'on déduit en multipliant les formules (18, 1) et (18, 2) par ρ^2, par $\rho\rho'$ ou par ρ'^2. On arrive de la sorte aux:

J) *Termes à caractère anastématique du troisième degré.*

$$(32,\ 00,1,0,3)\quad \zeta e^{in(v-V)} = -\frac{1}{2} i\left[\xi_2^{n,0}\eta'^2 + \varepsilon_2^{n\zeta,0}\eta^2\right] I e^{i(\Omega'-\Theta)+i(n+1)v-nV-n\omega-\varpi}$$

$$-\frac{1}{2} i\varepsilon_2^{n\zeta,2}\eta^2 I e^{2i(\pi-\Gamma)-i(\Omega'-\Theta)+i(n+3)v-nV-2\varpi-n\omega-\tilde{\omega}}$$

(Cette formule se continue à la page suivante.)

$$-\frac{1}{2}i\varepsilon_2^{n\varsigma,2}\gamma_{\prime}^2 Ie^{2i(\pi-\Gamma)-i(\Omega-\Theta)+i[(n-1)v-nV+2\tilde\omega-n\tilde\omega'-\bar\vartheta]}$$

$$+\frac{1}{2}i\xi_1^{n,-1}\varepsilon_1^{(n-1)\varsigma,-1}\gamma_{\prime}\gamma_{\prime}'Ie^{-i(\pi-\Gamma)-i(\pi'-\Gamma')-i(\Omega-\Theta)+i[(n+2)v-(n-1)V-\tilde\omega-n\tilde\omega'-\bar\vartheta]}$$

$$+\frac{1}{2}i\xi_1^{n,-1}\varepsilon_1^{(n-1)\varsigma,1}\gamma_{\prime}\gamma_{\prime}'Ie^{i(\pi-\Gamma)-i(\pi'-\Gamma')-i(\Omega-\Theta)+i[nv-(n-1)V+\tilde\omega-n\tilde\omega'-\bar\vartheta]}$$

$$+\frac{1}{2}i\xi_1^{n,1}\varepsilon_1^{(n+1)\varsigma,-1}\gamma_{\prime}\gamma_{\prime}'Ie^{-i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')-i(\Omega-\Theta)+i[(n+2)v-(n+1)V-\tilde\omega-n\tilde\omega'-\bar\vartheta]}$$

$$+\frac{1}{2}i\xi_1^{n,1}\varepsilon_1^{(n+1)\varsigma,1}\gamma_{\prime}\gamma_{\prime}'Ie^{i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')-i(\Omega-\Theta)+i[nv-(n+1)V+\tilde\omega-n\tilde\omega'-\bar\vartheta]}$$

$$-\frac{1}{2}i\xi_2^{n,-2}\gamma_{\prime}'^2Ie^{-2i(\pi'-\Gamma')+i[(n+1)v-(n-2)V-n\tilde\omega'-\bar\vartheta]}$$

$$-\frac{1}{2}i\xi_2^{n,2}\gamma_{\prime}'^2Ie^{2i(\pi'-\Gamma')+i[(n+1)v-(n+2)V-n\tilde\omega'-\bar\vartheta]}$$

$$-\frac{1}{2}i\left[\xi_2^{n,0}\gamma_{\prime}'^2+\varepsilon_2^{n\varsigma,0}\gamma_{\prime}^2\right]Ie^{i(\Omega-\Theta)+i[(n-1)v-nV-n\tilde\omega'+\bar\vartheta]}$$

$$+\frac{1}{2}i\varepsilon_2^{n\varsigma,-2}\gamma_{\prime}^2Ie^{-2i(\pi-\Gamma)+i(\Omega-\Theta)+i[(n+1)v-nV-2\tilde\omega-n\tilde\omega'+\bar\vartheta]}$$

$$+\frac{1}{2}i\varepsilon_2^{n\varsigma,2}\gamma_{\prime}^2Ie^{2i(\pi-\Gamma)+i(\Omega-\Theta)+i[(n-3)v-nV+2\tilde\omega-n\tilde\omega'+\bar\vartheta]}$$

$$-\frac{1}{2}i\xi_1^{n,-1}\varepsilon_1^{(n-1)\varsigma,-1}\gamma_{\prime}\gamma_{\prime}'Ie^{-i(\pi-\Gamma)-i(\pi'-\Gamma')+i(\Omega-\Theta)+i[nv-(n-1)V-\tilde\omega-n\tilde\omega'+\bar\vartheta]}$$

$$-\frac{1}{2}i\xi_1^{n,-1}\varepsilon_1^{(n-1)\varsigma,1}\gamma_{\prime}\gamma_{\prime}'Ie^{i(\pi-\Gamma)-i(\pi'-\Gamma')+i(\Omega-\Theta)+i[(n-2)v-(n-1)V+\tilde\omega-n\tilde\omega'+\bar\vartheta]}$$

$$-\frac{1}{2}i\xi_1^{n,1}\varepsilon_1^{(n+1)\varsigma,-1}\gamma_{\prime}\gamma_{\prime}'Ie^{-i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')+i(\Omega-\Theta)+i[nv-(n+1)V-\tilde\omega-n\tilde\omega'+\bar\vartheta]}$$

$$-\frac{1}{2}i\xi_1^{n,1}\varepsilon_1^{(n+1)\varsigma,1}\gamma_{\prime}\gamma_{\prime}'Ie^{i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')+i(\Omega-\Theta)+i[(n-2)v-(n+1)V+\tilde\omega-n\tilde\omega'+\bar\vartheta]}$$

$$+\frac{1}{2}i\xi_2^{n,-2}\gamma_{\prime}'^2Ie^{-2i(\pi'-\Gamma')+i(\Omega-\Theta)+i[(n-1)v-(n-2)V-n\tilde\omega'+\bar\vartheta]}$$

$$+\frac{1}{2}i\xi_2^{n,2}\gamma_{\prime}'^2Ie^{2i(\pi'-\Gamma')+i(\Omega-\Theta)+i[(n-1)v-(n+2)V-n\tilde\omega'+\bar\vartheta]},$$

(32, 0,0,0,1,3)

$$\zeta' e^{i(mv-V)} = $$

$$\frac{1}{2} i \left[\xi_2^{n-1,0}\eta'^2 + \varepsilon_2^{(n-1)\varsigma,0}\eta^2\right] I' e^{-i(\Omega-\theta)+i[nv-(n-1)V-(n-1)\omega'-\theta']}$$

$$- \frac{1}{2} i \varepsilon_2^{(n-1)\varsigma,-2}\eta^2 I' e^{-2i(\pi-\Gamma)-i(\Omega-\theta)+i[(n+2)v-(n-1)V-2\omega-(n-1)\omega'-\theta']}$$

$$- \frac{1}{2} i \varepsilon_2^{(n-1)\varsigma,2}\eta^2 I' e^{2i(\pi-\Gamma)-i(\Omega-\theta)+i[(n-2)v-(n-1)V+2\omega-(n-1)\omega'-\theta']}$$

$$+ \frac{1}{2} i \xi_1^{n-1,-1}\varepsilon_1^{(n-2)\varsigma,-1}\eta\eta' I' e^{-i(\pi-\Gamma)-i(\pi'-\Gamma)-i(\Omega-\theta)+i[(n+1)v-(n-2)V-\omega-(n-1)\omega'-\theta']}$$

$$+ \frac{1}{2} i \xi_1^{n-1,1}\varepsilon_1^{(n-2)\varsigma,1}\eta\eta' I' e^{i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma)-i(\Omega-\theta)+i[(n-1)v-(n-2)V+\omega-(n-1)\omega'-\theta']}$$

$$+ \frac{1}{2} i \xi_1^{n-1,1}\varepsilon_1^{n\varsigma,-1}\eta\eta' I' e^{-i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma)-i(\Omega-\theta)+i[(n+1)v-nV-\omega-(n-1)\omega'-\theta']}$$

$$+ \frac{1}{2} i \xi_1^{n-1,1}\varepsilon_1^{n\varsigma,1}\eta\eta' I' e^{i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma)-i(\Omega-\theta)+i[(n-1)v-nV+\omega-(n-1)\omega'-\theta']}$$

$$- \frac{1}{2} i \xi_2^{n-1,-2}\eta'^2 I' e^{-2i(\pi'-\Gamma)-i(\Omega-\theta)+i[nv-(n-3)V-(n-1)\omega'-\theta']}$$

$$- \frac{1}{2} i \xi_2^{n-1,2}\eta'^2 I' e^{2i(\pi'-\Gamma)-i(\Omega-\theta)+i[nv-(n+1)V-(n-1)\omega'-\theta']}$$

$$- \frac{1}{2} i \left[\xi_2^{n+1,0}\eta'^2 + \varepsilon_2^{(n+1)\varsigma,0}\eta^2\right] I' e^{i(\Omega-\theta)+i[nv-(n+1)V-(n+1)\omega'+\theta']}$$

$$+ \frac{1}{2} i \varepsilon_2^{(n+1)\varsigma,-2}\eta^2 I' e^{-2i(\pi-\Gamma)+i(\Omega-\theta)+i[(n+2)v-(n+1)V-2\omega-(n+1)\omega'+\theta']}$$

$$+ \frac{1}{2} i \varepsilon_2^{(n+1)\varsigma,2}\eta^2 I' e^{2i(\pi-\Gamma)+i(\Omega-\theta)+i[(n-2)v-(n+1)V+2\omega-(n+1)\omega'+\theta']}$$

$$- \frac{1}{2} i \xi_1^{n+1,-1}\varepsilon_1^{n\varsigma,-1}\eta\eta' I' e^{-i(\pi-\Gamma)-i(\pi'-\Gamma)+i(\Omega-\theta)+i[(n+1)v-nV-\omega-(n+1)\omega'+\theta']}$$

$$- \frac{1}{2} i \xi_1^{n+1,-1}\varepsilon_1^{n\varsigma,1}\eta\eta' I' e^{i(\pi-\Gamma)-i(\pi'-\Gamma)+i(\Omega-\theta)+i[(n-1)v-nV+\omega-(n+1)\omega'+\theta']}$$

$$- \frac{1}{2} i \xi_1^{n+1,1}\varepsilon_1^{(n+2)\varsigma,-1}\eta\eta' I' e^{-i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma)+i(\Omega-\theta)+i[(n+1)v-(n+2)V-\omega-(n+1)\omega'+\theta']}$$

$$- \frac{1}{2} i \xi_1^{n+1,1}\varepsilon_1^{(n+2)\varsigma,1}\eta\eta' I' e^{i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma)+i(\Omega-\theta)+i[(n-1)v-(n+2)V+\omega-(n+1)\omega'+\theta']}$$

$$+ \frac{1}{2} i \xi_2^{n+1,-2}\eta'^2 I' e^{-2i(\pi'-\Gamma)+i(\Omega-\theta)+i[nv-(n-1)V-(n+1)\omega'+\theta']}$$

$$+ \frac{1}{2} i \xi_2^{n+1,2}\eta'^2 I' e^{2i(\pi'-\Gamma)+i(\Omega-\theta)+i[nv-(n+3)V-(n+1)\omega'+\theta']},$$

$$(32,\ 1,0,1,0,3)\quad \rho\zeta e^{im(v-v')} = \frac{1}{4} i\left(\varepsilon_1^{n\varsigma,1} + \varepsilon_1^{n\varsigma,-1}\right)\eta^2 I e^{-i(\Omega-\Theta)+i[(n+1)v-nV-n\varpi'-\bar{\vartheta}]}$$

$$+\frac{1}{4} i\varepsilon_1^{n\varsigma,-1}\eta^2 I e^{-2i(\pi-\Gamma)-i(\Omega-\Theta)+i[(n+3)v-nV-2\varpi-n\varpi-\bar{\vartheta}]}$$

$$+\frac{1}{4} i\varepsilon_1^{n\varsigma,1}\eta^2 I e^{2i(\pi-\Gamma)-i(\Omega-\Theta)+i[(n-1)v-nV+2\varpi-n\varpi-\bar{\vartheta}]}$$

$$-\frac{1}{4} i\xi_1^{n,-1}\eta\eta' I e^{-i(\pi-\Gamma)-i(\pi'-\Gamma')-i(\Omega-\Theta)+i[(n+2)v-(n-1)V-\varpi-n\varpi'-\bar{\vartheta}]}$$

$$-\frac{1}{4} i\xi_1^{n,-1}\eta\eta' I e^{i(\pi-\Gamma)-i(\pi'-\Gamma')-i(\Omega-\Theta)+i[nv-(n-1)V+\varpi-n\varpi'-\bar{\vartheta}]}$$

$$-\frac{1}{4} i\xi_1^{n,1}\eta\eta' I e^{-i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')-i(\Omega-\Theta)+i[(n+2)v-(n+1)V-\varpi-n\varpi'-\bar{\vartheta}]}$$

$$-\frac{1}{4} i\xi_1^{n,1}\eta\eta' I e^{i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')-i(\Omega-\Theta)+i[nv-(n+1)V+\varpi-n\varpi-\bar{\vartheta}]}$$

$$-\frac{1}{4} i\left(\varepsilon_1^{n\varsigma,1} + \varepsilon_1^{n\varsigma,-1}\right)\eta^2 I e^{i(\Omega-\Theta)+i[(n-1)v-nV-n\varpi'+\bar{\vartheta}]}$$

$$-\frac{1}{4} i\varepsilon_1^{n\varsigma,-1}\eta^2 I e^{-2i(\pi-\Gamma)+i(\Omega-\Theta)+i[(n+1)v-nV-2\varpi-n\varpi'+\bar{\vartheta}]}$$

$$-\frac{1}{4} i\varepsilon_1^{n\varsigma,1}\eta^2 I e^{2i(\pi-\Gamma)+i(\Omega-\Theta)+i[(n-3)v-nV+2\varpi-n\varpi'+\bar{\vartheta}]}$$

$$+\frac{1}{4} i\xi_1^{n,-1}\eta\eta' I e^{-i(\pi-\Gamma)-i(\pi'-\Gamma')+i(\Omega-\Theta)+i[nv-(n-1)V-\varpi-n\varpi'+\bar{\vartheta}]}$$

$$+\frac{1}{4} i\xi_1^{n,-1}\eta\eta' I e^{i(\pi-\Gamma)-i(\pi'-\Gamma')+i(\Omega-\Theta)+i[(n-2)v-(n-1)V+\varpi-n\varpi'+\bar{\vartheta}]}$$

$$+\frac{1}{4} i\xi_1^{n,1}\eta\eta' I e^{-i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')+i(\Omega-\Theta)+i[nv-(n+1)V-\varpi-n\varpi'+\bar{\vartheta}]}$$

$$+\frac{1}{4} i\xi_1^{n,1}\eta\eta' I e^{i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')+i(\Omega-\Theta)+i[(n-2)v-(n+1)V+\varpi-n\varpi'+\bar{\vartheta}]},$$

$$(32,\ 1,0,0,1,3)\quad \rho\zeta' e^{im(v-v')} = \frac{1}{4} i\left(\varepsilon_1^{(n-1)\varsigma,1} + \varepsilon_1^{(n-1)\varsigma,-1}\right)\eta^2 I' e^{-i(\Omega'-\Theta')+i[nv-(n-1)V-(n-1)\varpi-\bar{\vartheta}']}$$

$$+\frac{1}{4} i\varepsilon_1^{(n-1)\varsigma,-1}\eta^2 I' e^{-2i(\pi-\Gamma)-i(\Omega'-\Theta')+i[(n+2)v-(n-1)V-2\varpi-(n-1)\varpi'-\bar{\vartheta}']}$$

$$+\frac{1}{4} i\varepsilon_1^{(n-1)\varsigma,1}\eta^2 I' e^{2i(\pi-\Gamma)-i(\Omega'-\Theta')+i[(n-2)v-(n-1)V+2\varpi-(n-1)\varpi'-\bar{\vartheta}']}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$-\frac{1}{4}i\xi_1^{n-1,-1}\eta\eta' I' e^{-i(\varpi-\Gamma)-i(\varpi'-\Gamma')+i(\Omega-\theta)+i[(n+1)v-(n-2)V-\omega-(n-1)\omega'+\bar{\omega}]}$$

$$-\frac{1}{4}i\xi_1^{n-1,-1}\eta\eta' I' e^{i(\varpi-\Gamma)-i(\varpi'-\Gamma')+i(\Omega-\theta)+i[(n-1)v-(n-2)V+\omega-(n-1)\omega+\bar{\omega}]}$$

$$-\frac{1}{4}i\xi_1^{n-1,1}\eta\eta' I' e^{-i(\varpi-\Gamma)+i(\varpi'-\Gamma')-i(\Omega-\theta)+i[(n+1)v-nV-\omega-(n-1)\omega-\bar{\omega}]}$$

$$-\frac{1}{4}i\xi_1^{n-1,1}\eta\eta' I' e^{i(\varpi-\Gamma)+i(\varpi'-\Gamma')-i(\Omega-\theta)+i[(n-1)v-nV+\omega-(n-1)\omega-\bar{\omega}]}$$

$$-\frac{1}{4}i\left(\varepsilon_1^{(n+1)\varphi,1}+\varepsilon_1^{(n+1)\varphi,-1}\right)\eta^2 I' e^{i(\Omega-\theta)+i[nv-(n+1)V-(n+1)\omega+\bar{\omega}]}$$

$$-\frac{1}{4}i\varepsilon_1^{(n+1)\varphi,-1}\eta^2 I' e^{-2i(\varpi-\Gamma)+i(\Omega-\theta)+i[(n+2)v-(n+1)V-2\omega-(n+1)\omega+\bar{\omega}]}$$

$$-\frac{1}{4}i\varepsilon_1^{(n+1)\varphi,1}\eta^2 I' e^{2i(\varpi-\Gamma)+i(\Omega-\theta)+i[(n-2)v-(n+1)V+2\omega-(n+1)\omega+\bar{\omega}]}$$

$$+\frac{1}{4}i\xi_1^{n+1,-1}\eta\eta' I' e^{-i(\varpi-\Gamma)-i(\varpi'-\Gamma')+i(\Omega-\theta)+i[(n+1)v-nV-\omega-(n+1)\omega+\bar{\omega}]}$$

$$+\frac{1}{4}i\xi_1^{n+1,-1}\eta\eta' I' e^{i(\varpi-\Gamma)-i(\varpi'-\Gamma')+i(\Omega-\theta)+i[(n-1)v-nV+\omega-(n+1)\omega+\bar{\omega}]}$$

$$+\frac{1}{4}\xi_1^{n+1,1}\eta\eta' I' e^{-i(\varpi-\Gamma)+i(\varpi'-\Gamma')+i(\Omega-\theta)+i[(n+1)v-(n+2)V-\omega-(n+1)\omega+\bar{\omega}]}$$

$$+\frac{1}{4}\xi_1^{n+1,1}\eta\eta' I' e^{i(\varpi-\Gamma)+i(\varpi'-\Gamma')+i(\Omega-\theta)+i[(n-1)v-(n+2)V+\omega-(n+1)\omega+\bar{\omega}]},$$

$$(32,\ 0,1,1,0,3)\quad \rho'_3 e^{im(v-V)} = \frac{1}{4}i\varepsilon_1^{(n-1)\varphi,-1}\eta\eta' I e^{-i(\varpi-\Gamma)-i(\varpi'-\Gamma')-i(\Omega-\theta)+i[(n+2)v-(n-1)V-\omega-n\omega-\bar{\omega}]}$$

$$+\frac{1}{4}i\varepsilon_1^{(n-1)\varphi,1}\eta\eta' I e^{i(\varpi-\Gamma)-i(\varpi'-\Gamma')-i(\Omega-\theta)+i[nv-(n-1)V+\omega-n\omega-\bar{\omega}]}$$

$$+\frac{1}{4}i\varepsilon_1^{(n+1)\varphi,-1}\eta\eta' I e^{-i(\varpi-\Gamma)+i(\varpi'-\Gamma')-i(\Omega-\theta)+i[(n+2)v-(n+1)V-\omega-n\omega-\bar{\omega}]}$$

$$+\frac{1}{4}i\varepsilon_1^{(n+1)\varphi,1}\eta\eta' I e^{i(\varpi-\Gamma)+i(\varpi'-\Gamma')-i(\Omega-\theta)+i[nv-(n+1)V+\omega-n\omega-\bar{\omega}]}$$

$$-\frac{1}{4}i\left(\xi_1^{n-1,1}+\xi_1^{n+1,-1}\right)\eta'^2 I e^{-i(\Omega-\theta)+i[(n+1)v-nV-n\omega-\bar{\omega}]}$$

$$-\frac{1}{4}i\xi_1^{n-1,-1}\eta'^2 I e^{-2i(\varpi'-\Gamma')-i(\Omega-\theta)+i[(n+1)v-(n-2)V-n\omega-\bar{\omega}]}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$-\frac{1}{4}i\xi_1^{n+1,1}\eta'^2 I e^{2i(\pi-\Gamma')-ni(\Omega-\Theta)+i[(n+1)v-(n+2)V-n\omega-\vartheta]}$$

$$-\frac{1}{4}i\Xi_1^{(n-1)\varsigma,-1}\eta\eta' I e^{-ni(\pi-\Gamma')-i(\pi-\Gamma')+ni(\Omega-\Theta)+i[nv-(n-1)V-\omega-n\bar{\omega}+\vartheta]}$$

$$-\frac{1}{4}i\Xi_1^{(n-1)\varsigma,1}\eta\eta' I e^{i(\pi-\Gamma')-ni(\pi-\Gamma')+ni(\Omega-\Theta)+i[(n-2)v-(n-1)V+\bar{\omega}-n\omega'+\bar{\vartheta}]}$$

$$-\frac{1}{4}i\Xi_1^{(n+1)\varsigma,-1}\eta\eta' I e^{-ni(\pi-\Gamma')+ni(\pi'-\Gamma')+ni(\Omega-\Theta)+i[nv-(n+1)V-\bar{\omega}-n\omega'+\vartheta]}$$

$$-\frac{1}{4}i\Xi_1^{(n+1)\varsigma,1}\eta\eta' I e^{i(\pi-\Gamma')+ni(\pi-\Gamma')+ni(\Omega-\Theta)+i[(n-2)v-(n+1)V+\omega-n\omega'+\vartheta]}$$

$$+\frac{1}{4}i(\xi_1^{n-1,1}+\xi_1^{n+1,-1})\eta'^2 I e^{ni(\Omega-\Theta)+i[(n-1)v-nV-n\omega+\bar{\vartheta}]}$$

$$+\frac{1}{4}i\xi_1^{n-1,-1}\eta'^2 I e^{-2i(\pi'-\Gamma')+ni(\Omega-\Theta)+i[(n-1)v-(n-2)V-n\omega'+\vartheta]}$$

$$+\frac{1}{4}i\xi_1^{n+1,1}\eta'^2 I e^{2i(\pi'-\Gamma')+ni(\Omega-\Theta)+i[(n-1)v-(n+2)V-n\omega+\vartheta]},$$

$(32, 0,1,0,1,3)$ $\rho'_3 e^{i(mv-v)} =$ $\frac{1}{4}i\Xi_1^{(n-2)\varsigma,-1}\eta\eta' I' e^{-ni(\pi-\Gamma')-i(\pi'-\Gamma')-ni(\Omega-\Theta')+i[(n+1)v-(n-2)V-\omega-(n-1)\omega'-\bar{\vartheta}]}$

$$+\frac{1}{4}i\Xi_1^{(n-2)\varsigma,1}\eta\eta' I' e^{ni(\pi-\Gamma')+i(\pi'-\Gamma')-ni(\Omega-\Theta)+i[(n-1)v-(n-2)V+\bar{\omega}-(n-1)\bar{\omega}'-\vartheta']}$$

$$+\frac{1}{4}i\Xi_1^{n\varsigma,-1}\eta\eta' I' e^{-i(\pi-\Gamma')+i(\pi'-\Gamma')-ni(\Omega+\Theta)+i[(n+1)v-nV-\bar{\omega}-(n-1)\bar{\omega}'-\vartheta']}$$

$$+\frac{1}{4}i\Xi_1^{n\varsigma,1}\eta\eta' I' e^{i(\pi-\Gamma')+i(\pi'-\Gamma')-ni(\Omega-\Theta)+i[(n-1)v-nV+\omega+(n-1)\omega'-\vartheta]}$$

$$-\frac{1}{4}i(\xi_1^{n-2,1}+\xi_1^{n,-1})\eta'^2 I' e^{-ni(\Omega-\Theta')+i[nv-(n-1)V-(n-1)\omega-\bar{\vartheta}]}$$

$$-\frac{1}{4}i\xi_1^{n-2,-1}\eta'^2 I' e^{-2i(\pi'-\Gamma')-ni(\Omega-\Theta')+i[nv-(n-3)V-(n-1)\omega-\bar{\vartheta}]}$$

$$-\frac{1}{4}i\xi_1^{n,1}\eta'^2 I' e^{2i(\pi'-\Gamma')-ni(\Omega-\Theta)+i[nv-(n+1)V-(n-1)\omega-\bar{\vartheta}']}$$

$$-\frac{1}{4}i\Xi_1^{n\varsigma,-1}\eta\eta' I' e^{-i(\pi-\Gamma')-i(\pi'-\Gamma')+ni(\Omega-\Theta)+i[(n+1)v-nV-\omega-(n+1)\omega+\vartheta]}$$

$$-\frac{1}{4}i\Xi_1^{n\varsigma,1}\eta\eta' I' e^{i(\pi-\Gamma')-i(\pi-\Gamma')+ni(\Omega-\Theta)+i[(n-1)v-nV+\omega-(n+1)\omega'+\bar{\vartheta}']}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$-\frac{1}{4}i\xi_1^{(n+2)\varsigma,1}\eta\eta' I' e^{n(\pi-\Gamma)+i(\pi-\Gamma')+n(\Omega-\theta)+i[(n+1)v-(n+2)V-\omega-(n+1)\omega'+\vartheta]}$$

$$-\frac{1}{4}i\xi_1^{(n+2)\varsigma,1}\eta\eta' I' e^{n(\pi-\Gamma)+i(\pi-\Gamma')+n(\Omega-\theta)+i[(n-1)v-(n+2)V+\omega-(n+1)\omega'+\vartheta]}$$

$$+\frac{1}{4}i(\xi_1^{n,1}+\xi_1^{n+2,-1})\eta'^2 I' e^{n(\Omega-\theta)+i[nv-(n+1)V-(n+1)\omega'+\vartheta]}$$

$$+\frac{1}{4}i\xi_1^{n,-1}\eta'^2 I' e^{-2i(\pi-\Gamma')+n(\Omega-\theta)+i[nv-(n-1)V-(n+1)\omega'+\vartheta]}$$

$$+\frac{1}{4}i\xi_1^{n+2,1}\eta'^2 I' e^{2i(\pi-\Gamma')+n(\Omega-\theta)+i[nv-(n+3)V-(n+1)\omega'+\vartheta]},$$

$$(32,\ 2,0,1,0,3)\quad \rho^2\zeta e^{in(v-V)} = -\frac{1}{4}i\eta^2 I e^{-n(\Omega-\theta)+i[(n+1)v-nV-n\omega-\vartheta]}$$

$$-\frac{1}{8}i\eta^2 I e^{-2n(\pi-\Gamma)-n(\Omega-\theta)+i[(n+3)v-nV-2\omega-n\omega-\vartheta]}$$

$$-\frac{1}{8}i\eta^2 I e^{2n(\pi-\Gamma)-n(\Omega-\theta)+i[(n-1)v-nV+2\omega-n\omega-\vartheta]}$$

$$+\frac{1}{4}i\eta^2 I e^{n(\Omega-\theta)+i[(n-1)v-nV-n\omega+\vartheta]}$$

$$+\frac{1}{8}i\eta^2 I e^{-2i(\pi-\Gamma)+n(\Omega-\theta)+i[(n+1)v-nV-2\omega-n\omega+\vartheta]}$$

$$+\frac{1}{8}i\eta^2 I e^{2i(\pi-\Gamma)+n(\Omega-\theta)+i[(n-3)v-nV+2\omega-n\omega+\vartheta]},$$

$$(32,\ 2,0,0,1,3)\quad \rho^2\zeta' e^{in(v-V)} = -\frac{1}{4}i\eta^2 I' e^{-n(\Omega-\theta)+i[nv-(n-1)V-(n-1)\omega-\vartheta]}$$

$$-\frac{1}{8}i\eta^2 I' e^{-2i(\pi-\Gamma)-n(\Omega-\theta)+i[(n+2)v-(n-1)V-2\omega-(n-1)\omega-\vartheta]}$$

$$-\frac{1}{8}i\eta^2 I' e^{2i(\pi-\Gamma)-n(\Omega-\theta)+i[(n-2)v-(n-1)V+2\omega-(n-1)\omega-\vartheta]}$$

$$+\frac{1}{4}i\eta^2 I' e^{n(\Omega-\theta)+i[nv-(n+1)V-(n+1)\omega+\vartheta]}$$

$$+\frac{1}{8}i\eta^2 I' e^{-2i(\pi-\Gamma)+n(\Omega-\theta)+i[(n+2)v-(n+1)V-2\omega-(n+1)\omega+\vartheta]}$$

$$+\frac{1}{8}i\eta^2 I' e^{2i(\pi-\Gamma)+n(\Omega-\theta)+i[(n-2)v-(n+1)V+2\omega-(n+1)\omega+\vartheta]},$$

$$(32,1,1,1,0,3)\ \rho\rho'\zeta e^{in(v-V)} = -\frac{1}{8} i\eta\eta' I e^{-i(\pi-\Gamma)-i(\pi'-\Gamma')-i(\Omega-\Theta)+i[(n+2)v-(n-1)V-\varpi-n\varpi'-\bar{\vartheta}]}$$

$$-\frac{1}{8} i\eta\eta' I e^{i(\pi-\Gamma)-i(\pi'-\Gamma')-i(\Omega-\Theta)+i[nv-(n-1)V+\varpi-n\varpi'-\bar{\vartheta}]}$$

$$-\frac{1}{8} i\eta\eta' I e^{-i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')-i(\Omega-\Theta)+i[(n+2)v-(n+1)V-\varpi-n\varpi'-\bar{\vartheta}]}$$

$$-\frac{1}{8} i\eta\eta' I e^{i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')-i(\Omega-\Theta)+i[nv-(n+1)V+\varpi-n\varpi'-\bar{\vartheta}]}$$

$$+\frac{1}{8} i\eta\eta' I e^{-i(\pi-\Gamma)-i(\pi'-\Gamma')+i(\Omega-\Theta)+i[nv-(n-1)V-\varpi-n\varpi'+\bar{\vartheta}]}$$

$$+\frac{1}{8} i\eta\eta' I e^{i(\pi-\Gamma)-i(\pi'-\Gamma')+i(\Omega-\Theta)+i[(n-2)v-(n-1)V+\varpi-n\varpi'+\bar{\vartheta}]}$$

$$+\frac{1}{8} i\eta\eta' I e^{-i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')+i(\Omega-\Theta)+i[nv-(n+1)V-\varpi-n\varpi'+\bar{\vartheta}]}$$

$$+\frac{1}{8} i\eta\eta' I e^{i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')+i(\Omega-\Theta)+i[(n-2)v-(n+1)V+\varpi-n\varpi'+\bar{\vartheta}]},$$

$$(32,1,1,0,1,3)\ \rho\rho'\zeta' e^{in(v-V)} = -\frac{1}{8} i\eta\eta' I' e^{-i(\pi-\Gamma)-i(\pi'-\Gamma')-i(\Omega'-\Theta')+i[(n+1)v-(n-2)V-\varpi-(n-1)\varpi'-\bar{\vartheta}']}$$

$$-\frac{1}{8} i\eta\eta' I' e^{i(\pi-\Gamma)-i(\pi'-\Gamma')-i(\Omega'-\Theta')+i[(n-1)v-(n-2)V+\varpi-(n-1)\varpi'-\bar{\vartheta}']}$$

$$-\frac{1}{8} i\eta\eta' I' e^{-i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')-i(\Omega'-\Theta')+i[(n+1)v-nV-\varpi-(n-1)\varpi'-\bar{\vartheta}']}$$

$$-\frac{1}{8} i\eta\eta' I' e^{i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')-i(\Omega'-\Theta')+i[(n-1)v-nV+\varpi-(n-1)\varpi'-\bar{\vartheta}']}$$

$$+\frac{1}{8} i\eta\eta' I' e^{-i(\pi-\Gamma)-i(\pi'-\Gamma')+i(\Omega'-\Theta')+i[(n+1)v-nV-\varpi-(n+1)\varpi'+\bar{\vartheta}']}$$

$$+\frac{1}{8} i\eta\eta' I' e^{i(\pi-\Gamma)-i(\pi'-\Gamma')+i(\Omega'-\Theta')+i[(n-1)v-nV+\varpi-(n+1)\varpi'+\bar{\vartheta}']}$$

$$+\frac{1}{8} i\eta\eta' I' e^{-i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')+i(\Omega'-\Theta')+i[(n+1)v-(n+2)V-\varpi-(n+1)\varpi'+\bar{\vartheta}']}$$

$$+\frac{1}{8} i\eta\eta' I' e^{i(\pi-\Gamma)+i(\pi'-\Gamma')+i(\Omega'-\Theta')+i[(n-1)v-(n+2)V+\varpi-(n+1)\varpi'+\bar{\vartheta}']},$$

$$(32,0,2,1,0,3)\quad \rho'^2\zeta e^{in(\mathrm{v}-\mathrm{V})} = -\frac{1}{4}i\eta'^2 I e^{-i(\Omega-\theta)+i[(n+1)\mathrm{v}-n\mathrm{V}-n\omega-\vartheta]}$$

$$-\frac{1}{8}i\eta'^2 I e^{-2i(\pi'-\Gamma')-i(\Omega-\theta)+i[(n+1)\mathrm{v}-(n-2)\mathrm{V}-n\omega-\vartheta]}$$

$$-\frac{1}{8}i\eta'^2 I e^{2i(\pi-\Gamma')-i(\Omega-\theta)+i[(n+1)\mathrm{v}-(n+2)\mathrm{V}-n\omega-\vartheta]}$$

$$+\frac{1}{4}i\eta'^2 I e^{i(\Omega-\theta)+i[(n-1)\mathrm{v}-n\mathrm{V}-n\bar{\omega}+\vartheta]}$$

$$+\frac{1}{8}i\eta'^2 I e^{-2i(\pi-\Gamma')+i(\Omega-\theta)+i[(n-1)\mathrm{v}-(n-2)\mathrm{V}-n\bar{\omega}+\vartheta]}$$

$$+\frac{1}{8}i\eta'^2 I e^{2i(\pi'-\Gamma')+i(\Omega-\theta)+i[(n-1)\mathrm{v}-(n+2)\mathrm{V}-n\bar{\omega}+\vartheta]},$$

$$(32,0,2,0,1,3)\quad \rho'^2\zeta' e^{in(\mathrm{v}-\mathrm{V})} = -\frac{1}{4}i\eta'^2 I' e^{-i(\Omega'-\theta')+i[n\mathrm{v}-(n-1)\mathrm{V}-(n-1)\omega'-\vartheta]}$$

$$-\frac{1}{8}i\eta'^2 I' e^{-2i(\pi'-\Gamma')-i(\Omega'-\theta')+i[n\mathrm{v}-(n-3)\mathrm{V}-(n-1)\bar{\omega}'-\vartheta]}$$

$$-\frac{1}{8}i\eta'^2 I' e^{2i(\pi-\Gamma')-i(\Omega'-\theta')+i[n\mathrm{v}-(n+1)\mathrm{V}-(n-1)\omega'-\vartheta]}$$

$$+\frac{1}{4}i\eta'^2 I' e^{i(\Omega'-\theta')+i[n\mathrm{v}-(n+1)\mathrm{V}-(n+1)\omega+\vartheta]}$$

$$+\frac{1}{8}i\eta'^2 I' e^{-2i(\pi'-\Gamma')+i(\Omega'-\theta')+i[n\mathrm{v}-(n-1)\mathrm{V}-(n+1)\omega'+\vartheta]}$$

$$+\frac{1}{8}i\eta'^2 I' e^{2i(\pi-\Gamma')+i(\Omega-\theta)+i[n\mathrm{v}-(n+3)\mathrm{V}-(n+1)\bar{\omega}+\vartheta]}.$$

La règle générale relativement au changement des lettres marquées par un accent, et non marquées, simultanément avec celui de n en $-n$, s'applique aussi aux formules dernièrement obtenues; il convient toutefois, d'en donner un exemple. Reprenons, dans ce but, l'équation (11, 0, 2, 2), et faisons-y entrer les changements dont il s'agit. Il en résultera immédiatement:

$$\rho^2 e^{in(\mathrm{v}-\mathrm{V})} = \frac{1}{2}\eta^2 e^{-i[n\mathrm{v}'-n\mathrm{V}'-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{4}\eta^2 e^{-2i(\pi-\Gamma)-i[n\mathrm{v}-(n+2)\mathrm{V}-n\omega]}$$

$$+\frac{1}{4}\eta^2 e^{2i(\pi-\Gamma)-i[n\mathrm{v}'-(n-2)\mathrm{V}'-n\omega]}.$$

Multiplions finalement cette formule par celle-ci:

$$\zeta = -\frac{1}{2}\,iIe^{-i(\Omega-\Theta)-i[-V'-\omega+\vartheta]} + \frac{1}{2}\,iIe^{i(\Omega-\Theta)+i[-V'-\omega+\vartheta]},$$

ce qui nous donnera:

$$\rho^2\zeta e^{i(nv-nv')} = -\frac{1}{4}\,i\eta^2 Ie^{-i(\Omega-\Theta)-i[nv-(n+1)V'-(n+1)\omega'+\vartheta]}$$
$$-\frac{1}{8}\,i\eta^2 Ie^{-2i(\pi-\Gamma)-i(\Omega-\Theta)-i[nv'-(n+3)V'-(n+1)\omega'+\vartheta]}$$
$$- \;.\;.\;.\;.$$

C'est précisément le résultat auquel on parvient en changeant, dans l'équation (32, 0,2,0,1,3), ρ' en ρ, ζ' en ζ, v en v', v' en v, etc. et n en $-n$.

63. Venons finalement aux termes à caractère diastématique dépendant d'un facteur anastématique de degré pair.

Les expressions des fonctions nH que nous venons de rassembler, dans le chapitre précédent, ainsi que celles qui en dérivent par différentiation, donnent naissance aux termes dont il s'agit maintenant: d'abord si l'on y introduit l'argument V au lieu de v'; ensuite, si l'on multiplie les expressions mentionnées par un facteur de la forme $\rho^s\rho'^{s'}$. Evidemment, des termes de la nature envisagée proviennent encore par l'ensemble de ces deux procédés. On reconnaît facilement que les termes à caractère diastématique renferment dans leurs coefficients un facteur diastématique de degré impair.

Un terme quelconque du développement général de $\cos nH$ ayant la forme

$$T = K\cos(n(v-v') + mv' - i\vartheta - i'\vartheta' - i(\Omega-\Theta) - i'(\Omega'-\Theta')),$$

m, n, i, i' étant des entiers positifs ou négatifs, et K, un produit de degré pair par rapport aux fonctions anastématiques multiplié par un facteur numérique, on obtient les divers termes qu'on cherche, en introduisant, dans l'expression

$$\rho^s\rho'^{s'}e^{i[n(v-v')+mv'-i(\Omega-\Theta)-i'(\Omega'-\Theta')-i\vartheta-i'\vartheta']}$$
$$= e^{-i(\Omega-\Theta)-i'(\Omega'-\Theta')+i[mv'-i\vartheta-i'\vartheta']}\rho^s\rho'^{s'}e^{i(n-m)(v-v')},$$

les valeurs qu'on a données dans le n° 59. En opérant de la sorte, et en ne considérant que les termes affectés des premières puissances de η et de η', on parviendra rapidement aux

K) *Termes à caractère diastématique du troisième degré.*

$(33, 1, 3) \qquad \cos H -$

$$\frac{1}{4}\varepsilon_1^{0,-1}\eta(I^2+I'^2)\cos[2v-V-\varpi-\varpi'-(\pi-\Gamma)]$$

$$+\frac{1}{4}\varepsilon_1^{0,1}\eta(I^2+I'^2)\cos[-V+\varpi-\varpi'+(\pi-\Gamma)]$$

$$-\frac{1}{4}\xi_1^{1,-1}\eta'(I^2+I'^2)\cos[v-\varpi'-(\pi'-\Gamma')]$$

$$-\frac{1}{4}\xi_1^{1,1}\eta'(I^2+I'^2)\cos[v-2V-\varpi'+(\pi'-\Gamma')]$$

$$-\frac{1}{4}\varepsilon_1^{0,1}\eta I^2\cos[2v+V-\varpi+\varpi'-2\vartheta-(\pi-\Gamma)-2(\Omega-\Theta)]$$

$$-\frac{1}{4}\varepsilon_1^{0,-1}\eta I^2\cos[V+\varpi+\varpi'-2\vartheta+(\pi-\Gamma)-2(\Omega-\Theta)]$$

$$+\frac{1}{4}\xi_1^{1,1}\eta' I^2\cos[v+2V+\varpi'-2\vartheta-(\pi'-\Gamma')-2(\Omega-\Theta)]$$

$$+\frac{1}{4}\xi_1^{1,-1}\eta' I^2\cos[v+\varpi'-2\vartheta+(\pi'-\Gamma')-2(\Omega-\Theta)]$$

$$-\frac{1}{4}\varepsilon_1^{0,1}\eta I'^2\cos[2v+V-\varpi+\varpi'-2\vartheta' \quad (\pi-\Gamma)-2(\Omega'-\Theta')]$$

$$-\frac{1}{4}\varepsilon_1^{0,-1}\eta I'^2\cos[V+\varpi+\varpi'-2\vartheta'+(\pi-\Gamma)-2(\Omega'-\Theta')]$$

$$+\frac{1}{4}\xi_1^{1,1}\eta' I'^2\cos[v+2V+\varpi'-2\vartheta'-(\pi'-\Gamma')-2(\Omega'-\Theta')]$$

$$+\frac{1}{4}\xi_1^{1,-1}\eta' I'^2\cos[v+\varpi'-2\vartheta'+(\pi'-\Gamma')-2(\Omega'-\Theta')]$$

$$-\frac{1}{2}\varepsilon_1^{0,-1}\eta II'\cos[2v-V-\varpi-\varpi'-\vartheta+\vartheta'-(\pi-\Gamma)-(\Omega-\Theta)+(\Omega'-\Theta')]$$

$$-\frac{1}{2}\varepsilon_1^{0,1}\eta II'\cos[-V+\varpi-\varpi' \quad \vartheta+\vartheta'+(\pi \quad \Gamma)-(\Omega-\Theta)+(\Omega'-\Theta')]$$

$$+\frac{1}{2}\xi_1^{1,-1}\eta' II'\cos[v-\varpi'-\vartheta+\vartheta'-(\pi'-\Gamma')-(\Omega-\Theta)+(\Omega'-\Theta')]$$

Cette formule se continue à la page suivante

$$+ \frac{1}{2}\xi_1^{1,1}\eta_\iota' H' \cos[v - 2V - \bar\omega' - \vartheta + \vartheta' + (\pi' - \Gamma') - (\Omega - \Theta) + (\Omega' - \Theta')]$$

$$+ \frac{1}{2}\varepsilon_1^{0,1}\eta_\iota H' \cos[2v + V - \bar\omega + \bar\omega' - \vartheta - \vartheta' - (\pi - \Gamma) - (\Omega - \Theta) - (\Omega' - \Theta')]$$

$$+ \frac{1}{2}\varepsilon_1^{0,-1}\eta_\iota H' \cos[V + \bar\omega + \bar\omega' - \vartheta - \vartheta' + (\pi - \Gamma) - (\Omega - \Theta) - (\Omega' - \Theta')]$$

$$- \frac{1}{2}\xi_1^{1,1}\eta_\iota' H' \cos[v + 2V + \bar\omega' - \vartheta - \vartheta' - (\pi' - \Gamma') - (\Omega - \Theta) - (\Omega' - \Theta')]$$

$$- \frac{1}{2}\xi_1^{1,-1}\eta_\iota' H' \cos[v + \bar\omega' - \vartheta - \vartheta' + (\pi' - \Gamma') - (\Omega - \Theta) - (\Omega' - \Theta')],$$

(34, 1, 3) $\dfrac{\partial \cos H}{\partial v} =$

$$- \frac{1}{4}\varepsilon_1^{0,-1}\eta_\iota(I^2 + I'^2)\sin[2v - V - \bar\omega - \bar\omega' - (\pi - \Gamma)]$$

$$- \frac{1}{4}\varepsilon_1^{0,1}\eta_\iota(I^2 + I'^2)\sin[- V + \bar\omega - \bar\omega' + (\pi - \Gamma)]$$

$$+ \frac{1}{4}\xi_1^{1,-1}\eta_\iota'(I^2 + I'^2)\sin[v - \bar\omega' - (\pi' - \Gamma')]$$

$$+ \frac{1}{4}\xi_1^{1,1}\eta_\iota'(I^2 + I'^2)\sin[v - 2V - \bar\omega' + (\pi' - \Gamma')]$$

$$+ \frac{1}{4}\varepsilon_1^{0,1}\eta_\iota I^2 \sin[2v + V \quad \bar\omega + \bar\omega' - 2\vartheta - (\pi - \Gamma) - 2(\Omega - \Theta)]$$

$$+ \ldots,$$

(35, 1, 3) $\rho \cos H =$

$$- \frac{1}{8}\eta_\iota(I^2 + I'^2)\cos[2v - V - \bar\omega - \bar\omega' - (\pi - \Gamma)]$$

$$- \frac{1}{8}\eta_\iota(I^2 + I'^2)\cos[- V + \bar\omega - \bar\omega' + (\pi - \Gamma)]$$

$$+ \frac{1}{8}\eta_\iota I^2 \cos[2v + V - \bar\omega + \bar\omega' - 2\vartheta - (\pi - \Gamma) - 2(\Omega - \Theta)]$$

$$+ \frac{1}{8}\eta_\iota I^2 \cos[V + \bar\omega + \bar\omega' - 2\vartheta + (\pi - \Gamma) - 2(\Omega - \Theta)]$$

$$+ \frac{1}{8}\eta_\iota I'^2 \cos[2v + V - \bar\omega + \bar\omega' - 2\vartheta' - (\pi - \Gamma) - 2(\Omega' - \Theta')]$$

$$+ \frac{1}{8}\eta_\iota I'^2 \cos[V + \bar\omega + \bar\omega' - 2\vartheta' + (\pi - \Gamma) - 2(\Omega' - \Theta')]$$

Cette formule se continue à la page suivante

$$+\tfrac{1}{4}\eta H' \cos[2v - V - \varpi - \varpi' - \vartheta + \vartheta' - (\pi - I') - (\Omega - \theta) + (\Omega' - \theta')]$$

$$+\tfrac{1}{4}\eta H' \cos[- V + \varpi - \varpi' - \vartheta + \vartheta' + (\pi - I') - (\Omega - \theta) + (\Omega' - \theta')]$$

$$-\tfrac{1}{4}\eta H' \cos[2v + V - \varpi + \varpi' - \vartheta - \vartheta' - (\pi - I') - (\Omega - \theta) - (\Omega' - \theta')]$$

$$-\tfrac{1}{4}\eta H' \cos[V + \varpi + \varpi' - \vartheta - \vartheta' + (\pi - I') - (\Omega - \theta) - (\Omega' - \theta')],$$

(36, 1, 3) $\rho \dfrac{\partial \cos H}{\partial v} =$

$$\tfrac{1}{8}\eta(I^2 + I'^2) \sin[2v - V - \varpi - \varpi' - (\pi - I')]$$

$$+\tfrac{1}{8}\eta(I^2 + I'^2) \sin[- V + \varpi - \varpi' + (\pi - I')]$$

$$-\tfrac{1}{8}\eta I^2 \sin[2v + V - \varpi + \varpi' - 2\vartheta - (\pi - I') - 2(\Omega - \theta)]$$

$$- \quad \ldots,$$

(37, 1, 3) $\rho' \cos H =$

$$-\tfrac{1}{8}\eta'(I^2 + I'^2) \cos[v - \varpi' - (\pi' - I'')]$$

$$-\tfrac{1}{8}\eta'(I^2 + I'^2) \cos[v - 2V - \varpi' + (\pi' - I'')]$$

$$+\tfrac{1}{8}\eta' I^2 \cos[v + 2V + \varpi' - 2\vartheta - (\pi' - I'') - 2(\Omega - \theta)]$$

$$+\tfrac{1}{8}\eta' I^2 \cos[v + \varpi' - 2\vartheta + (\pi' - I'') - 2(\Omega - \theta)]$$

$$+\tfrac{1}{8}\eta' I'^2 \cos[v + 2V + \varpi' - 2\vartheta' - (\pi' - I'') - 2(\Omega' - \theta')]$$

$$+\tfrac{1}{8}\eta' I'^2 \cos[v + \varpi' - 2\vartheta' + (\pi' - I'') - 2(\Omega' - \theta')]$$

$$+\tfrac{1}{4}\eta' H' \cos[v - \varpi' - \vartheta + \vartheta' - (\pi' - I'') - (\Omega - \theta) + (\Omega' - \theta')]$$

$$+\tfrac{1}{4}\eta' H' \cos[v - 2V - \varpi' - \vartheta + \vartheta' + (\pi' - I'') - (\Omega - \theta) + (\Omega' - \theta')]$$

$$-\tfrac{1}{4}\eta' H' \cos[v + 2V + \varpi' - \vartheta - \vartheta' - (\pi' - I'') - (\Omega - \theta) - (\Omega' - \theta')]$$

$$-\tfrac{1}{4}\eta' H' \cos[v + \varpi' - \vartheta - \vartheta' + (\pi' - I'') - (\Omega - \theta) - (\Omega' - \theta')],$$

(38, 1, 3) $\rho' \dfrac{\partial \cos H}{\partial \mathrm{v}} =$

$$\tfrac{1}{8}\eta'(I^2 + I'^2)\sin[\mathrm{v} - \varpi' - (\pi' - I'')]$$

$$+ \tfrac{1}{8}\eta'(I^2 + I'^2)\sin[\mathrm{v} - 2\mathrm{V} - \varpi' + (\pi' - I'')]$$

$$- \tfrac{1}{8}\eta' I^2 \sin[\mathrm{v} + 2\mathrm{V} + \varpi' - 2\vartheta - (\pi' - I'') - 2(\Omega - \Theta)]$$

$$- \ldots,$$

(33, 2, 3) $\cos 2H =$

$$\tfrac{1}{2}\varepsilon_1^{2\varsigma,-1}\eta(I^2 + I'^2)\cos[3\mathrm{v} - 2\mathrm{V} - \varpi - 2\varpi' - (\pi - I')]$$

$$+ \tfrac{1}{2}\varepsilon_1^{2\varsigma,1}\eta(I^2 + I'^2)\cos[\mathrm{v} - 2\mathrm{V} + \varpi - 2\varpi' + (\pi - I')]$$

$$- \tfrac{1}{2}\xi_1^{2,-1}\eta'(I^2 + I'^2)\cos[2\mathrm{v} - \mathrm{V} - 2\varpi' - (\pi' - I'')]$$

$$- \tfrac{1}{2}\xi_1^{2,1}\eta'(I^2 + I'^2)\cos[2\mathrm{v} - 3\mathrm{V} - 2\varpi' + (\pi' - I'')]$$

$$- \tfrac{1}{2}\varepsilon_1^{2\varsigma,1}\eta I^2\cos[\mathrm{v} + 2\mathrm{V} - \varpi + 2\varpi' - 2\vartheta - (\pi - I') - 2(\Omega - \Theta)]$$

$$- \tfrac{1}{2}\varepsilon_1^{2\varsigma,-1}\eta I^2\cos[-\mathrm{v} + 2\mathrm{V} + \varpi + 2\varpi' - 2\vartheta + (\pi - I') - 2(\Omega - \Theta)]$$

$$+ \tfrac{1}{2}\xi_1^{2,1}\eta' I^2\cos[3\mathrm{V} + 2\varpi' - 2\vartheta - (\pi' - I'') - 2(\Omega - \Theta)]$$

$$+ \tfrac{1}{2}\xi_1^{2,-1}\eta' I^2\cos[\mathrm{V} + 2\varpi' - 2\vartheta + (\pi' - I'') - 2(\Omega - \Theta)]$$

$$- \tfrac{1}{2}\varepsilon_1^{2\varsigma,1}\eta I'^2\cos[\mathrm{v} + 2\mathrm{V} - \varpi + 2\varpi' - 2\vartheta' - (\pi - I') - 2(\Omega' - \Theta')]$$

$$\tfrac{1}{2}\varepsilon_1^{2\varsigma,-1}\eta I'^2\cos[-\mathrm{v} + 2\mathrm{V} + \varpi + 2\varpi' - 2\vartheta' + (\pi - I') - 2(\Omega' - \Theta')]$$

$$+ \tfrac{1}{2}\xi_1^{2,1}\eta' I'^2\cos[3\mathrm{V} + 2\varpi' - 2\vartheta' - (\pi' - I'') - 2(\Omega' - \Theta')]$$

$$+ \tfrac{1}{2}\xi_1^{2,-1}\eta' I'^2\cos[\mathrm{V} + 2\varpi' - 2\vartheta' + (\pi' - I'') - 2(\Omega' - \Theta')]$$

$$- \varepsilon_1^{2\varsigma,-1}\eta I I'\cos[3\mathrm{v} - 2\mathrm{V} - \varpi - 2\varpi' - \vartheta + \vartheta' - (\pi - I') - (\Omega - \Theta) + (\Omega' - \Theta')]$$

$$- \varepsilon_1^{2\varsigma,1}\eta I I'\cos[\mathrm{v} - 2\mathrm{V} + \varpi - 2\varpi' - \vartheta + \vartheta' + (\pi - I') - (\Omega - \Theta) + (\Omega' - \Theta')]$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$+ \xi_1^{2,-1}\eta' II' \cos[2v - V - 2\varpi' - \vartheta + \vartheta' - (\pi' - \Gamma') - (\Omega - \theta) + (\Omega' - \theta')]$$

$$+ \xi_1^{2,1}\eta' II' \cos[2v - 3V - 2\varpi' - \vartheta + \vartheta' + (\pi' - \Gamma') - (\Omega - \theta) + (\Omega' - \theta')]$$

$$+ \varepsilon_1^{2,1}\eta II' \cos[v + 2V - \varpi + 2\varpi' - \vartheta - \vartheta' - (\pi - \Gamma) - (\Omega - \theta) - (\Omega' - \theta')]$$

$$+ \varepsilon_1^{2,-1}\eta II' \cos[-v + 2V + \varpi + 2\varpi' - \vartheta - \vartheta' + (\pi - \Gamma) - (\Omega - \theta) - (\Omega' - \theta')]$$

$$- \xi_1^{2,1}\eta' II' \cos[3V + 2\varpi' - \vartheta - \vartheta' - (\pi' - \Gamma') - (\Omega - \theta) - (\Omega' - \theta')]$$

$$- \xi_1^{2,-1}\eta' II' \cos[V + 2\varpi' - \vartheta - \vartheta' + (\pi' - \Gamma') - (\Omega - \theta) - (\Omega' - \theta')],$$

(34, 2, 3) $$\frac{\partial \cos 2H}{\partial v} =$$

$$- \varepsilon_1^{2,-1}\eta(I^2 + I'^2)\sin[3v - 2V - \varpi - 2\varpi' - (\pi - \Gamma)]$$

$$- \varepsilon_1^{2,1}\eta(I^2 + I'^2)\sin[v - 2V + \varpi - 2\varpi' + (\pi - \Gamma)]$$

$$+ \xi_1^{2,-1}\eta'(I^2 + I'^2)\sin[2v - V - 2\varpi' - (\pi' - \Gamma')]$$

$$+ \xi_1^{2,1}\eta'(I^2 + I'^2)\sin[2v - 3V - 2\varpi' + (\pi' - \Gamma')]$$

$$- 2\varepsilon_1^{2,-1}\eta II' \sin[3v - 2V - \varpi - 2\varpi' - \vartheta + \vartheta' - (\pi - \Gamma) - (\Omega - \theta) + (\Omega' - \theta')]$$

$$- 2\varepsilon_1^{2,1}\eta II' \sin[v - 2V + \varpi - 2\varpi' - \vartheta + \vartheta' + (\pi - \Gamma) - (\Omega - \theta) + (\Omega' - \theta')]$$

$$+ 2\xi_1^{2,-1}\eta' II' \sin[2v - V - 2\varpi' - \vartheta + \vartheta' - (\pi' - \Gamma') - (\Omega - \theta) + (\Omega' - \theta')]$$

$$+ 2\xi_1^{2,1}\eta' II' \sin[2v - 3V - 2\varpi' - \vartheta + \vartheta' + (\pi' + \Gamma') - (\Omega - \theta) + (\Omega' - \theta')],$$

(35, 2, 3) $$\rho \cos 2H =$$

$$- \tfrac{1}{2}\eta(I^2 + I'^2)\cos[v - \varpi - (\pi - \Gamma)]$$

$$- \tfrac{1}{4}\eta(I^2 + I'^2)\cos[3v - 2V - \varpi - 2\varpi' - (\pi - \Gamma)]$$

$$- \tfrac{1}{4}\eta(I^2 + I'^2)\cos[v - 2V + \varpi - 2\varpi' + (\pi - \Gamma)]$$

$$+ \tfrac{1}{4}\eta I^2 \cos[3v - \varpi - 2\vartheta - (\pi - \Gamma) - 2(\Omega - \theta)]$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$+\tfrac{1}{4}\eta I^2\cos[\mathrm{v}+\varpi-2\vartheta+(\pi-\Gamma)-2(\Omega-\Theta)]$$

$$+\tfrac{1}{4}\eta I'^2\cos[3\mathrm{v}-\varpi-2\vartheta'-(\pi-\Gamma)-2(\Omega'-\Theta')]$$

$$+\tfrac{1}{4}\eta I'^2\cos[\mathrm{v}+\varpi-2\vartheta'+(\pi-\Gamma)-2(\Omega'-\Theta')]$$

$$+\tfrac{1}{4}\eta I^2\cos[\mathrm{v}+2\mathrm{V}-\varpi+2\varpi'-2\vartheta-(\pi-\Gamma)-2(\Omega-\Theta)]$$

$$+\tfrac{1}{4}\eta I^2\cos[-\mathrm{v}+2\mathrm{V}+\varpi+2\varpi'-2\vartheta+(\pi-\Gamma)-2(\Omega-\Theta)]$$

$$+\tfrac{1}{4}\eta I'^2\cos[\mathrm{v}+2\mathrm{V}-\varpi+2\varpi'-2\vartheta'-(\pi-\Gamma)-2(\Omega'-\Theta')]$$

$$+\tfrac{1}{4}\eta I'^2\cos[-\mathrm{v}+2\mathrm{V}+\varpi+2\varpi'-2\vartheta'+(\pi-\Gamma)-2(\Omega'-\Theta')]$$

$$+\tfrac{1}{2}\eta II'\cos[3\mathrm{v}-2\mathrm{V}-\varpi-2\varpi'-\vartheta+\vartheta'-(\pi-\Gamma)-(\Omega-\Theta)+(\Omega'-\Theta')]$$

$$+\tfrac{1}{2}\eta II'\cos[\mathrm{v}-2\mathrm{V}+\varpi-2\varpi'-\vartheta+\vartheta'+(\pi-\Gamma)-(\Omega-\Theta)+(\Omega'-\Theta')]$$

$$-\tfrac{1}{2}\eta II'\cos[3\mathrm{v}-\varpi-\vartheta-\vartheta'-(\pi-\Gamma)-(\Omega-\Theta)-(\Omega'-\Theta')]$$

$$-\tfrac{1}{2}\eta II'\cos[\mathrm{v}+\varpi-\vartheta-\vartheta'+(\pi-\Gamma)-(\Omega-\Theta)-(\Omega'-\Theta')]$$

$$-\tfrac{1}{2}\eta II'\cos[\mathrm{v}+2\mathrm{V}-\varpi+2\varpi'-\vartheta-\vartheta'-(\pi-\Gamma)-(\Omega-\Theta)-(\Omega'-\Theta')]$$

$$-\tfrac{1}{2}\eta II'\cos[-\mathrm{v}+2\mathrm{V}+\varpi+2\varpi'-\vartheta-\vartheta'+(\pi-\Gamma)-(\Omega-\Theta)-(\Omega'-\Theta')]$$

$$+\tfrac{1}{2}\eta II'\cos[\mathrm{v}-\varpi+\vartheta-\vartheta'-(\pi-\Gamma)+(\Omega-\Theta)-(\Omega'-\Theta')]$$

$$+\tfrac{1}{2}\eta II'\cos[-\mathrm{v}+\varpi+\vartheta-\vartheta'+(\pi-\Gamma)+(\Omega-\Theta)-(\Omega'-\Theta')],$$

(36, 2, 3) $$\rho\frac{\partial\cos 2H}{\partial\mathrm{v}}=$$

$$\tfrac{1}{2}\eta(I^2+I'^2)\sin[3\mathrm{v}-2\mathrm{V}-\varpi-2\varpi'-(\pi-\Gamma)]$$

$$+\tfrac{1}{2}\eta(I^2+I'^2)\sin[\mathrm{v}-2\mathrm{V}+\varpi-2\varpi'+(\pi-\Gamma)]$$

$$\tfrac{1}{2}\eta I^2\sin[3\mathrm{v}-\varpi-2\vartheta-(\pi-\Gamma)-2(\Omega-\Theta)]$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$-\tfrac{1}{2}\gamma_{\prime} I^2 \sin[v + \varpi - 2\vartheta + (\pi - \Gamma) - 2(\Omega - \theta)]$$

$$-\tfrac{1}{2}\gamma_{\prime} I'^2 \sin[3v - \varpi - 2\vartheta' - (\pi - \Gamma) - 2(\Omega' - \theta')]$$

$$-\tfrac{1}{2}\gamma_{\prime} I'^2 \sin[v + \varpi - 2\vartheta' + (\pi - \Gamma) - 2(\Omega' - \theta')]$$

$$-\gamma_{\prime} II' \sin[3v - 2V - \varpi - 2\varpi' - \vartheta + \vartheta' - (\pi - \Gamma) - (\Omega - \theta) + (\Omega' - \theta')]$$

$$-\gamma_{\prime} II' \sin[v - 2V + \varpi - 2\varpi' - \vartheta + \vartheta' + (\pi - \Gamma) - (\Omega - \theta) + (\Omega' - \theta')]$$

$$+\gamma_{\prime} II' \sin[3v - \varpi - \vartheta - \vartheta' - (\pi - \Gamma) - (\Omega - \theta) - (\Omega' - \theta')]$$

$$+\gamma_{\prime} II' \sin[v + \varpi - \vartheta - \vartheta' + (\pi - \Gamma) - (\Omega - \theta) - (\Omega' - \theta')],$$

(37, 2, 3) $\rho' \cos 2H =$

$$-\tfrac{1}{2}\gamma_{\prime}'(I^2 + I'^2) \cos[V - (\pi' - \Gamma')]$$

$$-\tfrac{1}{4}\gamma_{\prime}'(I^2 + I'^2) \cos[2v - V - 2\varpi' - (\pi' - \Gamma')]$$

$$-\tfrac{1}{4}\gamma_{\prime}'(I^2 + I'^2) \cos[2v - 3V - 2\varpi' + (\pi' - \Gamma')]$$

$$+\tfrac{1}{4}\gamma_{\prime}' I^2 \cos[2v + V - 2\vartheta - (\pi' - \Gamma') - 2(\Omega - \theta)]$$

$$+\tfrac{1}{4}\gamma_{\prime}' I^2 \cos[2v - V - 2\vartheta + (\pi' - \Gamma') - 2(\Omega - \theta)]$$

$$+\tfrac{1}{4}\gamma_{\prime}' I'^2 \cos[2v + V - 2\vartheta' - (\pi' - \Gamma') - 2(\Omega' - \theta')]$$

$$+\tfrac{1}{4}\gamma_{\prime}' I'^2 \cos[2v - V - 2\vartheta' + (\pi' - \Gamma') - 2(\Omega' - \theta')]$$

$$+\tfrac{1}{4}\gamma_{\prime}' I^2 \cos[3V + 2\varpi' - 2\vartheta - (\pi' - \Gamma') - 2(\Omega - \theta)]$$

$$+\tfrac{1}{4}\gamma_{\prime}' I^2 \cos[V + 2\varpi' - 2\vartheta + (\pi' - \Gamma') - 2(\Omega - \theta)]$$

$$+\tfrac{1}{4}\gamma_{\prime}' I'^2 \cos[3V + 2\varpi' - 2\vartheta' - (\pi' - \Gamma') - 2(\Omega' - \theta')]$$

$$+\tfrac{1}{4}\gamma_{\prime}' I'^2 \cos[V + 2\varpi' - 2\vartheta' + (\pi' - \Gamma') - 2(\Omega' - \theta')]$$

$$+\tfrac{1}{2}\gamma_{\prime}' II' \cos[2v - V - 2\varpi' - \vartheta + \vartheta' - (\pi' - \Gamma') - (\Omega - \theta) + (\Omega' - \theta')]$$

Cette formule se continue à la page suivante

$$+\frac{1}{2}\eta' II' \cos[2v-3V-2\varpi'-\vartheta+\vartheta'+(\pi'-\Gamma')-(\Omega-\theta)+(\Omega'-\theta')]$$

$$-\frac{1}{2}\eta' II' \cos[2v+V-\vartheta-\vartheta'-(\pi'-\Gamma')-(\Omega-\theta)-(\Omega'-\theta')]$$

$$-\frac{1}{2}\eta' II' \cos[2v-V-\vartheta-\vartheta'+(\pi'-\Gamma')-(\Omega-\theta)-(\Omega'-\theta')]$$

$$-\frac{1}{2}\eta' II' \cos[3V+2\varpi'-\vartheta-\vartheta'-(\pi'-\Gamma')-(\Omega-\theta)-(\Omega'-\theta')]$$

$$-\frac{1}{2}\eta' II' \cos[V+2\varpi'-\vartheta-\vartheta'+(\pi'-\Gamma')-(\Omega-\theta)-(\Omega'-\theta')]$$

$$+\frac{1}{2}\eta' II' \cos[V-\vartheta+\vartheta'-(\pi'-\Gamma')-(\Omega-\theta)+(\Omega'-\theta')]$$

$$+\frac{1}{2}\eta' II' \cos[-V-\vartheta+\vartheta'+(\pi'-\Gamma')-(\Omega-\theta)+(\Omega'-\theta')],$$

(38, 2, 3) $\quad \rho' \frac{\partial \cos 2H}{\partial v} =$

$$\frac{1}{2}\eta'(I^2+I'^2)\sin[2v-V-2\varpi'-(\pi'-\Gamma')]$$

$$+\frac{1}{2}\eta'(I^2+I'^2)\sin[2v-3V-2\varpi'+(\pi'-\Gamma')]$$

$$-\frac{1}{2}\eta' I^2\sin[2v+V-2\vartheta-(\pi'-\Gamma')-2(\Omega-\theta)]$$

$$-\frac{1}{2}\eta' I^2\sin[2v-V-2\vartheta+(\pi'-\Gamma')-2(\Omega-\theta)]$$

$$-\frac{1}{2}\eta' I'^2\sin[2v+V-2\vartheta'-(\pi'-\Gamma')-2(\Omega'-\theta')]$$

$$-\frac{1}{2}\eta' I'^2\sin[2v-V-2\vartheta'+(\pi'-\Gamma')-2(\Omega'-\theta')]$$

$$-\eta' II'\sin[2v-V-2\varpi'-\vartheta+\vartheta'-(\pi'-\Gamma')-(\Omega-\theta)+(\Omega'-\theta')]$$

$$-\eta' II'\sin[2v-3V-2\varpi'-\vartheta+\vartheta'+(\pi'-\Gamma')-(\Omega-\theta)+(\Omega'-\theta')]$$

$$+\eta' II'\sin[2v+V-\vartheta-\vartheta'-(\pi'-\Gamma')-(\Omega-\theta)-(\Omega'-\theta')]$$

$$+\eta' II'\sin[2v-V-\vartheta-\vartheta'+(\pi'-\Gamma')-(\Omega-\theta)-(\Omega'-\theta')].$$

En continuant ces développements, on trouverait des expressions dont le nombre des termes deviendrait, de plus en plus, insupportablement grand,

tandis que très peu d'entre eux acquerraient, dans les théories des planètes principales, des valeurs appréciables. En conséquence, il ne paraît pas opportun de poursuivre le chemin dans lequel je suis entré, bien que les résultats déjà obtenus ne soient pas sans intérêt, pour élucider la nature des termes cherchés. Mais, en m'abstenant de donner les formules definitives représentant les fonctions dont il s'agit, je vais en revanche indiquer les expressions complètes de $e^{i[n(v-v')+mv']}$, $\rho e^{i[n(v-v')+mv']}$, ..., appartenant aux valeurs de n depuis 0 jusqu'à 5, et de m: -2, 0 et $+2$, ces valeurs toutefois restreintes à ne donner la somme $n+m$ pas plus grande que 5. Les termes appartenant à d'autres valeurs de n et de m ne causeront guère des inégalités sensibles. Les formules qui suivent ne renferment, bien entendu, que les termes du premier degré par rapport aux fonctions diastématiques.

Voici les expressions dont il s'agit, et qui se déduisent presqu'immédiatement en vertu des formules générales données dans le n° 59: elles nous ont servi, d'ailleurs, à calculer les expressions (33, 1, 3) . . . (38, 2, 3).

(39, a)
$$e^{2iv} = -\varepsilon_1^{2\varphi,1}\eta e^{-i(\pi-\Gamma)+i[v+2V-\omega+2\omega']}$$
$$-\varepsilon_1^{2\varphi,-1}\eta e^{i(\pi-\Gamma)+i[-v+2V+\omega+2\omega']}$$
$$+\xi_1^{2,1}\eta' e^{-i(\pi'-\Gamma')+i[3V+2\omega']}$$
$$+\xi_1^{2,-1}\eta' e^{i(\pi'-\Gamma')+i[V+2\omega']},$$

(39, b)
$$e^{i(v-V)} = -\varepsilon_1^{\varphi,-1}\eta e^{-i(\pi-\Gamma)+i[2v-V-\omega-\omega']}$$
$$-\varepsilon_1^{\varphi,1}\eta e^{i(\pi-\Gamma)+i[-V+\omega-\omega']}$$
$$+\xi_1^{1,-1}\eta' e^{-i(\pi'-\Gamma')+i[v-\omega']}$$
$$+\xi_1^{1,1}\eta' e^{i(\pi'-\Gamma')+i[v-2V-\omega']},$$

(39, c)
$$e^{i(v+V)} = -\varepsilon_1^{\varphi,1}\eta e^{-i(\pi-\Gamma)+i[2v+V-\omega+\omega']}$$
$$-\varepsilon_1^{\varphi,-1}\eta e^{i(\pi-\Gamma)+i[V+\omega+\omega']}$$
$$+\xi_1^{1,1}\eta' e^{-i(\pi'-\Gamma')+i[v+2V+\omega']}$$
$$+\xi_1^{1,-1}\eta' e^{i(\pi'-\Gamma')+i[v+\omega']},$$

$$(39,\ \mathrm{d})\qquad e^{i(\mathrm{v}-3\mathrm{v}')} = -\,\varepsilon_1^{3\varphi,-1}\eta e^{i(\pi-\Pi')+i[2\mathrm{v}-3\mathrm{V}-\tilde{\omega}-3\tilde{\omega}']}$$

$$-\,\varepsilon_1^{3\varphi,1}\eta e^{i(\pi-\Pi')+i[-3\mathrm{V}+\tilde{\omega}-3\tilde{\omega}']}$$

$$+\,\xi_1^{3,-1}\eta' e^{-i(\pi'-\Pi')+i[\mathrm{v}-2\mathrm{V}-3\tilde{\omega}']}$$

$$+\,\xi_1^{3,1}\eta' e^{i(\pi'-\Pi')+i[\mathrm{v}-4\mathrm{V}-3\tilde{\omega}']},$$

$$(39,\ \mathrm{e})\qquad e^{2i(\mathrm{v}-\mathrm{v}')} = -\,\varepsilon_1^{2\varphi,-1}\eta e^{-i(\pi-\Pi')+i[3\mathrm{v}-2\mathrm{V}-\tilde{\omega}-2\tilde{\omega}']}$$

$$-\,\varepsilon_1^{2\varphi,1}\eta e^{i(\pi-\Pi')+i[\mathrm{v}-2\mathrm{V}+\tilde{\omega}-2\tilde{\omega}']}$$

$$+\,\xi_1^{2,-1}\eta' e^{-i(\pi'-\Pi')+i[2\mathrm{v}-\mathrm{V}-2\tilde{\omega}']}$$

$$+\,\xi_1^{2,1}\eta' e^{i(\pi'-\Pi')+i[2\mathrm{v}-3\mathrm{V}-2\tilde{\omega}']},$$

$$(39,\ \mathrm{g})\qquad e^{i(2\mathrm{v}-4\mathrm{v}')} = -\,\varepsilon_1^{4\varphi,-1}\eta e^{-i(\pi-\Pi')+i[3\mathrm{v}-4\mathrm{V}-\tilde{\omega}-4\tilde{\omega}']}$$

$$-\,\varepsilon_1^{4\varphi,1}\eta e^{i(\pi-\Pi')+i[\mathrm{v}-4\mathrm{V}+\tilde{\omega}-4\tilde{\omega}']}$$

$$+\,\xi_1^{4,-1}\eta' e^{-i(\pi'-\Pi')+i[4\mathrm{v}-3\mathrm{V}-4\tilde{\omega}']}$$

$$+\,\xi_1^{4,1}\eta' e^{i(\pi'-\Pi')+i[4\mathrm{v}-5\mathrm{V}-4\tilde{\omega}']},$$

$$(39,\ \mathrm{h})\qquad e^{3i(\mathrm{v}-\mathrm{v}')} = -\,\varepsilon_1^{3\varphi,-1}\eta e^{-i(\pi-\Pi')+i[4\mathrm{v}-3\mathrm{V}-\tilde{\omega}-3\tilde{\omega}']}$$

$$-\,\varepsilon_1^{3\varphi,1}\eta e^{i(\pi-\Pi')+i[2\mathrm{v}-3\mathrm{V}+\tilde{\omega}-3\tilde{\omega}']}$$

$$+\,\xi_1^{3,-1}\eta' e^{-i(\pi'-\Pi')+i[4\mathrm{v}-2\mathrm{V}-3\tilde{\omega}']}$$

$$+\,\xi_1^{3,1}\eta' e^{i(\pi'-\Pi')+i[3\mathrm{v}-4\mathrm{V}-3\tilde{\omega}']},$$

$$(39,\ \mathrm{i})\qquad e^{i(3\mathrm{v}-\mathrm{v}')} = -\,\varepsilon_1^{\varphi,-1}\eta e^{-i(\pi-\Pi')+i[4\mathrm{v}-\mathrm{V}-\tilde{\omega}-\tilde{\omega}']}$$

$$-\,\varepsilon_1^{\varphi,1}\eta e^{i(\pi-\Pi')+i[2\mathrm{v}-\mathrm{V}+\tilde{\omega}-\tilde{\omega}']}$$

$$+\,\xi_1^{1,-1}\eta' e^{-i(\pi'-\Pi')+i[3\mathrm{v}-\tilde{\omega}']}$$

$$+\,\xi_1^{1,1}\eta' e^{i(\pi'-\Pi')+i[3\mathrm{v}-2\mathrm{V}-\tilde{\omega}']},$$

(39, j) $$e^{i(3\mathrm{v}-5v)} = -\varepsilon_1^{5\varsigma,-1}\eta e^{-i(\pi-\Gamma)+i[4\mathrm{v}-5V-\omega-5\omega']}$$
$$-\varepsilon_1^{5\varsigma,1}\eta e^{i(\pi-\Gamma)+i[2\mathrm{v}-5V+\omega-5\omega']}$$
$$+\xi_1^{5,-1}\eta' e^{-i(\pi-\Gamma)+i[3\mathrm{v}-4V-5\omega']}$$
$$+\xi_1^{5,1}\eta' e^{i(\pi-\Gamma)+i[3\mathrm{v}-6V-5\omega']},$$

(39, k) $$e^{4i(\mathrm{v}-v)} = -\varepsilon_1^{4\varsigma,-1}\eta e^{-i(\pi-\Gamma)+i[5\mathrm{v}-4V-\omega-4\omega']}$$
$$-\varepsilon_1^{4\varsigma,1}\eta e^{i(\pi-\Gamma)+i[3\mathrm{v}-4V+\omega-4\omega']}$$
$$+\xi_1^{4,-1}\eta' e^{-i(\pi-\Gamma)+i[4\mathrm{v}-3V-4\omega']}$$
$$+\xi_1^{4,1}\eta' e^{i(\pi-\Gamma)+i[4\mathrm{v}-5V-4\omega']},$$

(39, l) $$e^{i(4\mathrm{v}-2v)} = -\varepsilon_1^{2\varsigma,-1}\eta e^{-i(\pi-\Gamma)+i[5\mathrm{v}-2V-\omega-2\omega']}$$
$$-\varepsilon_1^{2\varsigma,1}\eta e^{i(\pi-\Gamma)+i[3\mathrm{v}-2V+\omega-2\omega']}$$
$$+\xi_1^{2,-1}\eta' e^{-i(\pi-\Gamma)+i[4\mathrm{v}-V-2\omega']}$$
$$+\xi_1^{2,1}\eta' e^{i(\pi-\Gamma)+i[4\mathrm{v}-3V-2\omega']},$$

(39, m) $$e^{5i(\mathrm{v}-v)} = -\varepsilon_1^{5\varsigma,-1}\eta e^{-i(\pi-\Gamma)+i[6\mathrm{v}-5V-\omega-5\omega']}$$
$$-\varepsilon_1^{5\varsigma,1}\eta e^{i(\pi-\Gamma)+i[4\mathrm{v}-5V+\omega-5\omega']}$$
$$+\xi_1^{5,-1}\eta' e^{-i(\pi-\Gamma)+i[5\mathrm{v}-4V-5\omega']}$$
$$+\xi_1^{5,1}\eta' e^{i(\pi-\Gamma)+i[5\mathrm{v}-6V-5\omega']},$$

(39, n) $$e^{i(5\mathrm{v}-3v)} = -\varepsilon_1^{3\varsigma,-1}\eta e^{-i(\pi-\Gamma)+i[6\mathrm{v}-3V-\omega-3\omega']}$$
$$-\varepsilon_1^{3\varsigma,1}\eta e^{i(\pi-\Gamma)+i[4\mathrm{v}-3V+\omega-3\omega']}$$
$$+\xi_1^{3,-1}\eta' e^{-i(\pi-\Gamma)+i[5\mathrm{v}-2V-3\omega']}$$
$$+\xi_1^{3,1}\eta' e^{i(\pi-\Gamma)+i[5\mathrm{v}-4V-3\omega']},$$

(40, a) $$2\rho e^{2iv} = \eta e^{-i(\pi-\Gamma)+i[v+2V-\omega+2\omega']} + \eta e^{i(\pi-\Gamma)+i[-v+2V+\omega'+2\omega']},$$

(40, b) $$2\rho e^{i(v-v')} = \eta e^{-i(\pi-\Gamma)+i[2v-V-\omega-\omega']} + \eta e^{i(\pi-\Gamma)+i[-V+\omega-\omega']},$$

(40, c) $$2\rho e^{i(v+v')} = \eta e^{-i(\pi-\Gamma)+i[2v+V-\omega+\omega']} + \eta e^{i(\pi-\Gamma)+i[V+\omega+\omega']},$$

(40, d) $$2\rho e^{i(v-3v')} = \eta e^{-i(\pi-\Gamma)+i[2v-3V-\omega-3\omega']} + \eta e^{i(\pi-\Gamma)+i[-3V+\omega-3\omega']},$$

(40, e) $$2\rho e^{2i(v-v')} = \eta e^{-i(\pi-\Gamma)+i[3v-2V-\omega-2\omega']} + \eta e^{i(\pi-\Gamma)+i[v-2V+\omega-2\omega']},$$

(40, f) $$2\rho e^{2iv} = \eta e^{-i(\pi-\Gamma)+i[3v-\omega]} + \eta e^{i(\pi-\Gamma)+i[v+\omega]},$$

(40, g) $$2\rho e^{i(2v-4v')} = \eta e^{-i(\pi-\Gamma)+i[3v-4V-\omega-4\omega']} + \eta e^{i(\pi-\Gamma)+i[v-4V+\omega-4\omega']},$$

(40, h) $$2\rho e^{3i(v-v')} = \eta e^{-i(\pi-\Gamma)+i[4v-3V-\omega-3\omega']} + \eta e^{i(\pi-\Gamma)+i[2v-3V+\omega-3\omega']},$$

(40, i) $$2\rho e^{i(3v-v')} = \eta e^{-i(\pi-\Gamma)+i[4v-V-\omega-\omega']} + \eta e^{i(\pi-\Gamma)+i[2v-V+\omega-\omega']},$$

(40, j) $$2\rho e^{i(3v-5v')} = \eta e^{-i(\pi-\Gamma)+i[4v-5V-\omega-5\omega']} + \eta e^{i(\pi-\Gamma)+i[2v-5V+\omega-5\omega']},$$

(40, k) $$2\rho e^{4i(v-v')} = \eta e^{-i(\pi-\Gamma)+i[5v-4V-\omega-4\omega']} + \eta e^{i(\pi-\Gamma)+i[3v-4V+\omega-4\omega']},$$

(40, l) $$2\rho e^{i(4v-2v')} = \eta e^{-i(\pi-\Gamma)+i[5v-2V-\omega-2\omega']} + \eta e^{i(\pi-\Gamma)+i[3v-2V+\omega-2\omega']},$$

(40, m) $$2\rho e^{5i(v-v')} = \eta e^{-i(\pi-\Gamma)+i[6v-5V-\omega-5\omega']} + \eta e^{i(\pi-\Gamma)+i[4v-5V+\omega-5\omega']},$$

(40, n) $$2\rho e^{i(5v-3v')} = \eta e^{-i(\pi-\Gamma)+i[6v-3V-\omega-3\omega']} + \eta e^{i(\pi-\Gamma)+i[4v-3V+\omega-3\omega']},$$

(41, a) $$2\rho' e^{2iv'} = \eta' e^{-i(\pi'-\Gamma')+i[3V+2\omega']} + \eta' e^{i(\pi'-\Gamma')+i[V+2\omega']},$$

(41, b) $$2\rho' e^{i(v-v')} = \eta' e^{-i(\pi'-\Gamma')+i[v-\omega']} + \eta' e^{i(\pi'-\Gamma')+i[v-2V-\omega']},$$

(41, c) $$2\rho' e^{i(v+v')} = \eta' e^{-i(\pi'-\Gamma')+i[v+2V+\omega']} + \eta' e^{i(\pi'-\Gamma')+i[v+\omega']},$$

(41, d) $$2\rho' e^{i(v-3v')} = \eta' e^{-i(\pi'-\Gamma')+i[v-2V-3\omega']} + \eta' e^{i(\pi-\Gamma')+i[v-4V-3\omega']},$$

(41, e) $$2\rho' e^{2i(v-v')} = \eta' e^{-i(\pi'-\Gamma')+i[2v-V-2\omega']} + \eta' e^{i(\pi'-\Gamma')+i[2v-3V-2\omega']},$$

(41, f) $$2\rho' e^{2iv} = \eta' e^{-i(\pi'-\Gamma')+i[2v+V]} + \eta' e^{i(\pi'-\Gamma')+i[2v-V]},$$

(41, g) $$2\rho' e^{i(2v-4v')} = \eta' e^{-i(\pi'-\Gamma'')+i[2v-3V-4\omega']} + \eta' e^{i(\pi'-\Gamma'')+i[2v-5V-4\omega']},$$

(41, h) $$2\rho' e^{3i(v-v')} = \eta' e^{-i(\pi'-\Gamma'')+i[3v-2V-3\omega']} + \eta' e^{i(\pi'-\Gamma'')+i[3v-4V-3\omega']},$$

(41, i) $$2\rho' e^{i(3v-v')} = \eta' e^{-i(\pi'-\Gamma'')+i[3v-\omega']} + \eta' e^{i(\pi'-\Gamma'')+i[3v-2V-\omega']},$$

(41, j) $$2\rho' e^{i(3v-5v')} = \eta' e^{-i(\pi'-\Gamma'')+i[3v-4V-5\omega']} + \eta' e^{i(\pi'-\Gamma'')+i[3v-6V-5\omega']},$$

(41, k) $$2\rho' e^{4i(v-v')} = \eta' e^{-i(\pi'-\Gamma'')+i[4v-3V-4\omega']} + \eta' e^{i(\pi'-\Gamma'')+i[4v-5V-4\omega']},$$

(41, l) $$2\rho' e^{i(4v-2v')} = \eta' e^{-i(\pi'-\Gamma'')+i[4v-V-2\omega']} + \eta' e^{i(\pi'-\Gamma'')+i[4v-3V-2\omega']},$$

(41, m) $$2\rho' e^{5i(v-v')} = \eta' e^{-i(\pi'-\Gamma'')+i[5v-4V-5\omega']} + \eta' e^{i(\pi'-\Gamma'')+i[5v-6V-5\omega']},$$

(41, n) $$2\rho' e^{i(5v-3v')} = \eta' e^{-i(\pi'-\Gamma'')+i[5v-2V-3\omega']} + \eta' e^{i(\pi'-\Gamma'')+i[5v-4V-3\omega']}.$$

Avec ces formules sous les yeux, on écrira, et presque sans calcul, les termes de $\cos nH$, ou bien ceux de $\rho \cos nH$, $\rho' \cos nH$, $\rho \frac{\partial \cos nH}{\partial v}$, $\rho' \frac{\partial \cos nH}{\partial v}$, appartenant à un certain argument dépendant de v et de V. En effet, puisque les divers termes de $\cos nH$ donnés dans le n° 50 se mettent sous la forme

$$T = l \cos L \cos[n(v - v') + mv'] - l \sin L \sin[n(v - v') + mv'],$$

d'où il découle:

$$\rho T = l \cos L . \rho \cos [\mathrm{n}(\mathrm{v} - \mathrm{v}') + \mathrm{m}\mathrm{v}'] - l \sin L . \rho \sin [\mathrm{n}(\mathrm{v} - \mathrm{v}') + \mathrm{m}\mathrm{v}'],$$

ainsi qu'une formule analogue de $\rho' T'$, il suffira, pour arriver au résultat cherché, de prendre, des formules que nous venons d'exposer, le terme appartenant à l'argument dont il s'agit, de multiplier son coefficient par l, et d'ajouter à son argument l'angle L.

Ainsi par exemple, s'il s'agit de mettre en évidence les termes du troisième degré à caractère diastématique s'obtenant de l'expression de $\cos 7H$, et dont la partie de l'argument qui dépend de v et V sera v seul, on trouvera tout de suite l'expression que voici:

$$\begin{aligned}
{}^{\;\mathrm{I}}_{\xi^{1,}_{1}\;\;1}\cos 7H = & - \tfrac{7}{2}\eta'(I^2 + I'^2) \cos [\mathrm{v} - \varpi' - (\pi' - I'')] \\
& + \tfrac{7}{4}\eta' I^2 \cos [\mathrm{v} + \varpi' - 2\vartheta + (\pi' - I'') - 2(\Omega - \theta)] \\
& + \tfrac{7}{4}\eta' I'^2 \cos [\mathrm{v} + \varpi' - 2\vartheta' + (\pi' - I'') - 2(\Omega' - \theta')] \\
& + \tfrac{7}{2}\eta' II' \cos [\mathrm{v} - \varpi' - \vartheta + \vartheta' - (\pi' - I'') - (\Omega - \theta) + (\Omega' - \theta')] \\
& + \tfrac{7}{2}\eta' II' \cos [\mathrm{v} - \varpi' + \vartheta - \vartheta' - (\pi' - I'') + (\Omega - \theta) - (\Omega' - \theta')] \\
& - \tfrac{7}{2}\eta' II' \cos [\mathrm{v} + \varpi' - \vartheta - \vartheta' + (\pi' - I'') - (\Omega - \theta) - (\Omega' - \theta')].
\end{aligned}$$

On se convaincra facilement, en inspectant les formules exposées précédemment, que les termes omis dans l'expression de $\cos 7H$ que nous avons donnée dans le n° 50, ne contribueront en rien, en ne considérant que la première puissance des fonctions diastématiques, aux termes de la forme envisagée.

En étendant les procédés que nous venons d'expliquer aux termes d'un degré plus élevé que le troisième, il y aurait très peu à ajouter aux règles précédentes. S'agirait-il, par exemple, des termes du quatrième degré par rapport aux fonctions anastématiques et du premier degré relativement à η ou à η', on les trouverait tout simplement, en introduisant, dans les expressions du quatrième degré du n° 50, les valeurs précédentes de $\cos 2\mathrm{v}'$, $\cos(\mathrm{v} - \mathrm{v}')$, etc. Mais si l'on cherchait des termes affectés d'un facteur

diastématique du troisième degré, il faudrait d'abord qu'on mît en évidence les termes du troisième degré des fonctions $\cos v'$, $\cos(v - v')$, etc. ce qui s'effectuerait en introduisant, dans les formules (12, 0, 0, 3), ... des valeurs spéciales de n, et en ajoutant aux arguments certains multiples pairs de v. Après en avoir trouvé les résultats, les termes demandés s'obtiendraient comme auparavant.

Il pourra se montrer avantageux, à certaines occasions, d'exprimer les $\cos nH$ de la manière que nous avons indiquée dans le numéro 51, c'est-à-dire, au moyen des fonctions $\mathfrak{z}$ et $\mathfrak{z}'$, de leurs dérivées et des fonctions trigonométriques des multiples de l'angle $v - v'$. Pour opérer, dans les expressions qui se présentent alors, les transformations destinées à remplacer l'argument v' par V, ainsi que pour établir les expressions des produits $\rho\mathfrak{z}^2 e^{im(v-v')}$, etc., il serait utile de s'être procuré un tableau renfermant les expressions transformées de tous les produits dont il s'agit. Mais comme un tel tableau se dresse presque immédiatement, en vertu des formules (20)—(26) et (39)—(41), je me dispense de le communiquer.

LIVRE TROISIÈME.

Développement de la fonction perturbatrice.

Dans les équations différentielles dont l'intégration porte sur la détermination des coordonnées d'une planète comme fonctions du temps, on donne, avec Lagrange, aux composantes des forces troublantes la forme de dérivées partielles d'une seule fonction nommée fonction perturbatrice. Cette fonction, symétrique par rapport aux coordonnées des diverses planètes et ne dépendant, ni immédiatement du temps, ni des dérivées des coordonnées, est néanmoins d'une nature tellement compliquée qu'il n'y aurait aucun espoir de parvenir aux intégrales des équations du mouvement, ni même à des valeurs approchées de ces intégrales, si l'on voulait retenir les dérivées dont nous avons parlé sous leur forme primitive. Il en naît la nécessité de développer la fonction perturbatrice d'une manière telle qu'on en puisse détacher les termes exerçant l'influence la plus considérable et qui, mis au lieu de la fonction totale dans les équations du mouvement, les rendent intégrables au moyen d'approximations successives.

Déjà, plusieurs méthodes d'effectuer le développement dont il est question sont mises en usage; mais, de ces méthodes, il faut, lorsqu'il s'agit d'établir la théorie absolue d'une planète, éviter toutes celles qui n'ont pas le caractère purement analytique. Il faut, en d'autres mots, pour atteindre le but proposé, éviter les procédés d'interpolation et se restreindre à n'employer qu'un mode de développement tel que les diverses quantités variables d'où dépend la fonction perturbatrice, les fonctions diastématiques et anastématiques non moins que les fonctions trigonométriques ordinaires, soient mises, algébriquement, en évidence.

Parmi les méthodes purement analytiques maintenant en usage, il suffit de mentionner celle de Laplace, notablement perfectionnée par Poisson

et LEVERRIER; celle de M. NEWCOMB, laquelle, au fond, repose sur le même fondement que la méthode de LAPLACE; la méthode de HANSEN et finalement la méthode de M. BACKLUND qui dérive du même principe que celle de HANSEN, et qui offre, au calculateur, au moins les mêmes avantages que celle-ci, mais dont le mécanisme paraît plus simple que les procédés de HANSEN.

La méthode que je vais employer dans l'ouvrage présent, offre les mêmes avantages que les méthodes de LAPLACE-LEVERRIER et de NEWCOMB; mais elle n'est en même temps aucunement inférieure, ni même au point de vue du calcul pratique, à celles de HANSEN et de BACKLUND, notamment si l'on emploie les tables de M. MASAL;[1] elle tient, pour ainsi dire, le milieu entre les méthodes énumérées. J'en ai donné d'ailleurs, il y vingt cinq ans, un aperçu rapide.[2]

Mais avant d'entrer dans l'exposition du détail de la méthode dont il s'agira, je vais rappeler certaines propriétés de la fonction perturbatrice qui nous seront utiles dans la suite.

CHAPITRE I.

Généralités sur la Fonction perturbatrice.

64. La fonction perturbatrice étant formée par une somme de termes tout à fait semblables, on pourra examiner ses propriétés essentielles et exécuter formellement son développement en ne considérant que des formules relatives à un seul de ces termes. Néanmoins, il sera utile de mettre en

---

[1] MASAL, Tables de l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi^{2n}\,d\varphi}{(1-\alpha^2\sin\varphi^2)^{\frac{s}{2}}}$. [Astronomiska iakttagelser och undersökningar på Stockholms observatorium. Vol. IV. 1891.]

[2] Astronomische Nachrichten. Vol. LXX. 1868.

évidence, tout d'abord, l'expression complète de la fonction perturbatrice, vu qu'on doit tenir compte simultanément, dans le calcul des inégalités du deuxième ordre ou d'un ordre plus élevé par rapport aux masses troublantes, de plusieurs des termes mentionnés.

Prenons pour l'unité des masses celle du soleil, et désignons par m_a, m_b, ... les masses des diverses planètes a, b, ... Posons ensuite, en désignant par f un facteur constant inaltéré pour toutes les planètes et dépendant des unités de temps et des distances qu'on a choisis:

$$\mu'_a = f m_a, \qquad \mu'_b = f m_b, \qquad \ldots ;$$

désignons par x_a, y_a, z_a, x_b, ... les coordonnées rectangulaires rapportées à des axes fixes se coupant dans le centre du soleil, et admettons finalement la notation

$$\Omega_{k,l} = \mu'_l \left\{ \frac{1}{\left[(x_k - x_l)^2 + (y_k - y_l)^2 + (z_k - z_l)^2\right]^{\frac{1}{2}}} - \frac{x_k x_l + y_k y_l + z_k z_l}{\left[x_l^2 + y_l^2 + z_l^2\right]^{\frac{3}{2}}} \right\}$$

Cela étant, la fonction perturbatrice complète relative aux forces troublantes qui sollicitent la planète a sera:

$$\Omega_a = \Omega_{a,b} + \Omega_{a,c} + \Omega_{a,d} + \ldots .$$

On écrira de même:

$$\Omega_b = \Omega_{b,a} + \Omega_{b,c} + \Omega_{b,d} + \ldots ,$$

etc.;

et on aura, en admettant les notations:

$$\mu_a = f(1 + m_a); \qquad \mu_b = f(1 + m_b); \quad \text{etc}$$

$$r_a^2 = x_a^2 + y_a^2 + z_a^2; \qquad r_b^2 = x_b^2 + y_b^2 + z_b^2; \quad \text{etc},$$

les équations du mouvement:

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \frac{\mu_k x_k}{r_k^3} = \frac{\partial \Omega_k}{\partial x_k},$$

$$\frac{d^2 y_k}{dt^2} + \frac{\mu_k y_k}{r_k^3} = \frac{\partial \Omega_k}{\partial y_k},$$

$$\frac{d^2 z_k}{dt^2} + \frac{\mu_k z_k}{r_k^3} = \frac{\partial \Omega_k}{\partial z_k}.$$

Dans la suite, lorsqu'il ne sera pas nécessaire de distinguer les différents indices, on pourra, en considérant une planète quelconque k attirée par une autre l, omettre ces indices et écrire x', y', z' au lieu de x_l, y_l, z_l, en sorte que l'on aura:

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{\mu x}{r^3} = \dfrac{\partial \Omega}{\partial x}, \\[2ex] \dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{\mu y}{r^3} = \dfrac{\partial \Omega}{\partial y}, \\[2ex] \dfrac{d^2z}{dt^2} + \dfrac{\mu z}{r^3} = \dfrac{\partial \Omega}{\partial z}, \end{cases}$$

ainsi que l'expression

$$\Omega = \mu' \left\{ \frac{1}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} \right\}.$$

En admettant encore la notation

$$\Delta^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2,$$

l'expression de la fonction Ω sera donnée par la formule

$$(2)\qquad \Omega = \mu' \left\{ \frac{1}{\Delta} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} \right\}.$$

65. Dans ce qui précède, la fonction perturbatrice a été exprimée comme fonction de coordonnées rectangulaires rapportées à des axes fixes, mais cette fonction s'exprime aussi moyennant des coordonnées relatives à des directions variables. En effet, si nous désignons par ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' les coordonnées rectangulaires des planètes k et l, ces coordonnées rapportées à un plan mobile passant par le centre du soleil, et que nous supposions qu'on ait:

$$(\mathrm{I})\qquad \begin{cases} x = \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta, \\ y = \alpha_1\xi + \beta_1\eta + \gamma_1\zeta, \\ z = \alpha_2\xi + \beta_2\eta + \gamma_2\zeta, \end{cases}$$

$$(\mathrm{II})\qquad \begin{cases} x' = \alpha\xi' + \beta\eta' + \gamma\zeta', \\ y' = \alpha_1\xi' + \beta_1\eta' + \gamma_1\zeta', \\ z' = \alpha_2\xi' + \beta_2\eta' + \gamma_2\zeta', \end{cases}$$

nous aurons, après un calcul très facile:

$$xx' + yy' + zz' = \xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta'$$

et

$$\Delta^2 = (\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 + (\zeta - \zeta')^2,$$

relations, dont la vérité est, du reste, immédiatement manifeste.

Mais considérons encore un troisième système d'axes rectangulaires et mobiles ayant aussi l'origine dans le centre du soleil; désignons les coordonnées de la planète l rapportées à ces nouveaux axes par ξ'_1, η'_1, ζ'_1, et admettons les relations

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} x' = \alpha'\xi'_1 + \beta'\eta'_1 + \gamma'\zeta'_1, \\ y' = \alpha'_1\xi'_1 + \beta'_1\eta'_1 + \gamma'_1\zeta'_1, \\ z' = \alpha'_2\xi'_1 + \beta'_2\eta'_1 + \gamma'_2\zeta'_1. \end{cases}$$

En comparant ces expressions des coordonnées x', y', z' avec les expressions (II), on obtiendra sans difficulté les équations

$$\text{(IV)} \qquad \begin{cases} \xi' = A\xi'_1 + A_1\eta'_1 + A_2\zeta'_1, \\ \eta' = B\xi'_1 + B_1\eta'_1 + B_2\zeta'_1, \\ \zeta' = \Gamma\xi'_1 + \Gamma_1\eta'_1 + \Gamma_2\zeta'_1, \end{cases}$$

A, A_1, A_2, B, etc. ayant la signification signalée dans le n° 54, notamment dans les équations (∂), (∂′) et (∂″).

Entre les dérivées partielles de la fonction perturbatrice relatives aux coordonnées des divers systèmes, il existe quelques relations utiles à rappeler.

On obtient d'abord celles-ci:

$$(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\Omega}{\partial x} = \alpha\dfrac{\partial\Omega}{\partial\xi} + \beta\dfrac{\partial\Omega}{\partial\eta} + \gamma\dfrac{\partial\Omega}{\partial\zeta}, \\ \dfrac{\partial\Omega}{\partial y} = \alpha_1\dfrac{\partial\Omega}{\partial\xi} + \beta_1\dfrac{\partial\Omega}{\partial\eta} + \gamma_1\dfrac{\partial\Omega}{\partial\zeta}, \\ \dfrac{\partial\Omega}{\partial z} = \alpha_2\dfrac{\partial\Omega}{\partial\xi} + \beta_2\dfrac{\partial\Omega}{\partial\eta} + \gamma_2\dfrac{\partial\Omega}{\partial\zeta}, \end{cases}$$

d'où l'on tire la suivante:

$$(4) \qquad x\frac{\partial\Omega}{\partial x} + y\frac{\partial\Omega}{\partial y} + z\frac{\partial\Omega}{\partial z} = \xi\frac{\partial\Omega}{\partial\xi} + \eta\frac{\partial\Omega}{\partial\eta} + \zeta\frac{\partial\Omega}{\partial\zeta}.$$

On déduit encore des relations signalées, en ayant égard aux expressions (c), (c'), (c'') du n° 16, les suivantes:

$$(5) \quad \begin{cases} x\dfrac{\partial\Omega}{\partial y} - y\dfrac{\partial\Omega}{\partial x} = \gamma_2\left(\xi\dfrac{\partial\Omega}{\partial\eta} - \eta\dfrac{\partial\Omega}{\partial\xi}\right) + \beta_2\left(\zeta\dfrac{\partial\Omega}{\partial\xi} - \xi\dfrac{\partial\Omega}{\partial\zeta}\right) + \alpha_2\left(\eta\dfrac{\partial\Omega}{\partial\zeta} - \zeta\dfrac{\partial\Omega}{\partial\eta}\right), \\ z\dfrac{\partial\Omega}{\partial x} - x\dfrac{\partial\Omega}{\partial z} = \gamma_1\left(\xi\dfrac{\partial\Omega}{\partial\eta} - \eta\dfrac{\partial\Omega}{\partial\xi}\right) + \beta_1\left(\zeta\dfrac{\partial\Omega}{\partial\xi} - \xi\dfrac{\partial\Omega}{\partial\zeta}\right) + \alpha_1\left(\eta\dfrac{\partial\Omega}{\partial\zeta} - \zeta\dfrac{\partial\Omega}{\partial\eta}\right), \\ y\dfrac{\partial\Omega}{\partial z} - z\dfrac{\partial\Omega}{\partial y} = \gamma\left(\xi\dfrac{\partial\Omega}{\partial\eta} - \eta\dfrac{\partial\Omega}{\partial\xi}\right) + \beta\left(\zeta\dfrac{\partial\Omega}{\partial\xi} - \xi\dfrac{\partial\Omega}{\partial\zeta}\right) + \alpha\left(\eta\dfrac{\partial\Omega}{\partial\zeta} - \zeta\dfrac{\partial\Omega}{\partial\eta}\right), \end{cases}$$

d'où il découle, réciproquement:

$$(5') \quad \begin{cases} \xi\dfrac{\partial\Omega}{\partial\eta} - \eta\dfrac{\partial\Omega}{\partial\xi} = \gamma_2\left(x\dfrac{\partial\Omega}{\partial y} - y\dfrac{\partial\Omega}{\partial x}\right) + \gamma_1\left(z\dfrac{\partial\Omega}{\partial x} - x\dfrac{\partial\Omega}{\partial z}\right) + \gamma\left(y\dfrac{\partial\Omega}{\partial z} - z\dfrac{\partial\Omega}{\partial y}\right), \\ \zeta\dfrac{\partial\Omega}{\partial\xi} - \xi\dfrac{\partial\Omega}{\partial\zeta} = \beta_2\left(x\dfrac{\partial\Omega}{\partial y} - y\dfrac{\partial\Omega}{\partial x}\right) + \beta_1\left(z\dfrac{\partial\Omega}{\partial x} - x\dfrac{\partial\Omega}{\partial z}\right) + \beta\left(y\dfrac{\partial\Omega}{\partial z} - z\dfrac{\partial\Omega}{\partial y}\right), \\ \eta\dfrac{\partial\Omega}{\partial\zeta} - \zeta\dfrac{\partial\Omega}{\partial\eta} = \alpha_2\left(x\dfrac{\partial\Omega}{\partial y} - y\dfrac{\partial\Omega}{\partial x}\right) + \alpha_1\left(z\dfrac{\partial\Omega}{\partial x} - x\dfrac{\partial\Omega}{\partial z}\right) + \alpha\left(y\dfrac{\partial\Omega}{\partial z} - z\dfrac{\partial\Omega}{\partial y}\right). \end{cases}$$

Passons maintenant aux relations où figurent les coordonnées polaires des deux planètes. Nous admettons, comme auparavant, les expressions

$$x = r\cos b\cos l, \qquad x' = r'\cos b'\cos l',$$

$$y = r\cos b\sin l, \qquad y' = r'\cos b'\sin l',$$

$$z = r\sin b, \qquad z' = r'\sin b',$$

$$xx' + yy' + zz' = rr'\cos H,$$

ce qui nous donne, immédiatement:

$$(6) \qquad \Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos H,$$

$$(7) \qquad \Omega = \mu'\left\{\frac{1}{\Delta} - \frac{rr'\cos H}{r'^3}\right\}.$$

Avec les expressions signalées, on parvient facilement aux relations suivantes entre les dérivées partielles:

$$(8)\quad \begin{cases} r\dfrac{\partial\Omega}{\partial r} = x\dfrac{\partial\Omega}{\partial x} + y\dfrac{\partial\Omega}{\partial y} + z\dfrac{\partial\Omega}{\partial z}, \\[2ex] \dfrac{\partial\Omega}{\partial l} = x\dfrac{\partial\Omega}{\partial y} - y\dfrac{\partial\Omega}{\partial x}, \\[2ex] \dfrac{\partial\Omega}{\partial b} = -r\sin b\cos l\dfrac{\partial\Omega}{\partial x} - r\sin b\sin l\dfrac{\partial\Omega}{\partial y} + r\cos b\dfrac{\partial\Omega}{\partial z}, \end{cases}$$

ainsi qu'aux relations inverses que voici:

$$(8')\quad \begin{cases} r\dfrac{\partial\Omega}{\partial x} = -\dfrac{\sin l}{\cos b}\dfrac{\partial\Omega}{\partial l} + \cos l\left\{r\cos b\dfrac{\partial\Omega}{\partial r} - \sin b\dfrac{\partial\Omega}{\partial b}\right\}, \\[2ex] r\dfrac{\partial\Omega}{\partial y} = \quad\dfrac{\cos l}{\cos b}\dfrac{\partial\Omega}{\partial l} + \sin l\left\{r\cos b\dfrac{\partial\Omega}{\partial r} - \sin b\dfrac{\partial\Omega}{\partial b}\right\}, \\[2ex] r\dfrac{\partial\Omega}{\partial z} = r\sin b\dfrac{\partial\Omega}{\partial r} + \cos b\dfrac{\partial\Omega}{\partial b}. \end{cases}$$

On déduit encore les formules données ci-dessous, dont la première n'est qu'un simple renversement de la deuxième des équations (8):

$$(9)\quad \begin{cases} x\dfrac{\partial\Omega}{\partial y} - y\dfrac{\partial\Omega}{\partial x} = \dfrac{\partial\Omega}{\partial l}, \\[2ex] z\dfrac{\partial\Omega}{\partial x} - x\dfrac{\partial\Omega}{\partial z} = -\dfrac{\sin b\sin l}{\cos b}\dfrac{\partial\Omega}{\partial l} - \cos l\dfrac{\partial\Omega}{\partial b}, \\[2ex] y\dfrac{\partial\Omega}{\partial z} - z\dfrac{\partial\Omega}{\partial y} = -\dfrac{\sin b\cos l}{\cos b}\dfrac{\partial\Omega}{\partial l} + \sin l\dfrac{\partial\Omega}{\partial b}. \end{cases}$$

66. Figurons-nous maintenant qu'on veuille choisir les coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \ldots, \alpha', \beta', \ldots$ de manière à avoir toujours:

$$\zeta = 0; \qquad \zeta_1' = 0,$$

ce qui amènerait la nécessité de déterminer les coefficients dont il s'agit conformément aux règles du deuxième chapitre du premier livre. Nous aurons alors:

$$\xi = r\cos v; \qquad \eta = r\sin v,$$

$$\xi_1' = r'\cos v'; \qquad \eta_1' = r'\sin v',$$

et nous parviendrons, en vertu des équations (IV), aux expressions

$$
(10) \quad \begin{cases}
\xi' = r'\{\cos(v' - \Sigma'')\cos\Sigma - \sin(v' - \Sigma'')\sin\Sigma\cos J\}, \\
\eta' = r'\{\cos(v' - \Sigma'')\sin\Sigma + \sin(v' - \Sigma'')\cos\Sigma\cos J\}, \\
\zeta' = - r'\sin J\sin(v' - \Sigma'').
\end{cases}
$$

En mettant, dans les équations (8) et (9), ξ, η, ζ et v au lieu de x, y, z et l, ainsi que $d\mathfrak{z}$ au lieu de $\cos b db$, et en faisant finalement ζ égal à zéro, on aura tout de suite:

$$
(11) \quad \begin{cases}
\xi\dfrac{\partial\Omega}{\partial\xi} + \eta\dfrac{\partial\Omega}{\partial\eta} = r\dfrac{\partial\Omega}{\partial r}, \\
\xi\dfrac{\partial\Omega}{\partial\eta} - \eta\dfrac{\partial\Omega}{\partial\xi} = \dfrac{\partial\Omega}{\partial v},
\end{cases}
$$

et puis, les relations réciproques:

$$
(11') \quad \begin{cases}
\dfrac{\partial\Omega}{\partial\xi} = - \dfrac{\sin v}{r}\dfrac{\partial\Omega}{\partial v} + \cos v\dfrac{\partial\Omega}{\partial r}, \\
\dfrac{\partial\Omega}{\partial\eta} = \dfrac{\cos v}{r}\dfrac{\partial\Omega}{\partial v} + \sin v\dfrac{\partial\Omega}{\partial r}.
\end{cases}
$$

Après avoir obtenu les relations précédentes entre les dérivées partielles, nous allons en chercher les expressions qui, du reste, dérivent très facilement des différentes formes par lesquelles on a représenté la fonction perturbatrice. Nous aurons, en effet, par l'équation (2):

$$
(12) \quad \begin{cases}
\dfrac{\partial\Omega}{\partial x} = - \mu'\left\{\dfrac{x - x'}{\Delta^3} + \dfrac{x'}{r'^3}\right\}, \\
\dfrac{\partial\Omega}{\partial y} = - \mu'\left\{\dfrac{y - y'}{\Delta^3} + \dfrac{y'}{r'^3}\right\}, \\
\dfrac{\partial\Omega}{\partial z} = - \mu'\left\{\dfrac{z - z'}{\Delta^3} + \dfrac{z'}{r'^3}\right\},
\end{cases}
$$

et nous obtiendrons des expressions tout à fait analogues, si nous remplaçons, soit dans l'expression de Ω, soit dans les équations (12), x par ξ, y par η et z par $\zeta = 0$. Il viendra ainsi:

$$
(13) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial \Omega}{\partial \xi} &= -\mu' \left\{ \frac{\xi - \xi'}{\Delta^3} + \frac{\xi'}{r'^3} \right\}, \\
\frac{\partial \Omega}{\partial \eta} &= -\mu' \left\{ \frac{\eta - \eta'}{\Delta^3} + \frac{\eta'}{r'^3} \right\}, \\
\frac{\partial \Omega}{\partial \zeta} &= \mu' \zeta' \left\{ \frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3} \right\}.
\end{aligned}
\right.
$$

Maintenant, en considérant les relations suivantes qu'on obtient facilement en vertu des équations (10):

$$
\begin{aligned}
\xi\xi' + \eta\eta' &= rr' \{ \cos(v - \Sigma) \cos(v' - \Sigma') + \sin(v - \Sigma) \sin(v' - \Sigma') \cos J \} \\
&= rr' \cos H, \\
\xi\eta' - \eta\xi' &= rr' \{ -\sin(v - \Sigma) \cos(v' - \Sigma') + \cos(v - \Sigma) \sin(v' - \Sigma') \cos J \} \\
&= rr' \frac{\partial \cos H}{\partial v},
\end{aligned}
$$

on parvient, moyennant les équations (11), aux formules que voici:

$$
(14) \qquad \left\{
\begin{aligned}
r \frac{\partial \Omega}{\partial r} &= -\mu' \left\{ \frac{r^2 - rr' \cos H}{\Delta^3} + \frac{r \cos H}{r'^2} \right\}, \\
\frac{\partial \Omega}{\partial v} &= \mu' rr' \left\{ \frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3} \right\} \frac{\partial \cos H}{\partial v},
\end{aligned}
\right.
$$

formules qui s'obtiennent, d'ailleurs, au moyen de différentiations directes.

Mettons encore en évidence une relation qui nous sera utile prochainement.

En comparant la formule

$$
\frac{\partial \Omega}{\partial \cos H} = \mu' rr' \left\{ \frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3} \right\},
$$

qu'on obtient facilement, avec la troisième des équations (13), il résultera:

$$
(15) \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta} = \frac{\zeta'}{rr'} \frac{\partial \Omega}{\partial \cos H}.
$$

Mais, puisqu'on a (équ. 3 du n° 47):

$$\cos H = \cos(\mathrm{v} - \mathrm{v}') + \mathrm{h},$$

la formule trouvée s'écrit de la manière suivante:

$$(16) \qquad \frac{\partial\Omega}{\partial\zeta} = \frac{\zeta'}{rr'}\frac{\partial\Omega}{\partial\mathrm{h}}.$$

On pourra se servir de ce résultat pour obtenir une expression remarquable de la dérivée $\frac{\partial\Omega}{\partial z}$.

Dans ce but, reprenons la troisième des équations (3), et introduisons-y d'abord les valeurs (11) des dérivées par rapport à ξ et η. Il viendra ainsi:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Omega}{\partial z} = \; & \alpha_2\left\{-\frac{1}{r}\sin v\frac{\partial\Omega}{\partial v} + \cos v\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right\} \\ & + \beta_2\left\{\frac{1}{r}\cos v\frac{\partial\Omega}{\partial v} + \sin v\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right\} \\ & + \gamma_2\frac{\partial\Omega}{\partial\zeta}.\end{aligned}$$

En considérant les formules (D″) du n° 22, le résultat obtenu se transforme aisément en celui-ci:

$$r\frac{\partial\Omega}{\partial z} = \sin i\cos(\mathrm{v} - \theta)\frac{\partial\Omega}{\partial r} + \sin i\sin(\mathrm{v} - \theta)\frac{r\partial\Omega}{\partial r} + \cos i\frac{\zeta'}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial\mathrm{h}},$$

expression qui, en vertu des équations (46) du numéro cité, s'écrit de la manière suivante:

$$(17) \qquad r\frac{\partial\Omega}{\partial z} = \frac{1}{1+g'}\frac{d\mathfrak{z}}{dr}\frac{\partial\Omega}{\partial r} + \mathfrak{z}\frac{r\partial\Omega}{\partial r} + \sqrt{1 - \mathfrak{z}^2 - \frac{1}{(1+g')^2}\left(\frac{d\mathfrak{z}}{dr}\right)^2}\,\frac{\zeta'}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial\mathrm{h}}.$$

Mais dans cette formule, il faut encore exprimer la fonction ζ' au moyen de $\mathfrak{z}$, de $\mathfrak{z}'$ et des dérivées de ces quantités.

Pour y parvenir promptement, considérons les équations suivantes qui découlent immédiatement des formules (18) du n° 53:

$$\sin J \sin \Sigma'' = \sin i \sin(\theta - \theta') \cos(\theta' + G')$$
$$- (\cos i \sin i' - \sin i \cos i' \cos(\theta - \theta')) \sin(\theta' + G'),$$

$$\sin J \cos \Sigma'' = - \sin i \sin(\theta - \theta') \sin(\theta' + G')$$
$$- (\cos i \sin i' - \sin i \cos i' \cos(\theta - \theta')) \cos(\theta' + G').$$

On en tire:

$$\sin J \sin(v' - \Sigma'') = - \sin i \sin(\theta - \theta') \cos(v' - \theta')$$
$$- (\cos i \sin i' - \sin i \cos i' \cos(\theta - \theta')) \sin(v' - \theta');$$

et maintenant, si nous rappelons l'expression de $\cos(\theta - \theta')$ que nous avons donnée dans le n° 51, que nous remplacions $\cos i'$ par la valeur

$$1 - \frac{1}{2} \sin i'^2 (1 + f'),$$

que nous introduisons:

$$\sin i \sin(v - \theta) = \zeta; \qquad \sin i \cos(v - \theta) = \frac{1}{1 + g} \frac{d\zeta}{dv},$$

$$\sin i' \sin(v' - \theta') = \zeta'; \qquad \sin i' \cos(v' - \theta') = \frac{1}{1 + g'} \frac{d\zeta'}{dv'},$$

et finalement, que nous mettions le résultat ainsi obtenu dans la troisième des équations (10), nous aurons:

$$\frac{z}{r} = \cos i \zeta' - \zeta \cos(v - v') + \frac{1}{1 + g} \frac{d\zeta}{dv} \sin(v - v')$$
$$+ \frac{1}{2} \zeta'(1 + f') \left\{ \left[\zeta\zeta' + \frac{\frac{d\zeta}{dv} \frac{d\zeta'}{dv'}}{(1 + g)(1 + g')} \right] \cos(v - v') \right.$$
$$\left. + \left[\frac{\zeta' \frac{d\zeta}{dv}}{1 + g} - \frac{\zeta \frac{d\zeta'}{dv'}}{1 + g'} \right] \sin(v - v') \right\}.$$

Avec cette expression, on obtiendra de l'équation (17) la suivante

$$(18)\qquad r\frac{\partial\Omega}{\partial z} = \frac{1}{1+g}\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\frac{\partial\Omega}{\partial v} + \mathfrak{z}\frac{r\partial\Omega}{\partial r} + \mathfrak{z}'\left(1 - \mathfrak{z}^2 - \frac{1}{(1+g)}\left(\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)^2\right)\frac{\partial\Omega}{\partial \mathrm{h}}$$

$$- \left[\mathfrak{z}\cos(\mathrm{v} - \mathrm{v}') - \frac{1}{1+g}\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\sin(\mathrm{v} - \mathrm{v}')\right]\sqrt{1 - \mathfrak{z}^2 - \frac{1}{(1+g)^2}\left(\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)^2}\,\frac{\partial\Omega}{d\mathrm{h}}$$

$$+ \frac{1}{2}\mathfrak{z}'(1 + \mathrm{f}')\left\{\left[\mathfrak{z}\mathfrak{z}' + \frac{\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\frac{d\mathfrak{z}}{dv}}{(1+g)(1+\bar{g})}\right]\cos(\mathrm{v} - \mathrm{v}')\right.$$

$$\left. + \left[\frac{\mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{z}}{dv'}}{1+\bar{g}} - \frac{\mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{z}}{dv}}{1+\bar{g}}\right]\sin(\mathrm{v} - \mathrm{v}')\right\}\sqrt{1 + \mathfrak{z}^2 - \frac{1}{(1+\bar{g})^2}\left(\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)^2}\,\frac{\partial\Omega}{\partial h},$$

ce qui est la formule demandée.

67. Lorsqu'il s'agit de développer effectivement les dérivées de la fonction perturbatrice, on pourra opérer de deux manières distinctes. On les trouvera d'abord en développant les diverses expressions que nous avons mises en évidence, dans le numéro précédent, mais on les obtiendra aussi au moyen de différentiations directes, si l'on a établi, préalablement, le développement de la fonction perturbatrice elle-même.

Nous allons prochainement développer la fonction perturbatrice dans une série trigonométrique procédant suivant les multiples de l'angle H. Par cette opération, on obtiendra d'abord les divers coefficients comme fonctions de r et de r'. Mais puisqu'on va exprimer, finalement, r au moyen de la fonction ρ et, r' au moyen de ρ', il conviendra d'effectuer les différentiations par rapport à ces dernières quantités.

Admettons le développement

$$(19)\qquad \Omega = U_0 + 2U_1\cos H + 2U_2\cos 2H + \ldots,$$

les U_n s'exprimant au moyen de la formule

$$(\alpha)\qquad U_n = A_0 r^n + A_1 r^{n+1} + \ldots$$

ou bien par celle-ci:

$$(\beta)\qquad U_n = \frac{B_0}{r^n} + \frac{B_1}{r^{n+1}} + \ldots,$$

les A_m ainsi que les B_m étant des fonctions de r'

En vertu de ces expressions, la dérivée partielle de la fonction Ω par rapport à r s'obtient immédiatement; mais il nous faut chercher la relation entre les deux dérivées partielles $\frac{\partial\Omega}{\partial r}$ et $\frac{\partial\Omega}{\partial\rho}$.

Dans l'orbite périplégmatique, nous avons la relation

$$r = \frac{a(1-\eta^2)}{1+\rho}$$

entre r et ρ; mais la valeur de r tirée de cette formule, après y avoir remplacé ρ par $\eta\cos(v-\omega-(\pi-I'))$, n'est pas identique avec la valeur vraie du rayon vecteur, qui est affecté des actions périodiques dépendant, quant à leur plus grande partie, des configurations des planètes. Les termes représentant ces actions seront appelés *inégalités diastématiques.*

Désignons, dorénavant, le rayon vecteur dans l'orbite périplégmatique par (r), et mettons

(20) $$(r) = \frac{a(1-\eta^2)}{1+(\rho)},$$

en sorte que nous aurons:

(21) $$\begin{aligned}(\rho) &= \eta\cos(v-\omega-(\pi-I')),\\ &= \eta\cos(\mathrm{v}-\tilde{\omega}-(\pi-I')),\end{aligned}$$

Posons encore:

(22) $$\begin{cases}\rho-(\rho) = R,\\ \dfrac{a}{r}-\dfrac{a}{(r)} = \xi;\end{cases}$$

les fonctions R et ξ, renfermant, toutes les deux, les inégalités diastématiques, sont liées entre elles moyennant une relation très simple, à savoir:

(23) $$R = (1-\eta^2)\xi$$

Entre les dérivées partielles relatives à ρ, (ρ) et R, on peut d'abord signaler les relations

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\rho} \qquad \frac{\partial\Omega}{\partial(\rho)} = \frac{\partial\Omega}{\partial R},$$

auxquelles on peut ajouter la suivante

$$\frac{\partial \Omega}{\partial R} = \frac{1}{1 - \eta^2} \frac{\partial \Omega}{\partial \xi}.$$

Maintenant, si nous différentions la relation entre r et ρ, il viendra:

$$\frac{\partial r}{\partial \rho} = -\frac{a(1 - \eta^2)}{(1 + \rho)^2},$$

ou bien, en admettant la notation

$$(24) \qquad (c) = \mu a(1 - \eta^2):$$

$$\frac{\partial r}{\partial \rho} = -\frac{\mu r^2}{(c)}.$$

En vertu de cette expression, on parvient au résultat demandé, savoir:

$$(25) \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial \rho} = \frac{\partial \Omega}{\partial (\rho)} = -\frac{\mu r^2}{(c)} \frac{\partial \Omega}{\partial r},$$

formule qui peut être vérifiée facilement en y introduisant la valeur de Ω donnée par l'équation (α) ou par l'équation (β).

On obtient immédiatement, en différentiant le développement (α):

$$\frac{\partial V}{\partial r} = nA_0 r^{n-1} + (n + 1)A_1 r^n + \ldots,$$

d'où l'on tire, en vertu de l'équation (25):

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = -\frac{\mu}{(c)}\{nA_0 r^{n+1} + (n + 1)A_1 r^{n+2} + \ldots\}$$

$$= -\frac{n(c)^n}{\mu^n} \frac{A_0}{(1 + \rho)^{n+1}} - \frac{(n + 1)(c)^{n+1}}{\mu^{n+1}} \frac{A_1}{(1 + \rho)^{n+2}} - \ldots;$$

mais c'est justement cette expression qu'on obtient en différentiant, par rapport à ρ, l'expression (α), après y avoir remplacé r par sa valeur $\frac{(c)}{\mu(1 + \rho)}$. La formule (25) se trouve ainsi vérifiée. Le calcul n'aurait pas changé beaucoup si l'on était parti de la formule (β).

Cela étant, si les U_n étaient développés suivant les puissances de (ρ), (ρ'), ξ et ξ', nous obtiendrions la dérivée partielle par rapport à ρ moyennant la formule

$$(26) \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial \rho} = \frac{\partial U_0}{\partial(\rho)} + 2\frac{\partial U_1}{\partial(\rho)}\cos H + 2\frac{\partial U_2}{\partial(\rho)}\cos 2H + \ldots$$

La dérivée partielle par rapport à v se trouve immédiatement en utilisant l'expression

$$(27) \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial v} = 2U_1\frac{\partial \cos H}{\partial v} + 2U_2\frac{\partial \cos 2H}{\partial v} + \ldots,$$

opération qui exige, toutefois, que les $\cos nH$ soient donnés par les formules que nous avons rassemblées dans le n° 50.

Mais on pourra aussi parvenir au résultat demandé en employant la formule (7) du n° 49. On aura, en vertu de cette relation:

$$(28) \qquad \begin{aligned} \Omega = \; & U_0 + 2U_1\cos \mathrm{w} + 2U_2\cos 2\mathrm{w} + \ldots \\ & + 2\{\Psi_{1,1}U_1 + \Psi_{2,1}U_2 + \ldots\}\mathrm{h} \\ & + 2\{\Psi_{2,2}U_2 + \Psi_{3,2}U_3 + \ldots\}\mathrm{h}^2 \\ & + \ldots, \end{aligned}$$

où l'on a écrit, pour abréger un peu, w au lieu de $\mathrm{v} - \mathrm{v}'$.

Maintenant, nous remarquons que la relation

$$\frac{\partial \Omega}{\partial v} = \frac{\partial \Omega}{\partial \mathrm{v}}$$

est visiblement légitime, ce qui nous permet de conclure l'expression suivante:

$$(29) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial v} = & - 2U_1\sin \mathrm{w} - 4U_2\sin 2\mathrm{w} - \ldots \\ & + 2\left\{U_1\frac{\partial \Psi_{1,1}}{\partial \mathrm{v}} + U_2\frac{\partial \Psi_{2,1}}{\partial \mathrm{v}} + \ldots\right\}\mathrm{h} \\ & + \ldots \\ & + 2\{\Psi_{1,1}U_1 + \Psi_{2,1}U_2 + \ldots\}\frac{\partial \mathrm{h}}{\partial \mathrm{v}} \end{aligned}$$

Les dérivées partielles des fonctions $\Psi_{n,m}$ s'obtiennent aisément en vertu des formules indiquées dans le n° 49. On aura, en effet:

$$\frac{\partial \Psi_{1,1}}{\partial v} = 0 ; \qquad \frac{\partial \Psi_{2,1}}{\partial v} = -4 \sin w ; \qquad \frac{\partial \Psi_{2,2}}{\partial v} = 0$$

$$\frac{\partial \Psi_{3,1}}{\partial v} = -12 \sin w$$

$$\frac{\partial \Psi_{3,2}}{\partial v} = -12 \sin w$$

$$\frac{\partial \Psi_{3,3}}{\partial v} = 0$$

etc.

Quant aux dérivées partielles des fonctions h, h^2, . . . , on les obtient en différentiant l'expression

$$\begin{aligned} h = & - \frac{1}{2} \sin i^2 (1 + f) \sin (v - \theta) \sin (v' - \theta) \\ & - \frac{1}{2} \sin i' (1 + f') \sin (v - \theta') \sin (v' - \theta') \\ & + \frac{1}{4} \sin i^2 \sin i'^2 (1 + f)(1 + f') \cos (\theta - \theta') \sin (v - \theta) \sin (v' - \theta') \\ & + \mathfrak{Z}', \end{aligned}$$

[voir les formules du n° 51] ainsi que les puissances de cette expression. Dans les cas, en effet assez fréquents, où l'on peut égaler h à h_0 [voir éqv. (4) du n° 47], on emploiera tout simplement les expressions (5, a), (6 , a) et (6 , b).

En différentiant l'expression précédente de h, il viendra:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial v} = & - \frac{1}{2} \sin i^2 (1 + f) \cos (v - \theta) \sin (v' - \theta) \\ & - \frac{1}{2} \sin i'^2 (1 + f') \cos (v - \theta') \sin (v' - \theta') \\ & + \frac{1}{4} \sin i^2 \sin i'^2 (1 + f)(1 + f') \cos (\theta - \theta') \cos (v - \theta) \sin (v' - \theta') \\ & + \mathfrak{z}' \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial v}, \end{aligned}$$

d'où l'on tire, par un calcul tout à fait semblable à celui du n° 51 :

$$(30)\qquad \frac{\partial \mathrm{h}}{\partial \mathrm{v}} = -\frac{1}{2}\left[\frac{1+\mathrm{f}}{1+g}\mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{z}}{dv} + \frac{1+\mathrm{f}'}{1+g}\mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right]\cos \mathrm{w}$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{1+\mathrm{f}}{(1+g)^2}\left(\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)^2 + (1+\mathrm{f}')\mathfrak{z}'^2\right]\sin \mathrm{w}$$

$$+\frac{1}{4}\frac{(1+\mathrm{f})(1+\mathrm{f}')}{1+g}\left[\frac{1}{(1+g)(1+g')}\mathfrak{z}'\left(\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)^2\frac{d\mathfrak{z}'}{dv} + \mathfrak{z}\mathfrak{z}'^2\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right]\cos \mathrm{w}$$

$$+\frac{1}{4}\frac{(1+\mathrm{f})(1+\mathrm{f}')}{1+g}\left[\frac{1}{1+g}\mathfrak{z}\mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\frac{d\mathfrak{z}'}{dv} - \frac{1}{1+g}\mathfrak{z}'^2\left(\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)^2\right]\sin \mathrm{w}$$

$$+\mathfrak{z}'\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial \mathrm{v}}.$$

En ne retenant que les termes du second degré, on aura:

$$(31)\qquad \frac{\partial \mathrm{h}}{\partial \mathrm{v}} = -\left(\mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{z}}{d\mathrm{v}} + \mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}}{d\mathrm{v}}\right)\cos \mathrm{w} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{d\mathfrak{z}}{d\mathrm{v}}\right)^2 + \mathfrak{z}'^2\right)\sin \mathrm{w} + \mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}'}{d\mathrm{v}},$$

formule qu'on obtient aussi en différentiant, par rapport à v seul, l'équation (10) du n° 51, et en éliminant la seconde dérivée de $\mathfrak{z}$ au moyen de l'équation approchée

$$\frac{d^2\mathfrak{z}}{d\mathrm{v}^2} + \mathfrak{z} = 0.$$

Il est en effet visible, par l'équation (55), du n° 23, que la somme formant le premier membre de l'équation indiquée ci-dessus est une quantité du premier ordre par rapport aux forces troublantes.

Quant aux différentiations directes par rapport à v ou v, il faut remarquer qu'on doit les effectuer avant le changement de l'argument v′ en V, et avant avoir remplacé ρ par son expression dépendant de l'argument diastématique.

68. La dérivée partielle relative à $\cos H$ s'obtient en différentiant les divers termes du développement (19). Mais il faut y remarquer, toutefois, la formule

$$\frac{d\cos nH}{d\cos H} = n\frac{\sin nH}{\sin H},$$

qu'on obtient sans difficulté.

En vertu de cette formule, on obtiendra, si n est un nombre pair,

$$\frac{d \cos 2mH}{d \cos H} = 4m[\cos H + \cos 3H + \ldots + \cos(2m - 1)H],$$

et si n est un nombre impair:

$$\frac{d \cos(2m + 1)H}{d \cos H} = (2m + 1)[1 + 2 \cos 2H + 2 \cos 4H + \ldots + 2 \cos 2mH].$$

Après avoir différentié l'équation (19), il en résultera, en considérant les relations établies tout à l'heure:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial \cos H} = {} & 2[U_1 + 3U_3 + 5U_5 + \ldots] \\ & + 2[4U_2 + 8U_4 + 12U_6 + \ldots] \cos H \\ & + 2[6U_3 + 10U_5 + 14U_7 + \ldots] \cos 2H \\ & + \ldots . \end{aligned}$$

Mais cette formule se transforme aisément de manière qu'elle paraît développée suivant les puissances de h. Pour cet effet, il ne faut que substituer les valeurs de $\cos nH$ tirées de l'équation (7) du n° 49.

Admettons qu'on ait obtenu ainsi le développement

$$(32) \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial \cos H} = W_1 + 2W_2 \mathrm{h} + 3W_3 \mathrm{h}^2 + \ldots ,$$

les W étant des séries trigonométriques procédant suivant les multiples de l'angle w, et dont les coefficients sont certains développements linéaires des fonctions U_1, U_2, ... Nous aurons, en effet, par les opérations indiquées, les expressions suivantes, auxquelles est jointe celle de W_0, dont la signification sera élucidée prochainement,

$$\begin{aligned} W_0 &= U_0 + 2U_1 \cos \mathrm{w} + 2U_2 \cos 2\mathrm{w} + 2U_3 \cos 3\mathrm{w} + \ldots , \\ W_1 &= 2U_1 + 6U_3 + 10U_5 + 14U_7 + \ldots \\ & \quad + \{8U_2 + 16U_4 + 24U_6 + \ldots\} \cos \mathrm{w} \\ & \quad + \{12U_3 + 20U_5 + 28U_7 + \ldots\} \cos 2\mathrm{w} \\ & \quad + \{16U_4 + 24U_6 + 32U_8 + \ldots\} \cos 3\mathrm{w} \\ & \quad + \ldots , \end{aligned}$$

$$W_2 = 4U_2 + 32U_4 + 108U_6 + 256U_8 + \dots$$
$$+ \{24U_3 + 120U_5 + 336U_7 + 720U_9 + \dots\}\cos \mathrm{w}$$
$$+ \{48U_4 + 192U_6 + 480U_8 + \dots\}\cos 2\mathrm{w}$$
$$+ \dots,$$

$$W_3 = 8U_3 + 120U_5 + 672U_7 + 2400U_9 + \dots$$
$$+ \{64U_4 + 576U_6 + 2560U_8 + \dots\}\cos \mathrm{w}$$
$$+ \{160U_5 + 1120U_7 + 4320U_9 + \dots\}\cos 2\mathrm{w}$$
$$+ \dots,$$

etc.

La relation
$$\frac{\partial \Omega}{\partial \cos H} = \frac{\partial \Omega}{\partial \mathrm{h}}$$
nous fournit immédiatement un autre mode d'exprimer les fonctions W. On conclut, en effet, facilement que l'intégrale de l'équation (32) peut se mettre sous la forme

$$(33) \qquad \Omega = W_0 + W_1 \mathrm{h} + W_2 \mathrm{h}^2 + \dots$$

W_0 ayant d'abord la signification d'une fonction arbitraire. Mais alors, on trouvera, en comparant l'équation (33) avec l'équation (28): quant à W_0, la même expression que nous venons de signaler, et pour les autres fonctions W, les valeurs suivantes:

$$(34, 1) \qquad W_1 = 2\{\Psi_{1.1}U_1 + \Psi_{2.1}U_2 + \Psi_{3.1}U_3 + \dots\},$$

$$(34, 2) \qquad W_2 = 2\{\Psi_{2.2}U_2 + \Psi_{3.2}U_3 + \Psi_{4.2}U_4 + \dots\},$$

etc.

On en pourrait retrouver les formules numériques que nous venons de signaler, toutefois après avoir étendu, un peu, les formules du n° 49.

Mais bien que les expressions données suffisent aux théories des grandes planètes, je vais, néanmoins, chercher un autre mode de représenter les

fonctions W, et j'obtiendrai en même temps une nouvelle méthode d'évaluer les fonctions $\Psi_{n,m}$, ce qui pourra être de quelque intérêt théorique.

69. En se rappelant l'origine des fonctions W_m, on s'aperçoit sans peine du fait que les coefficients numériques des fonctions U_n, entrant dans les divers W_m, ne sont aucunement dépendants de la nature de la fonction Ω, pourvu qu'elle soit une fonction holomorphe de $\cos H$. C'est tout le contraire: chaque fonction de $\cos H$ qui se développe dans une série de la forme (19), peut aussi être représentée moyennant un développement de la forme (33). Les entiers figurant comme coefficients des divers développements dont il s'agit maintenant, restent constamment les mêmes, seulement les U_n changent. Par cette remarque, on obtiendra les entiers demandés en développant une fonction quelconque de $\cos H$, ce qui donne lieu à considérer une fonction dont le développement s'opère d'une manière aussi facile que possible.

Dans ce but, supposons que la fonction Ω ait la forme assez simple:

$$\Omega = \{1 - 2\beta \cos H + \beta^2\}^{-1};$$

alors, les fonctions U_n seront données moyennant la formule générale

$$U_n = \frac{\beta^n}{1 - \beta^2}.$$

D'autre part, si nous posons:

$$W_m = \frac{(2\beta)^m}{(1 - 2\beta \cos w + \beta^2)^{m+1}},$$

la fonction Ω sera représentée moyennant la formule (33).

Maintenant, si nous admettons le développement

$$(35) \qquad W_m = W_0^{(m)} + 2 W_1^{(m)} \cos w + 2 W_2^{(m)} \cos 2w + \ldots,$$

les coefficients $W_\nu^{(m)}$ étant des fonctions de nombres entiers et des fonctions U_n, nous aurons généralement:

$$W_\nu^{(m)} = (2\beta)^m \left\{ \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+\nu)}{1.2\ldots\nu} \beta^\nu + \frac{m+1}{1} \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+\nu+1)}{1.2\ldots(\nu+1)} \beta^{\nu+2} \right.$$
$$\left. + \frac{(m+1)(m+2)}{1.2} \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+\nu+2)}{1.2\ldots(\nu+2)} \beta^{\nu+4} + \ldots \right\}.$$

Mais cette expression s'écrit aussi de la manière suivante:

$$W_\nu^{(m)} = \frac{(m+1)(m+2)\dots(m+\nu)}{1.2\dots\nu}\,2^m\,\frac{\beta^{m+\nu}}{1-\beta^2}\left\{1 + \left[\frac{m+1}{1}\,\frac{m+\nu+1}{\nu+1} - 1\right]\beta^2\right.$$

$$\left. + \frac{m+1}{1}\,\frac{m+\nu+1}{\nu+1}\left[\frac{m+2}{2}\,\frac{m+\nu+2}{\nu+2} - 1\right]\beta^4 + \dots\right\},$$

d'où l'on conclut, en considérant l'expression de U_n, que les coefficients du développement

$$(36)\qquad W_\nu^{(m)} = T_\nu^{m,\nu}\,U_{m+\nu} + T_{\nu+2}^{m,\nu}\,U_{m+\nu+2} + \dots$$

sont donnés par les expressions

$$T_\nu^{m,\nu} = \frac{(m+1)(m+2)\dots(m+\nu)}{1.2\dots\nu}\,2^m$$

$$T_{\nu+2}^{m,\nu} = \frac{(m+1)(m+2)\dots(m+\nu)}{1.2\dots\nu}\left[\frac{m+1}{1}\,\frac{m+\nu+1}{\nu+1} - 1\right]2^m,$$

$$T_{\nu+1}^{m,\nu} = \frac{m+1}{1}\,\frac{(m+1)(m+2)\dots(m+\nu+1)}{1.2\dots(\nu+1)}\left[\frac{m+2}{2}\,\frac{m+\nu+2}{\nu+2} - 1\right]2^m,$$

$$T_{\nu+6}^{m,\nu} = \frac{(m+1)(m+2)}{1.2}\,\frac{(m+1)(m+2)\dots(m+\nu+2)}{1.2\dots(\nu+2)}\left[\frac{m+3}{3}\,\frac{m+\nu+3}{\nu+3} - 1\right]2^m$$

etc.,

ou bien, par l'expression générale

$$T_{\nu+2r}^{m,\nu} = \frac{m(m+1)\dots(m+r-1)}{1.2\dots r}\,\frac{(m+1)(m+2)\dots(m+\nu+r-1)}{1.2\dots(\nu+r)}\,(m+\nu+2r)\,2^m.$$

Cela établi, si nous comparons, avec l'équation (34, m), le résultat s'obtenant par l'introduction de l'expression (36) dans le développement (35), nous aurons les formules générales que voici:

$$\psi_{m,m} = \frac{1}{2}\,T_0^{m,0},$$

$$\psi_{m+1,m} = T_1^{m,1}\cos w,$$

$$\psi_{m+2,m} = \frac{1}{2}\,T_2^{m,0} + T_2^{m,2}\cos 2w,$$

$$\Psi_{m+3,m} = \mathrm{T}_3^{m,1} \cos \mathrm{w} + \mathrm{T}_3^{m,3} \cos 3\mathrm{w},$$

$$\Psi_{m+4,m} = \frac{1}{2} \mathrm{T}_4^{m,0} + \mathrm{T}_4^{m,2} \cos 2\mathrm{w} + \mathrm{T}_4^{m,4} \cos 4\mathrm{w},$$

etc.

Voilà les résultats auxquels j'ai visé.

70. J'entends par le symbole $\mathrm{D_v}$ une différentiation qui porte uniquement sur la variable v, tant qu'elle est mise en évidence dans les fonctions (ρ) et $\cos H$. Sont alors considérées comme constantes, outre v' et $(\rho)'$, les fonctions $\eta \cos(\pi - \Gamma)$, $\eta \sin(\pi - \Gamma)$, $I \sin(\Omega - \Theta)$, $I \cos(\Omega - \Theta)$, $\eta' \cos(\pi' - \Gamma')$, ..., ξ, ξ', $\partial\mathfrak{z}$ et $\partial\mathfrak{z}'$, ainsi que les arguments $\bar{\omega}$, $\bar{\omega}'$, $\bar{\vartheta}$ et $\bar{\vartheta}'$.

Par la définition, il vient immédiatement:

$$(37) \qquad \mathrm{D_v}\Omega = \frac{\partial\Omega}{\partial \mathrm{v}} + \frac{\partial\Omega}{\partial\rho} \mathrm{D_v}(\rho),$$

ou bien la formule suivante:

$$(37') \qquad \mathrm{D_v}\Omega = \frac{\partial\Omega}{\partial \mathrm{v}} + \frac{\partial\Omega}{\partial r} \mathrm{D_v} r.$$

Que les deux formules en effet sont identique, cela se comprend en vertu de la relation (26).

Par l'expression

$$(\rho) = \eta \cos \mathrm{F},$$

F étant l'argument diastématique, savoir l'angle $\mathrm{v} - \bar{\omega} - (\pi - \Gamma)$, on obtient sur le champ:

$$\mathrm{D_v}(\rho) = -\eta \sin \mathrm{F}.$$

D'un autre côté, en admettant la relation

$$\frac{d(\rho)}{d\mathrm{v}} = -\eta \sin \mathrm{F} - (\lambda),$$

(λ) étant une fonction de la même nature qu'on a introduite, dans l'équation (39) du n° 13, il viendra:

$$\mathrm{D_v}(\rho) = \frac{d(\rho)}{d\mathrm{v}} + (\lambda)$$

$$= \frac{d\rho}{d\mathrm{v}} - \frac{dR}{d\mathrm{v}} + (\lambda).$$

En introduisant la première de ces valeurs dans l'équation (37), il résultera:

$$(38)\qquad \frac{\partial \Omega}{\partial v} + \frac{\partial \Omega}{\partial \rho}\frac{d(\rho)}{dv} = D_v \Omega - (\lambda)\frac{\partial \Omega}{\partial \rho},$$

formule qui nous deviendra très utile dans la suite.

Concevons maintenant un terme isolé de Ω, savoir:

$$\Omega = a(\rho)^s \cos(nv - A),$$

où a et A ont la signification de certaines fonctions du temps, ne renfermant pas, toutefois, (ρ), ni v. En différentiant ce terme, il viendra:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \rho} = sa(\rho)^{s-1}\cos(nv - A); \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial v} = -na(\rho)^n \sin(nv - A),$$

et ensuite:

$$D_v \Omega = \frac{\partial \Omega}{\partial v} + \frac{\partial \Omega}{\partial \rho} D_v(\rho) = -sa\eta^s \cos F^{s-1} \sin F \cos(nv - A)$$
$$- na\eta^s \cos F^s \sin(nv - A).$$

Mais puisque la fonction $\cos F^s$ s'exprime par le développement fini

$$\cos F^s = \sum \alpha_{s-2\nu} \cos(s - 2\nu) F,$$

les α étant des coefficients rationnels, an aura aussi:

$$\cos F^{s-1} \sin F = \sum \frac{s - 2\nu}{s} \alpha_{s-2\nu} \sin(s - 2\nu) F.$$

Avec ces deux expressions, on tire de l'équation précédente le résultat que voici:

$$(39)\qquad D_v \Omega = -a\eta^s \sum \alpha_{s-2\nu} \{(s - 2\nu)\sin(s - 2\nu) F \cos(nv - A)$$
$$+ n\cos(s - 2\nu) F \sin(nv - A)\},$$

d'où l'on conclut que la dérivée $D_v \Omega$ ne renferme aucun terme dont l'argument soit exempt de l'angle v multiplié par un nombre entier. En effet, un tel terme ne pourrait naître que si l'entier $s - 2\nu$ était égal à n,

mais dans ce cas, la somme des deux termes entre les parenthèses serait égale à:

$$\mathrm{n}\sin(\mathrm{nF} + \mathrm{nv} - \mathrm{A}) - \mathrm{n}\sin(2\mathrm{nv} - \mathrm{n}\varpi - \mathrm{n}(\pi - \Gamma) - \mathrm{A}).$$

Il est donc évident que le terme indépendant de v manque, dans l'expression dont il s'agit, ce qui revient à dire que la dérivée $D_v\Omega$ ne contient pas des termes sousélémentaires du type (A).[1]

Dans ce qui suit, nous allons développer la fonction perturbatrice suivant les puissances de ξ et de ξ', de manière que nous aurons un résultat de la forme

$$(40)\qquad \begin{aligned} \Omega = \Omega_{0,0} &+ (1 - \eta^2)\xi\Omega_{1,0} + (1 - \eta^2)^2\xi^2\Omega_{2,0} + \dots \\ &+ (1 + \eta'^2)\xi'\Omega_{0,1} + (1 - \eta'^2)\xi'^2\Omega_{0,2} + \dots \\ &+ (1 - \eta^2)(1 - \eta'^2)\,\Omega_{1,1} + \dots \\ &+ \dots . \end{aligned}$$

Il s'entend, par ce que nous venons de dire, que la dérivée $D_v\Omega$ s'obtiendra moyennant la formule

$$(41)\qquad \begin{aligned} D_v\Omega = D_v\Omega_{0,0} &+ (1 - \eta^2)\xi D_v\Omega_{1,0} + \dots \\ &+ (1 - \eta'^2)\xi' D_v\Omega_{0,1} + \dots , \end{aligned}$$

et de même on aura l'expression

$$(42)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial\Omega}{\partial\rho} = \frac{\partial\Omega_{0,0}}{\partial(\rho)} &+ (1 - \eta^2)\xi\frac{\partial\Omega_{1,0}}{\partial(\rho)} + \dots \\ &+ (1 - \eta'^2)\xi'\frac{\partial\Omega_{0,1}}{\partial(\rho)} + \dots . \end{aligned}$$

71. Avant de terminer ce chapitre, je me propose d'établir quelques relations entre les dérivées partielles relatives aux coordonnées des deux planètes, relations qu'on pourra utiliser, soit pour les calculs directs, soit pour les vérifications.

---

[1] Quant à cette notation, le lecteur est renvoyé à la page 37.

Remarquons avant tout les expressions

$$
(43)\qquad
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial\Omega}{\partial x} &= \mu'\left\{\frac{x'-x}{\Delta^3} - \frac{x'}{r^3} + 3\,\frac{x\,(xx'+yy'+zz')}{r^5}\right\},\\
\frac{\partial\Omega}{\partial y} &= \mu'\left\{\frac{y'-y}{\Delta^3} - \frac{y'}{r^3} + 3\,\frac{y\,(xx'+yy'+zz')}{r^5}\right\},\\
\frac{\partial\Omega}{\partial z} &= \mu'\left\{\frac{z'-z}{\Delta^3} - \frac{z'}{r^3} + 3\,\frac{z\,(xx'+yy'+zz')}{r^5}\right\},
\end{aligned}
\right.
$$

dans lesquelles on peut remplacer, simultanément, x par ξ, x' par ξ', y par η, etc.

Des deux systèmes (12) et (43), on tire facilement la relation

$$
(44)\qquad r\frac{\partial\Omega}{\partial r} + r'\frac{\partial\Omega}{\partial r'} = -\Omega,
$$

qui s'écrit aussi:

$$
(44')\qquad (1+\rho)\frac{\partial\Omega}{\partial\rho} + (1+\rho')\frac{\partial\Omega}{\partial\rho'} = -\Omega
$$

On obtient ensuite:

$$
(45)\qquad x\frac{\partial\Omega}{\partial y} - y\frac{\partial\Omega}{\partial x} = -x'\frac{\partial\Omega}{\partial y'} + y'\frac{\partial\Omega}{\partial x'},
$$

relation dans laquelle on peut remplacer, simultanément, x par ξ, x' par ξ', etc. de sorte qu'on aura:

$$
(45')\qquad \xi\frac{\partial\Omega}{\partial\eta} - \eta\frac{\partial\Omega}{\partial\xi} = -\xi'\frac{\partial\Omega}{\partial\eta'} + \eta'\frac{\partial\Omega}{\partial\xi'}.
$$

Ensuite, si l'on désigne par ξ_1, η_1, ζ_1, ξ'_1, η'_1, ζ'_1 les coordonnées des deux planètes rapportées à des axes dont deux sont situés dans le plan instantané de la seconde planète, on aura aussi:

$$
(45'')\qquad \xi_1\frac{\partial\Omega}{\partial\eta_1} - \eta_1\frac{\partial\Omega}{\partial\xi_1} = -\xi'_1\frac{\partial\Omega}{\partial\eta'_1} + \eta'_1\frac{\partial\Omega}{\partial\xi'_1}.
$$

Mais, il s'agit avant tout d'obtenir une relation entre les quantités

$\xi\frac{\partial\Omega}{\partial\eta}-\eta\frac{\partial\Omega}{\partial\xi}$ et $\xi_1'\frac{\partial\Omega}{\partial\eta_1'}-\eta_1'\frac{\partial\Omega}{\partial\xi_1'}$, ce qui revient à dire entre les dérivées $\frac{\partial\Omega}{\partial \mathrm{v}}$ et $\frac{\partial\Omega}{\partial \mathrm{v}'}$.

Dans ce but, remplaçons, dans la troisième des équations (43), z par ζ_1 et z' par ζ_1'; nous aurons alors, après avoir égalé, dans le second membre, ζ_1' à zéro, le résultat

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\zeta_1'}=\mu'\zeta_1\left(\frac{1}{\Delta^3}-\frac{1}{r'^3}\right).$$

Mais la coordonnée ζ_1, étant d'abord donnée moyennant la formule

$$\zeta_1=A_2\xi+B_2\eta,$$

s'exprime aussi, en considérant les formules (∂'') du n° 54, par celle-ci:

$$\zeta_1=r\sin J\sin(v-\Sigma).$$

On aura donc finalement:

$$(46)\qquad \frac{\partial\Omega}{\partial\zeta_1'}=\mu' r\sin J\sin(v-\Sigma)\left(\frac{1}{\Delta^3}-\frac{1}{r'^3}\right).$$

Le résultat que nous venons de trouver s'obtient encore d'une autre manière, un peu moins directe, il est vrai, mais néanmoins, utile à indiquer.

En vertu des équations (IV) du n° 65, on aura immédiatement les expressions

$$(47)\qquad \begin{cases}\dfrac{\partial\Omega}{\partial\xi_1'}=A\,\dfrac{\partial\Omega}{\partial\xi'}+B\,\dfrac{\partial\Omega}{\partial\eta'}+\Gamma\,\dfrac{\partial\Omega}{\partial\zeta'},\\[2ex] \dfrac{\partial\Omega}{\partial\eta_1'}=A_1\dfrac{\partial\Omega}{\partial\xi'}+B_1\dfrac{\partial\Omega}{\partial\eta'}+\Gamma_1\dfrac{\partial\Omega}{\partial\zeta'},\\[2ex] \dfrac{\partial\Omega}{\partial\zeta_1'}=A_2\dfrac{\partial\Omega}{\partial\xi'}+B_2\dfrac{\partial\Omega}{\partial\eta'}+\Gamma_2\dfrac{\partial\Omega}{\partial\zeta'},\end{cases}$$

dont la troisième, si l'on considère les valeurs (43), après y avoir remplacé $x, y, z, x_1, \ldots$ par $\xi, \eta, \zeta, \xi_1, \ldots$, conduit à la formule

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\zeta_1'}=\mu'(A_2\xi+B_2\eta+\Gamma_2\zeta)\left(\frac{1}{\Delta^3}-\frac{1}{r'^3}\right)$$
$$-\mu'(A_2\xi'+B_2\eta'+\Gamma_2\zeta')\left(\frac{1}{\Delta^3}-\frac{3(\xi\xi'+\eta\eta'+\zeta\zeta')}{r'^5}\right).$$

Mais puisqu'on a:

$$\zeta = 0,$$

$$\zeta_1' = A_2\xi' + B_2\eta' + \Gamma_2\zeta' = 0,$$

la formule précédente change en celle-ci:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\zeta_1'} = \mu'(A_2\xi + B_2\eta)\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right),$$

ce qui n'est pas autre chose que notre formule (46). On s'aperçoit facilement qu'elle peut aussi être mise sous la forme suivante:

(48)
$$\frac{\partial\Omega}{\partial\zeta_1'} = \frac{\zeta_1}{rr'}\frac{\partial\Omega}{\partial \mathrm{h}},$$

d'où l'on tire, en la comparant avec l'équation (16), la relation que voici:

(49)
$$\zeta'\frac{\partial\Omega}{\partial\zeta_1'} = \zeta_1\frac{\partial\Omega}{\partial\zeta}.$$

Ayant obtenu ces résultats, nous allons mettre en évidence les équations

(50)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Omega}{\partial\xi} = A\dfrac{\partial\Omega}{\partial\xi_1'} + A_1\dfrac{\partial\Omega}{\partial\eta_1'} + A_2\dfrac{\partial\Omega}{\partial\zeta_1'}, \\ \dfrac{\partial\Omega}{\partial\eta} = B\dfrac{\partial\Omega}{\partial\xi_1'} + B_1\dfrac{\partial\Omega}{\partial\eta_1'} + B_2\dfrac{\partial\Omega}{\partial\zeta_1'}, \\ \dfrac{\partial\Omega}{\partial\zeta} = \Gamma\dfrac{\partial\Omega}{\partial\xi_1'} + \Gamma_1\dfrac{\partial\Omega}{\partial\eta_1'} + \Gamma_2\dfrac{\partial\Omega}{\partial\zeta_1'}, \end{cases}$$

qui découlent immédiatement des équations (47). Il en résulte, après quelques réductions faciles, l'équation

$$\xi'\frac{\partial\Omega}{\partial\eta} - \eta'\frac{\partial\Omega}{\partial\xi} = \Gamma_2\left(\xi_1'\frac{\partial\Omega}{\partial\eta_1'} - \eta_1'\frac{\partial\Omega}{\partial\xi_1'}\right) + \Gamma_1\left(\zeta_1'\frac{\partial\Omega}{\partial\xi_1'} - \xi_1'\frac{\partial\Omega}{\partial\zeta_1'}\right) + \Gamma\left(\eta_1'\frac{\partial\Omega}{\partial\zeta_1'} - \zeta_1'\frac{\partial\Omega}{\partial\eta_1'}\right),$$

d'où l'on tire, en introduisant les valeurs de Γ, Γ_1 et Γ_2, en faisant ζ_1' égal à zéro et en considérant la seconde des équations (11) ainsi que l'équation (45'), la formule

$$\frac{\partial\Omega}{\partial v} = -\cos J\frac{\partial\Omega}{\partial v'} - r'\sin J\cos(v' - \Sigma')\frac{\partial\Omega}{\partial\zeta_1'},$$

ou bien celle-ci:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial v} = -\cos J \frac{\partial \Omega}{\partial v} - \sin J^2 \sin(v - \Sigma)\cos(v' - \Sigma')\frac{\partial \Omega}{\partial \mathrm{h}}.$$

Par un calcul tout à fait semblable, on obtient l'équation analogue:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial v'} = -\cos J \frac{\partial \Omega}{\partial v'} - \sin J^2 \cos(v - \Sigma)\sin(v' - \Sigma')\frac{\partial \Omega}{\partial \mathrm{h}}.$$

En ajoutant, à cette équation, l'équation précédente, il viendra:

$$(51) \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial v} + \frac{\partial \Omega}{\partial v'} = -2\sin\frac{1}{2}J^2 \sin(v + v' - \Sigma - \Sigma')\frac{\partial \Omega}{\partial \mathrm{h}},$$

ce qui est notre équation cherchée. Mais il convient de la mettre sous une forme un peu différente, en remplaçant le coefficient de $\frac{\partial \Omega}{\partial \mathrm{h}}$ par son expression en i, i', θ et θ'.

Dans ce but, rappelons-nous l'identité

$$v + v' - \Sigma - \Sigma' = \mathrm{v} + \mathrm{v}' - \theta - \theta' - (\Sigma - \sigma) - (\Sigma' - \sigma'),$$

et nous obtiendrons, en vertu des formules (21) du n° 53, l'équation

$$-2\sin\frac{1}{2}J^2 \sin(v + v' - \Sigma - \Sigma')$$

$$= \Big\{\sin i \sin i' - \Big[\frac{1}{2}\sin i^2(1 + \mathrm{f}) + \frac{1}{2}\sin i'^2(1 + \mathrm{f}')$$

$$- \frac{1}{4}\sin i^2 \sin i'^2(1 + \mathrm{f})(1 + \mathrm{f}')\Big]\cos(\theta - \theta')\Big\}\sin(\mathrm{v} + \mathrm{v}' - \theta - \theta')$$

$$+ \Big\{\frac{1}{2}\sin i^2(1 + \mathrm{f}) - \frac{1}{2}\sin i'^2(1 + \mathrm{f}')\Big\}\sin(\theta - \theta')\cos(\mathrm{v} + \mathrm{v}' - \theta - \theta').$$

Ensuite, en considérant les égalités

$$\sin(\mathrm{v} + \mathrm{v}' - \theta - \theta')\cos(\theta - \theta') - \cos(\mathrm{v} + \mathrm{v}' - \theta - \theta')\sin(\theta - \theta')$$
$$= \sin(\mathrm{v} - \theta)\cos(\mathrm{v}' - \theta) + \cos(\mathrm{v} - \theta)\sin(\mathrm{v}' - \theta),$$

$$\sin(\mathrm{v} + \mathrm{v}' - \theta - \theta')\cos(\theta - \theta') + \cos(\mathrm{v} + \mathrm{v}' - \theta - \theta')\sin(\theta - \theta')$$
$$= \sin(\mathrm{v} - \theta')\cos(\mathrm{v}' - \theta') + \cos(\mathrm{v} - \theta')\sin(\mathrm{v}' - \theta'),$$

ainsi que les formules

$$\frac{\partial \zeta}{\partial v} = \sin i \cos(v - \theta); \qquad \frac{\partial \zeta'}{\partial v'} = \sin i' \cos(v' - \theta'),$$

on parviendra aux résultats que voici:

$$-2 \sin \frac{1}{2} J^2 \sin(v + v' - \Sigma - \Sigma') = \frac{\partial h}{\partial v} + \frac{\partial h}{\partial v'}.$$

On s'apperçoit facilement de la vérité du résultat indiqué en observant les expressions

$$\frac{\partial h}{\partial v} = \zeta' \frac{\partial \zeta}{\partial v} - \frac{1}{2} \sin i^2 (1 + f) \cos(v - \theta) \sin(v' - \theta)$$

$$- \frac{1}{2} \sin i'^2 (1 + f') \cos(v - \theta') \sin(v' - \theta')$$

$$+ \frac{1}{4} \sin i^2 \sin i'^2 (1 + f)(1 + f') \cos(\theta - \theta') \cos(v - \theta) \sin(v' - \theta'),$$

$$\frac{\partial h}{\partial v'} = \zeta \frac{\partial \zeta'}{\partial v'} - \frac{1}{2} \sin i^2 (1 + f) \sin(v - \theta) \cos(v' - \theta)$$

$$- \frac{1}{2} \sin i'^2 (1 + f') \sin(v - \theta') \cos(v' - \theta')$$

$$+ \frac{1}{4} \sin i^2 \sin i'^2 (1 + f)(1 + f') \cos(\theta - \theta') \sin(v - \theta) \cos(v' - \theta'),$$

dont la première a déjà été signalée plus haut. En formant la somme de ces expressions, on retrouvera le résultat que nous venons de déduire relativement à $-2 \sin \frac{1}{2} J^2 \sin(v + v' - \Sigma - \Sigma')$.

On est donc parvenu à la relation

$$(52) \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial v} + \frac{\partial \Omega}{\partial v'} = \frac{\partial \Omega}{\partial h} \left(\frac{\partial h}{\partial v} + \frac{\partial h}{\partial v'} \right).$$

Mais cette relation s'obtenant encore d'une manière directe, savoir en introduisant l'identité

$$\frac{\partial \cos(v - v')}{\partial v} + \frac{\partial \cos(v - v')}{\partial v'} = 0$$

dans l'équation

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \mathrm{v}} + \frac{\partial \Omega}{\partial \mathrm{v}} = \frac{\partial \Omega}{\partial \cos H} \left\{ \frac{\partial \cos H}{\partial \mathrm{v}} + \frac{\partial \cos H}{\partial \mathrm{v}'} \right\},$$

on s'est procuré une vérification utile, soit de nos calculs, soit de la conséquence de nos notations.

En différentiant, par rapport à θ et à θ', la fonction h, on aura les expressions

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathrm{h}}{\partial \theta} = -\mathfrak{z}' \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial \mathrm{v}} &+ \frac{1}{2} \sin i^2 (1 + \mathrm{f}) \cos(\mathrm{v} - \theta) \sin(\mathrm{v}' - \theta) \\
&+ \frac{1}{2} \sin i^2 (1 + \mathrm{f}) \sin(\mathrm{v} - \theta) \cos(\mathrm{v}' - \theta) \\
&- \frac{1}{4} \sin i^2 \sin i'^2 (1 + \mathrm{f})(1 + \mathrm{f}') \cos(\theta - \theta') \cos(\mathrm{v} - \theta) \sin(\mathrm{v}' - \theta') \\
&- \frac{1}{4} \sin i^2 \sin i'^2 (1 + \mathrm{f})(1 + \mathrm{f}') \sin(\theta - \theta') \sin(\mathrm{v} - \theta) \sin(\mathrm{v}' - \theta'),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathrm{h}}{\partial \theta} = -\mathfrak{z} \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial \mathrm{v}'} &+ \frac{1}{2} \sin i'^2 (1 + \mathrm{f}') \cos(\mathrm{v} - \theta') \sin(\mathrm{v}' - \theta') \\
&+ \frac{1}{2} \sin i'^2 (1 + \mathrm{f}') \sin(\mathrm{v} - \theta') \cos(\mathrm{v}' - \theta') \\
&- \frac{1}{4} \sin i^2 \sin i'^2 (1 + \mathrm{f})(1 + \mathrm{f}') \cos(\theta - \theta') \sin(\mathrm{v} - \theta) \cos(\mathrm{v}' - \theta') \\
&+ \frac{1}{4} \sin i^2 \sin i'^2 (1 + \mathrm{f})(1 + \mathrm{f}') \sin(\theta - \theta') \sin(\mathrm{v} - \theta) \sin(\mathrm{v}' - \theta');
\end{aligned}$$

et maintenant, si l'on établit la somme des quatre dérivées partielles que nous venons de mettre en évidence, on obtiendra:

$$\frac{\partial \mathrm{h}}{\partial \mathrm{v}} + \frac{\partial \mathrm{h}}{\partial \mathrm{v}'} + \frac{\partial \mathrm{h}}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathrm{h}}{\partial \theta'} = 0.$$

Au lieu de l'équation (52), on peut donc employer la suivante:

$$(53) \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial \mathrm{v}} + \frac{\partial \Omega}{\partial \mathrm{v}'} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \theta} - \frac{\partial \Omega}{\partial \theta'},$$

qui permet une application très aisée.

Quant aux relations entre les dérivées partielles par rapport à z et z', ou bien par rapport à ζ et ζ_1', il convient de signaler, outre l'équation (49), encore celle-ci:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial z} + \frac{\partial \Omega}{\partial z'} = -\mu' \left\{ \frac{z+z'}{r^3} - 3\frac{z(xx'+yy'+zz')}{r^5} \right\}, \tag{54}$$

qui mérite d'être remarquée, vu que son second membre est indépendant de la fonction Δ, et que son application, en conséquence, pourra être assez favorable.

72. Mettons en évidence les indices qui marquent les μ' appartenant aux diverses planètes, en sorte que, si Ω' est la fonction perturbatrice relative à l'action de la planète k sur la planète l, nous aurons:

$$\Omega' = \mu_k' \left\{ \frac{1}{\Delta} - \frac{xx'+yy'+zz'}{r^3} \right\}, \tag{55}$$

x, y, z étant toujours les coordonnées de la planète k, et x', y', z', celles de la planète l. En comparant cette valeur de Ω' avec celle de Ω que nous avons donnée moyennant l'équation (2), nous serons conduits, immédiatement, à la relation

$$\begin{aligned} \mu_k'\Omega - \mu_l'\Omega' &= \mu_k'\mu_l'(xx'+yy'+zz')\left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r^3}\right) \\ &= \mu_k'\mu_l' \cos H\left(\frac{r}{r'^2} - \frac{r'}{r^2}\right). \end{aligned} \tag{56}$$

Il résulte, de cette équation, plusieurs formules importantes. Voici d'abord celles-ci:

$$\left\{ \begin{aligned} \mu_k'\frac{\partial \Omega}{\partial x'} &= \mu_l'\frac{\partial \Omega'}{\partial x'} + \mu_k'\mu_l'\left\{ x\left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r^3}\right) + 3\frac{x'(xx'+yy'+zz')}{r'^5} \right\}, \\ \mu_k'\frac{\partial \Omega}{\partial y'} &= \mu_l'\frac{\partial \Omega'}{\partial y'} + \mu_k'\mu_l'\left\{ y\left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r^3}\right) + 3\frac{y'(xx'+yy'+zz')}{r'^5} \right\}, \\ \mu_k'\frac{\partial \Omega}{\partial z'} &= \mu_l'\frac{\partial \Omega'}{\partial z'} + \mu_k'\mu_l'\left\{ z\left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r^3}\right) + 3\frac{z'(xx'+yy'+zz')}{r'^5} \right\}, \end{aligned} \right. \tag{57}$$

qui nous donnent, si nous considérons les équations (43):

$$(58)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \Omega}{\partial x} = \mu'_k \left\{ \dfrac{x' - x}{\Delta^3} - \dfrac{x'}{r'^3} \right\}, \\[2ex] \dfrac{\partial \Omega}{\partial y} = \mu'_k \left\{ \dfrac{y' - y}{\Delta^3} - \dfrac{y'}{r'^3} \right\}, \\[2ex] \dfrac{\partial \Omega}{\partial z} = \mu'_k \left\{ \dfrac{z' - z}{\Delta^3} - \dfrac{z'}{r'^3} \right\}, \end{cases}$$

expressions qui dérivent, d'ailleurs, directement de la formule (55).

On déduit, de l'équation (56), encore celle-ci:

$$\mu'_k r' \frac{\partial \Omega}{\partial r'} = \mu'_l r' \frac{\partial \Omega'}{\partial r'} + \mu'_k \mu'_l \left(\frac{2r}{r'^2} + \frac{r'}{r^2} \right) \cos H;$$

et, en introduisant ce résultat dans l'équation (44) multipliée par μ'_k, il viendra:

$$(59)\quad \begin{cases} \mu'_k r \dfrac{\partial \Omega}{\partial r} + \mu'_l r' \dfrac{\partial \Omega'}{\partial r'} = - \mu'_k \Omega - \mu'_k \mu'_l \left(\dfrac{2r}{r'^2} + \dfrac{r'}{r^2} \right) \cos H \\[2ex] \qquad = - \mu'_l \Omega' - \mu'_k \mu'_l \left(\dfrac{r}{r'^2} + \dfrac{2r'}{r^2} \right) \cos H, \end{cases}$$

ou finalement, la formule symétrique:

$$(60)\quad \mu'_k r \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \mu'_l r' \frac{\partial \Omega'}{\partial r'} = - \frac{1}{2} (\mu'_k \Omega + \mu'_l \Omega') - \frac{3}{2} \mu'_k \mu'_l \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2} \right) \cos H.$$

En remplaçant, dans l'équation (53), les dérivées partielles relatives à v' et θ', par les dérivées de la fonction Ω', on obtiendra d'abord:

$$\mu'_k \frac{\partial \Omega}{\partial \mathrm{v}} + \mu'_l \frac{\partial \Omega'}{\partial \mathrm{v}'} + \mu'_k \mu'_l \left(\frac{r'}{r^2} - \frac{r}{r'^2} \right) \frac{\partial \cos H}{\partial \mathrm{v}}$$

$$= - \mu'_k \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} - \mu'_l \frac{\partial \Omega'}{\partial \theta'} - \mu'_k \mu'_l \left(\frac{r'}{r^2} - \frac{r}{r'^2} \right) \frac{\partial \cos H}{\partial \theta},$$

résultat, d'où l'on déduira facilement, ayant toujours égard à l'équation (53), la relation

$$(61)\quad \mu'_k \frac{\partial \Omega}{\partial \mathrm{v}} + \mu'_l \frac{\partial \Omega'}{\partial \mathrm{v}'} + \mu'_k \mu'_l \left(\frac{r'}{r^2} - \frac{r}{r'^2} \right) \sin (\mathrm{v} - \mathrm{v}')$$

$$= - \mu'_k \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} - \mu'_l \frac{\partial \Omega'}{\partial \theta'} + \frac{1}{2} \mu'_k \mu'_l \left(\frac{r'}{r^2} - \frac{r}{r'^2} \right) \left(\frac{\partial \mathrm{h}}{\partial \mathrm{v}} - \frac{\partial \mathrm{h}}{\partial \mathrm{v}'} + \frac{\partial \mathrm{h}}{\partial \theta} - \frac{\partial \mathrm{h}}{\partial \theta'} \right),$$

qui est, évidemment, symétrique.

Finalement, si nous introduisons, dans l'équation (54), la valeur de $\mu'_k \frac{\partial \Omega}{\partial z}$ donnée par la troisième des formules (57), nous trouverons tout de suite le résultat, aussi symétrique:

$$(62) \qquad \mu'_k \frac{\partial \Omega}{\partial z} + \mu'_i \frac{\partial \Omega}{\partial z} + \mu'_k \mu'_i \left(\frac{z}{r^3} + \frac{z}{r^3} \right) = 0.$$

On pourrait enrichir les formules qu'on vient de donner dans ce numéro ainsi que dans le numéro précédent, par plusieurs autres de même nature. Cependant, puisque ces formules non communiquées ici, ne sont d'aucun intérêt général, je les développerai plus tard autant qu'elles seront utiles aux calculs numériques qu'on va trouver dans les parties suivantes de ce travail.

CHAPITRE II.

Développement des puissances impaires de la fonction $\frac{1}{\Delta}$.

73. Nous n'allons considérer d'autres cas que ceux où l'un des rayons vecteurs des deux planètes est constamment ou plus petit ou plus grand que l'autre. Certes, une telle restriction n'est qu'une hypothèse, mais lorsqu'il ne s'agit que de quelques milliers d'années, elle est sans contradiction légitime. Pour les temps historiques, les observations nous ont montré que les rapports entre les rayons vecteurs de deux planètes principales restent ou plus petits ou au contraire plus grands que l'unité; et les calculs des variations séculaires des éléments elliptiques, alors même que ces calculs ne jouissent pas d'un caractère absolu, sont en mesure de nous donner la certitude qu'un tel état des choses durera pendant des temps beaucoup plus considérables. Donc, il est certain qu'une telle hypothèse peut être admise, bien qu'on ne soit pas à même de juger à priori, si elle reste légitime pour toujours.

Mais a-t-on le droit de considérer comme généraux et absolus les résultats qu'on obtient en intégrant les équations du mouvement des planètes, après y avoir admis une hypothèse qui paraît de plus en plus incertaine au fur et à mesure que le temps augmente; ne peut-on pas craindre que les résultats, obtenus de la sorte, ne soient produits par l'hypothèse elle même? Voilà une question que je chercherai à élucider par quelques réflexions rapides.

On pourrait, en effet, croire que la supposition dont nous venons de parler, implique un cercle vicieux lorsqu'on veut démontrer la stabilité absolue de notre système planétaire; on pourrait même être amené à nier la portée absolue des résultats s'appuyant sur l'hypothèse indiquée ou même sur une hypothèse différente, en imputant à la supposition faite la nature spéciale des résultats qu'on peut trouver. Mais en réfléchissant, plus profondément, sur la question dont il s'agit, on sera bientôt convaincu que les objections qu'on pourrait alléguer contre l'emploi général de l'hypothèse admise se réfutent facilement.

Que l'on peut employer une apagogie au lieu d'une démonstration directe, cela n'est aucunement une question en litige. Or, considérons un système de corps libres soumis à l'attraction universelle; admettons de plus que le système soit instable, mais que les divers corps parcourent, pendant un très grand nombre de leurs révolutions, des orbites sensiblement égales aux orbites actuelles des planètes. Cela étant, si l'on voulait démontrer l'instabilité du système imaginé, on aborderait la question tout à fait de la même manière que s'il s'agissait du problème opposé: en démontrer la stabilité. On admettrait d'abord l'hypothèse que le rapport des rayons vecteurs des deux corps est moindre que l'unité; on développerait ensuite les expressions des forces suivant les puissances des rapports mentionnés ou plutôt suivant certaines fonctions de ces rapports. Après avoir effectué les intégrations, on parviendrait finalement à constater l'impossibilité de l'hypothèse par l'impossibilité de mettre les résultats sous forme de développements convergents. Ayant mis au jour ce fait, l'instabilité, ou au moins la non-validité de l'hypothèse serait démontrée par apagogie. Mais si, par contre, on avait obtenu des développements convergents,[1] l'admission absolue de l'hypothèse serait nécessairement légitime, pourvu seulement qu'il fût possible, les données numériques étant changées, d'arriver à un résultat opposé. Pour démontrer la stabilité, il faut encore qu'on mette en évidence que certaines fonctions gardent toujours des valeurs entre des limites déterminées. Notre manière de conclure ne revient donc nullement à commettre un cercle vicieux, mais bien à tirer une conclusion hypothétique.

Mais on pourrait, par un paralogisme, prétendre que notre conclusion revient à un dilemme: on pourrait, en effet, alléguer: Ou vous trouverez des développements divergents et alors l'hypothèse est illégitime, ou vous trouverez des développements convergents, mais dans ce cas vous retomberez dans un cercle vicieux et alors vous ne pourrez rien conclure sur la légitimité de l'hypothèse. Mais comme je viens de dire, une telle manière de raisonner serait tout simplement un paralogisme: on aurait commis, en effet, une erreur logique que Kant flétrit par les mots: »Die »Alten machten sehr viel aus dem Dilemma und nannten diesen Schluss

---

[1] Je ne parle, sans dire expressement le contraire, que d'une convergence uniforme et absolue, quelle que soit la valeur du temps considéré comme variable indépendante.

»*cornutus*. Sie wussten einen Gegner dadurch in die Enge zu treiben, dass »sie alles hersagten, wo er sich hinwenden konnte, und ihm dann auch alles »widerlegten. Sie zeigten ihm viele Schwierigkeiten bei jeder Meinung, die »er annahm. — Aber es ist ein sophistischer Kunstgriff, Sätze nicht geradezu »zu widerlegen, sondern nur Schwierigkeiten zu zeigen; welches denn auch »bei vielen, ja bei den mehresten Dingen angeht.»

»Wenn wir nun alles das sogleich für falsch erklären wollen, wobei »sich Schwierigkeiten finden, so ist es ein leichtes Spiel, alles zu verwerfen. »— Zwar ist es gut, die Unmöglichkeit des Gegentheils zu zeigen; allein »hierin liegt doch etwas Täuschendes, wofern man die Unbegreiflichkeit »des Gegentheils für die Unmöglichkeit desselben hält. — Die Dilem-»mata haben daher vieles Verfängliche an sich, ob sie gleich richtig schlies-»sen. Sie können gebraucht werden, wahre Sätze zu vertheidigen, aber »auch wahre Sätze anzugreifen, durch Schwierigkeiten, die man gegen sie »aufwirft.»[1]

En résumé:

Dire que l'admission de l'hypothèse mentionnée implique un cercle vicieux, c'est prétendre ou que cette hypothèse entraine avec nécessité la convergence des développements ou bien que les développements sont toujours divergentes.

Pour montrer comment des solutions stables également que des solutions instables pourront ressortir de conditions peu différentes, les unes des autres, je me permets de renvoyer le lecteur au n° 2 du § 1 de mon mémoire *nouvelles recherches* etc. On conclut par là que le problème de la stabilité de notre système planétaire n'est pas seulement une question d'analyse, mais aussi une question de calcul numérique.

Après cette digression sur la portée logique de nos suppositions, nous allons désigner par r' le plus grand des deux rayons vecteurs et par r, le plus petit. Mais nous ne prétendons pas, dès le début, que les développements qu'on va effectuer en vertu de l'hypothèse

$$\frac{r}{r'} < 1$$

---

[1] Kant, Werke, ed. Hartenstein. VIII, p. 127.

soient convergents pour toujours; il suffit qu'ils soient convergents pendant un intervalle limité de temps, disons pendant quelques dizaines de siècles.

74. Par l'hypothèse que nous venons d'établir, les développements fondamentaux pourront être mis sous la forme générale

$$(1) \qquad \left(\frac{a}{\Delta}\right)^m = \left(\frac{a}{r}\right)^m C_0^{(m)} + 2\frac{r}{a}\left(\frac{a}{r}\right)^{m+1} C_1^{(m)} \cos H$$

$$+ 2\left(\frac{r}{a}\right)^2\left(\frac{a}{r}\right)^{m+2} C_2^{(m)} \cos 2H + \ldots,$$

où les coefficients $C_n^{(m)}$ signifient des fonctions du rapport $\left(\frac{r}{r}\right)^2$.

Considérons d'abord le cas où $m = 1$, et admettons la notation

$$\alpha = \frac{a}{a},$$

En vertu d'un théorème bien connu, on aura sur le champ l'expression que voici:

$$C_n^{(1)} = \frac{2}{\pi}\alpha^{n+1}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin\varphi^{2n}\, d\varphi}{\sqrt{1 - \alpha^2\left(\frac{a}{r}\right)^2\left(\frac{r}{a}\right)^2 \sin\varphi^2}}.$$

Evidemment, on pourrait développer cette fonction suivant les puissances de α^2, et le résultat obtenu de la sorte serait, on le voit facilement, convergent, mais la convergence dont jouirait ce développement ne serait pas, toujours, suffisamment rapide. On s'aperçoit, en outre, que la méthode qui serait mise en usage, en abordant les développements de la manière indiquée, ne différerait pas, quant à son principe, des méthodes de Hansen et de Backlund.

Pour rendre plus rapide la convergence de notre développement fondamental, je l'opère suivant les puissances d'une quantité χ, déterminée par l'expression

$$\chi = 1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2\left(\frac{r}{a}\right)^2$$

ou bien par celle-ci:

$$(2) \qquad \chi = 1 - \left(\frac{1-\eta^2}{1-\eta'^2}\right)^2 \left(\frac{1+\rho}{1+\rho'}\right)^2.$$

Il est visible que la fonction χ prend sa plus grande valeur positive lorsque ρ est égal à η et ρ', à $-\eta'$. En désignant cette valeur par χ_1, on trouvera:

$$\chi_1 = \frac{(\eta' + \eta)(2 + \eta - \eta')}{(1 + \eta)^2}$$

$$= \frac{2(\eta' + \eta)}{1 + \eta} - \frac{(\eta + \eta')^2}{(1 + \eta)^2}.$$

Egalement, la plus grande valeur négative de χ sera obtenue en mettant ρ égal à $-\eta$ et ρ', à η'. La désignant par $-\chi_2$, on aura:

$$\chi_2 = \frac{(\eta + \eta')(2 + \eta - \eta')}{(1 - \eta')^2}$$

$$= \frac{2(\eta + \eta')}{1 - \eta'} + \frac{(\eta + \eta')^2}{(1 - \eta')^2}.$$

En considérant que les fonctions diastématiques η et η' ont toujours des valeurs positives, on voit que les valeurs de χ_2 sont toujours plus grandes que celles de χ_1, exception toutefois faite du cas où η' est égal à zéro.

Comparons encore les deux modes de développer les fonctions $C_n^{(1)}$: ou suivant les puissances de $\alpha^2(1 + \chi)$, ou suivant celles de $\frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2}\chi$.

Par la supposition que $\frac{r}{r'}$ soit constamment moindre que l'unité, la quantité δ_2, déterminée moyennant l'équation

$$\alpha^2(1 + \chi_2) = 1 - \delta_2,$$

est nécessairement positive et moindre que l'unité. On en tire:

$$\alpha^2 = \frac{1 - \delta_2}{1 + \chi_2},$$

$$\frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2} = \frac{1 - \delta_2}{\chi_2 + \delta_2}.$$

Maintenant, si l'on attribue à $1-\chi$ et à χ leurs plus grandes valeurs, il sera visible qu'on développe: dans le premier cas, suivant les puissances d'une quantité dont la valeur maxima est $1-\partial_2$, et dans l'autre, suivant les puissances d'une quantité qui prend tout au plus la valeur $\frac{\chi_2}{\chi_2+\partial_2}(1-\partial_2)$. Tant que ∂_2 est considérable à côté de χ_2, la seconde manière de développer l'emporte sur la première, ce qu'on voit immédiatement.

Cela établi, je fais encore:

(3)
$$\sigma = -1 + \left(\frac{1-\eta^2}{1-\eta'^2}\right)^2,$$

en sorte que j'aurai:

(4)
$$\chi = 1-(1+\sigma)\left(\frac{1+\rho'}{1+\rho}\right)^2$$
$$= \frac{(\rho'-\rho)(2+\rho+\rho')}{(1+\rho)^2} - \sigma\left(\frac{1+\rho'}{1+\rho}\right)^2.$$

En supposant toujours ρ et ρ' moindres que l'unité, la fonction χ ainsi que ses puissances se développent suivant celles de ρ, ρ' et σ. Mais avant d'entrer dans le détail de ces développements, j'introduis la fonction χ dans l'expression signalée de $C_n^{(1)}$. Il viendra de la sorte:

$$C_n^{(1)} = \frac{2}{\pi}\alpha^{n+1}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin\varphi^{2n}\,d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2\sin\varphi^2+\alpha^2\chi\sin\varphi^2}}.$$

En admettant ensuite les notations

(5)
$$\beta_n^{(s)} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin\varphi^{2n}\,d\varphi}{\left\{1-\alpha^2\sin\varphi^2\right\}^{\frac{s}{2}}},$$

(6)
$$\gamma_s^{1,n} = \frac{1.3.5\ldots(2s-1)}{2.4.6\ldots 2s}\alpha^{n+2s+1}\beta_{n+s}^{(2s+1)},$$

on obtiendra, en développant la formule précédente, l'expression

(7)
$$C_n^{(1)} = \gamma_0^{1,n} - \gamma_1^{1,n}\chi + \gamma_2^{1,n}\chi^2 - \ldots.$$

Supposons maintenant, que nous ayons obtenu un résultat de la forme

$$\chi^i = \sum\sum L_{s,s'}^{(i)} \rho^s \rho'^{s'},$$

i étant un entier, et les $L_{s,s'}^{(i)}$, des fonctions des indices et de la fonction σ; supposons ensuite que l'expression de $C_n^{(1)}$ soit mise sous la forme

(8) $$C_n^{(1)} = \sum\sum C_{s,s'}^{1,n} \rho^s \rho'^{s'};$$

alors nous aurons généralement:

(9) $$C_{s,s'}^{1,n} = -\gamma_1^{1,n} L_{s,s'}^{(1)} + \gamma_2^{1,n} L_{s,s'}^{(2)} - \ldots,$$

et en particulier:

(9') $$C_{0,0}^{1,n} = \gamma_0^{1,n} - \gamma_1^{1,n} L_{0,0}^{(1)} + \gamma_2^{1,n} L_{0,0}^{(2)} - \ldots.$$

75. Les fonctions $L_{s,s'}^{(i)}$ que nous venons d'introduire sont des polynômes finis en σ que nous pouvons nous figurer ordonnés suivant les puissances de cette quantité. En admettant les développements

(10) $$\left\{\begin{aligned} \left[\frac{(\rho-\rho')(2+\rho+\rho')}{(1+\rho)^2}\right]^i &= \sum\sum K_{s,s'}^{i,0} \rho^s \rho'^{s'}, \\ -\frac{i}{1}\left(\frac{1+\rho'}{1+\rho}\right)^2\left[\frac{(\rho-\rho')(2+\rho+\rho')}{(1+\rho)^2}\right]^{i-1} &= \sum\sum K_{s,s'}^{i,1} \rho^s \rho'^{s'}, \\ \frac{i(i-1)}{1.2}\left(\frac{1+\rho'}{1+\rho}\right)^4\left[\frac{(\rho-\rho')(2+\rho+\rho')}{(1+\rho)^2}\right]^{i-2} &= \sum\sum K_{s,s'}^{i,2} \rho^s \rho'^{s'}, \\ &\text{etc.,} \end{aligned}\right.$$

on aura facilement l'expression générale que voici:

(11) $$L_{s,s'}^{(i)} = K_{s,s'}^{i,0} + K_{s,s'}^{i,1}\sigma + K_{s,s'}^{i,2}\sigma^2 + \ldots.$$

Il s'agit maintenant d'évaluer les coefficients $K_{s,s'}^{i,g}$ qui ne dépendent que des entiers i, g, s et s', et qui sont eux-mêmes des entiers. On les obtient en développant les formules précédentes, mais on les déduit plus aisément en considérant l'expression

$$\chi^i = 1 - \frac{i}{1}(1+\sigma)\left(\frac{1+\rho'}{1+\rho}\right)^2 + \frac{i(i-1)}{1.2}(1+\sigma)^2\left(\frac{1+\rho'}{1+\rho}\right)^4 - $$

En effet, la manière la plus simple de mettre en évidence les coefficients dont il s'agit paraît être celle-ci:

Soit, en désignant par h un nombre entier,

$$\left(\frac{1+\rho}{1+\rho'}\right)^{2h} = \sum\sum R^{(h)}_{s,s'}\rho^{s}\rho'^{s'};$$

alors les coefficients sont exprimés moyennant la formule

$$R^{(h)}_{s,s'} = (-1)^{s}\frac{4h^2(4h^2-1^2)(4h^2-2^2)\ldots(4h^2-(s'-1)^2)}{1^2.2^2.3^2\ldots s'^2}\cdot\frac{(2h+s')(2h+s'+1)\ldots(2h+s-1)}{(s'+1)(s'+2)\ldots s},$$

si s est plus grand que s′, mais dans le cas opposé, par celle-ci:

$$R^{(h)}_{s,s'} = (-1)^{s}\frac{4h^2(4h^2-1^2)(4h^2-2^2)\ldots(4h^2-(s-1)^2)}{1^2.2^2.3^2\ldots s^2}\cdot\frac{(2h-s)(2h-s-1)\ldots(2h-s'+1)}{(s+2)(s+2)\ldots s'}.$$

Si les deux indices s et s′ sont égaux, les deux formules coïncident, en sorte qu'on aura:

$$R^{(h)}_{s,s} = (-1)^{s}\frac{4h^2(4h^2-1^2)(4h^2-2^2)\ldots(4h^2-(s-1)^2)}{1^2.2^2.3^2\ldots s^2}.$$

Après avoir fixé ces notations, on obtient:

$$K^{i,0}_{s,s'} = -\frac{i}{1}R^{(1)}_{s,s'} + \frac{i(i-1)}{1.2}R^{(2)}_{s,s'} - \frac{i(i-1)(i-2)}{1.2.3}R^{(3)}_{s,s'} + \ldots,$$

$$K^{i,1}_{s,s'} = -i\left\{R^{(1)}_{s,s'} - \frac{i-1}{1}R^{(2)}_{s,s'} + \frac{(i-1)(i-2)}{1.2}R^{(3)}_{s,s'} - \ldots\right\},$$

$$K^{i,2}_{s,s'} = \frac{i(i-1)}{1.2}\left\{R^{(2)}_{s,s'} - \frac{i-2}{1}R^{(3)}_{s,s'} + \frac{(i-2)(i-3)}{1.2}R^{(4)}_{s,s'} - \ldots\right\},$$

etc.,

avec la seule exception

$$K^{i,0}_{0,0} = 1 - \frac{i}{1} + \frac{i(i-1)}{1.2} - \ldots = 0,$$

formules qui permettent de calculer, d'une manière assez simple, les coefficients dont il s'agit.

De la sorte, on a obtenu les nombres suivants qui suffisent si l'on s'arrête aux termes du septième degré, inclusivement, par rapport aux fonctions diastématiques:

$$K^{1,0}_{0,0} = 0,$$

$$K^{1,0}_{1,0} = 2,$$
$$K^{1,0}_{0,1} = -2,$$

$$K^{1,0}_{2,0} = -3,$$
$$K^{1,0}_{1,1} = 4,$$
$$K^{1,0}_{0,2} = -1,$$

$$K^{1,0}_{3,0} = 4,$$
$$K^{1,0}_{2,1} = -6,$$
$$K^{1,0}_{1,2} = 2,$$

$$K^{1,0}_{4,0} = -5,$$
$$K^{1,0}_{3,1} = 8,$$
$$K^{1,0}_{2,2} = -3,$$

$$K^{1,0}_{5,0} = 6,$$
$$K^{1,0}_{4,1} = -10,$$
$$K^{1,0}_{3,2} = 4,$$

$$K^{1,0}_{6,0} = -7,$$
$$K^{1,0}_{5,1} = 12,$$
$$K^{1,0}_{4,2} = -5,$$

$$K^{1,0}_{7,0} = 8,$$
$$K^{1,0}_{6,1} = -14,$$
$$K^{1,0}_{5,2} = 6,$$

$$K^{2,0}_{2,0} = 4,$$
$$K^{2,0}_{1,1} = -8,$$
$$K^{2,0}_{0,2} = 4,$$

$$K^{2,0}_{3,0} = -12,$$
$$K^{2,0}_{2,1} = 28,$$
$$K^{2,0}_{1,2} = -20,$$
$$K^{2,0}_{0,3} = 4,$$

$$K^{2,0}_{4,0} = 25,$$
$$K^{2,0}_{3,1} = -64,$$
$$K^{2,0}_{2,2} = +54,$$
$$K^{2,0}_{1,3} = -16,$$
$$K^{2,0}_{0,4} = 1,$$

$$K^{2,0}_{5,0} = -44,$$
$$K^{2,0}_{4,1} = 120,$$
$$K^{2,0}_{3,2} = -112,$$
$$K^{2,0}_{2,3} = 40,$$
$$K^{2,0}_{1,4} = -4,$$

$$K^{2,0}_{6,0} = 70,$$
$$K^{2,0}_{5,1} = -200,$$
$$K^{2,0}_{4,2} = 200,$$
$$K^{2,0}_{3,3} = -80,$$
$$K^{2,0}_{2,4} = 10,$$

$$K^{2,0}_{7,0} = -104,$$
$$K^{2,0}_{6,1} = 308,$$
$$K^{2,0}_{5,2} = -324,$$
$$K^{2,0}_{4,3} = 140,$$
$$K^{2,0}_{3,4} = -20,$$

$$K^{3,0}_{3,0} = 8,$$
$$K^{3,0}_{2,1} = -24,$$
$$K^{3,0}_{1,2} = 24,$$
$$K^{3,0}_{0,3} = -8,$$

$$K^{3,0}_{4,0} = -36,$$
$$K^{3,0}_{3,1} = +120,$$
$$K^{3,0}_{2,2} = -144,$$
$$K^{3,0}_{1,3} = +72,$$
$$K^{3,0}_{0,4} = -12,$$

$$K^{3,0}_{5,0} = 102,$$
$$K^{3,0}_{4,1} = -366,$$
$$K^{3,0}_{3,2} = 492,$$
$$K^{3,0}_{2,3} = -300,$$
$$K^{3,0}_{1,4} = 78,$$
$$K^{3,0}_{0,5} = -6,$$

$$K^{3,0}_{6,0} = -231,$$
$$K^{3,0}_{5,1} = 870,$$
$$K^{3,0}_{4,2} = -1275,$$
$$K^{3,0}_{3,3} = 880,$$
$$K^{3,0}_{2,4} = -285,$$
$$K^{3,0}_{1,5} = 36,$$
$$K^{3,0}_{0,6} = -1,$$

$$K^{3,0}_{7,0} = 456,$$
$$K^{3,0}_{6,1} = -1806,$$
$$K^{3,0}_{5,2} = 2790,$$
$$K^{3,0}_{4,3} = -2100,$$
$$K^{3,0}_{3,4} = 780,$$
$$K^{3,0}_{2,5} = -126,$$
$$K^{3,0}_{1,6} = 6,$$

$$K^{4,0}_{4,0} = 16,$$
$$K^{4,0}_{3,1} = -64,$$
$$K^{4,0}_{2,2} = 96,$$
$$K^{4,0}_{1,3} = -64,$$
$$K^{4,0}_{0,4} = 16,$$

$$K^{4,0}_{5,0} = -96,$$
$$K^{4,0}_{4,1} = 416,$$
$$K^{4,0}_{3,2} = -704,$$
$$K^{4,0}_{2,3} = 576,$$
$$K^{4,0}_{1,4} = -224,$$
$$K^{4,0}_{0,5} = 32,$$

$$K^{4,0}_{6,0} = 344,$$
$$K^{4,0}_{5,1} = -1584,$$
$$K^{4,0}_{4,2} = 2920,$$

$K^{4,0}_{3,3} = -\ 2720,$

$K^{4,0}_{2,4} = \quad 1320,$

$K^{4,0}_{1,5} = -\ 304,$

$K^{4,0}_{0,6} = \quad 24,$

$K^{4,0}_{7,0} = -\ 952,$

$K^{4,0}_{6,1} = \quad 4600,$

$K^{4,0}_{5,2} = -\ 9048,$

$K^{4,0}_{4,3} = \quad 9240,$

$K^{4,0}_{3,4} = -\ 5160,$

$K^{4,0}_{2,5} = \quad 1512,$

$K^{4,0}_{1,6} = -\ 200,$

$K^{4,0}_{0,7} = \quad 8,$

$K^{5,0}_{5,0} = \quad 32,$

$K^{5,0}_{4,1} = -\ 160,$

$K^{5,0}_{3,2} = \quad 320,$

$K^{5,0}_{2,3} = -\ 320,$

$K^{5,0}_{1,4} = \quad 160,$

$K^{5,0}_{0,5} = -\ 32,$

$K^{5,0}_{6,0} = -\ 240,$

$K^{5,0}_{5,1} = \quad 1280,$

$K^{5,0}_{4,2} = -\ 2800,$

$K^{5,0}_{3,3} = \quad 3200,$

$K^{5,0}_{2,4} = -\ 2000,$

$K^{5,0}_{1,5} = \quad 640,$

$K^{5,0}_{0,6} = -\ 80,$

$K^{5,0}_{7,0} = \quad 1040,$

$K^{5,0}_{6,1} = -\ 5840,$

$K^{5,0}_{5,2} = \quad 13680,$

$K^{5,0}_{4,3} = -\ 17200,$

$K^{5,0}_{3,4} = \quad 12400,$

$K^{5,0}_{2,5} = -\ 5040,$

$K^{5,0}_{1,6} = \quad 1040,$

$K^{5,0}_{0,7} = -\ 80,$

$K^{6,0}_{6,0} = \quad 64,$

$K^{6,0}_{5,1} = -\ 384,$

$K^{6,0}_{4,2} = \quad 960,$

$K^{6,0}_{3,3} = -\ 1280,$

$K^{6,0}_{2,4} = \quad 960,$

$K^{6,0}_{1,5} = -\ 384,$

$K^{6,0}_{0,6} = \quad 64,$

$K^{6,0}_{7,0} = -\ 576,$

$K^{6,0}_{6,1} = \quad 3648,$

$K^{6,0}_{5,2} = -\ 9792,$

$K^{6,0}_{4,3} = \quad 14400,$

$K^{6,0}_{3,4} = -\ 12480,$

$K^{6,0}_{2,5} = \quad 6336,$

$K^{6,0}_{1,6} = -\ 1728,$

$K^{6,0}_{0,7} = \quad 192,$

$K^{7,0}_{7,0} = \quad 128,$

$K^{7,0}_{6,1} = -\ 896,$

$K^{7,0}_{5,2} = 2688,$

$K^{7,0}_{4,3} = -4480,$

$K^{7,0}_{3,4} = 4480,$

$K^{7,0}_{2,5} = -2688,$

$K^{7,0}_{1,6} = 896,$

$K^{7,0}_{0,7} = -128,$

$K^{1,1}_{0,0} = -1, \qquad K^{1,1}_{s,s} = K^{1,0}_{s,s},$

$K^{2,1}_{0,0} = 0,$

$K^{2,1}_{1,0} = -4,$

$K^{2,1}_{0,1} = 4,$

$K^{2,1}_{2,0} = 14,$

$K^{2,1}_{1,1} = -24,$

$K^{2,1}_{0,2} = 10,$

$K^{2,1}_{3,0} = -32,$

$K^{2,1}_{2,1} = 68,$

$K^{2,1}_{1,2} = -44,$

$K^{2,1}_{0,3} = 8,$

$K^{2,1}_{4,0} = 60,$

$K^{2,1}_{3,1} = -144,$

$K^{2,1}_{2,2} = 114,$

$K^{2,1}_{1,3} = -32,$

$K^{2,1}_{0,4} = 2,$

$K^{2,1}_{5,0} = -100,$

$K^{2,1}_{4,1} = 260,$

$K^{2,1}_{3,2} = -232,$

$K^{2,1}_{2,3} = 80,$

$K^{2,1}_{1,4} = -8,$

$K^{2,1}_{0,5} = 0,$

$K^{3,1}_{2,0} = -12,$

$K^{3,1}_{1,1} = 24,$

$K^{3,1}_{0,2} = -12,$

$K^{3,1}_{3,0} = 60,$

$K^{3,1}_{2,1} = -156,$

$K^{3,1}_{1,2} = 132,$

$K^{3,1}_{0,3} = -36,$

$K^{3,1}_{4,0} = -183,$

$K^{3,1}_{3,1} = 552,$

$K^{3,1}_{2,2} = -594,$

$K^{3,1}_{1,3} = 264,$

$K^{3,1}_{0,4} = -39,$

$K^{3,1}_{5,0} = 438,$

$K^{3,1}_{4,1} = -1458,$

$K^{3,1}_{3,2} = 1812,$

$K^{3,1}_{2,3} = -1020,$

$K^{3,1}_{1,4} = 246,$

$K^{3,1}_{0,5} = -18,$

$K^{4,1}_{3,0} = -32,$

$K^{4,1}_{2,1} = 96,$

$K_{1,2}^{4,1} = -96,$

$K_{0,3}^{4,1} = 32,$

$K_{4,0}^{4,1} = 208,$

$K_{3,1}^{4,1} = -736,$

$K_{2,2}^{4,1} = 960,$

$K_{1,3}^{4,1} = -544,$

$K_{0,4}^{4,1} = 112,$

$K_{5,0}^{4,1} = -792,$

$K_{4,1}^{4,1} = 3128,$

$K_{3,2}^{4,1} = -4784,$

$K_{2,3}^{4,1} = 3504,$

$K_{1,4}^{4,1} = -1208,$

$K_{0,5}^{4,1} = 152,$

$K_{4,0}^{5,1} = -80,$

$K_{3,1}^{5,1} = 320,$

$K_{2,2}^{5,1} = -480,$

$K_{1,3}^{5,1} = 320,$

$K_{0,4}^{5,1} = -80,$

$K_{5,0}^{5,1} = 640,$

$K_{4,1}^{5,1} = -2880,$

$K_{3,2}^{5,1} = 5120,$

$K_{2,3}^{5,1} = -4480,$

$K_{1,4}^{5,1} = 1920,$

$K_{0,5}^{5,1} = -320,$

$K_{5,0}^{6,1} = -192,$

$K_{4,1}^{6,1} = 960,$

$K_{3,2}^{6,1} = -1920,$

$K_{2,3}^{6,1} = 1920,$

$K_{1,4}^{6,1} = -960,$

$K_{0,5}^{6,1} = 192,$

$K_{0,0}^{2,2} = 1,$

$K_{1,0}^{2,2} = -4,$

$K_{0,1}^{2,2} = 4,$

$K_{2,0}^{2,2} = 10,$

$K_{1,1}^{2,2} = -16,$

$K_{0,2}^{2,2} = 6,$

$K_{3,0}^{2,2} = -20,$

$K_{2,1}^{2,2} = 40,$

$K_{1,2}^{2,2} = -24,$

$K_{0,3}^{2,2} = 4,$

$K_{0,0}^{3,2} = 0,$

$K_{1,0}^{3,2} = 6,$

$K_{0,1}^{3,2} = -6,$

$K_{2,0}^{3,2} = -33,$

$K_{1,1}^{3,2} = 60,$

$K_{0,2}^{3,2} = -27,$

$K_{3,0}^{3,2} = 108,$

$K_{2,1}^{3,2} = -258,$

$$K^{3,2}_{1,3} = 108,$$

$$K^{3,2}_{0,3} = -48,$$

$$K^{3,3}_{0,0} = -1,$$

$$K^{3,3}_{1,0} = 6,$$

$$K^{3,3}_{0,1} = -6$$

Relativement aux coefficients $K^{i,g}_{s,s'}$, il y a quelques remarques à faire

1°. On a généralement:

$$K^{1,1}_{s,s'} = K^{1,0}_{s,s'},$$

toutefois avec l'exception

$$K^{1,1}_{0,0} = -1,$$

tandis que $K^{1,0}_{0,0}$ est égal à zéro

On a du reste:

$$K^{i,i}_{0,0} = (-1)^i$$

2°. Dans les formules (10), les valeurs de s s'étendent depuis $s = 0$ jusqu'à $s = \infty$, et celles de s', à partir de $s' = 0$ jusqu'à $s' = 2i$ inclusivement. Mais la plus petite valeur de la somme $s + s'$ est égale à $i - g$.

3°. La somme des coefficients appartenant aux mêmes valeurs des indices supérieurs et dont la somme des indices inférieurs garde une valeur déterminée, est égale à zéro.

4°. En supposant, dans les équations (10), ρ égal à zéro, on obtient:

$$(-1)^g \frac{i(i-1)\dots(i-g+1)}{1 \,.\, 2 \dots g}(1+\rho')^{2g}(-\rho'(2+\rho'))^{i-g} = \sum K^{i,g}_{0,s'}\rho'^{s'},$$

d'où l'on tire:

$$\sum K^{i,g}_{0,s'} = (-1)^i \frac{i(i-1)\dots(i-g+1)}{1 \,.\, 2 \dots g} 2^{2g} 3^{i-g}$$

Les résultats que nous venons de donner, dans la liste précédente, sont vérifiés de diverses manières:

d'abord en formant les sommes $\sum\sum K^{i,g}_{s,s'}$, $s + s' =$ nombre déterminé;

ensuite en formant les sommes $\sum\limits_{s'=i-g}^{s'=2i} K^{i,g}_{0,s'}$;

finalement, en renouvelant le calcul des coefficients dont il s'agit au moyen des formules

$$K^{i,0}_{s,s'} = \sum\sum K^{1,0}_{h,h'} K^{i-1,0}_{k,k'},$$

$$K^{i,1}_{s,s'} = \frac{i}{i-1} \sum\sum K^{1,0}_{h,h'} K^{i-1,1}_{k,k'},$$

$$K^{i,2}_{s,s'} = \frac{i}{i-2} \sum\sum K^{1,0}_{h,h'} K^{i-1,2}_{k,k'},$$

etc.,

h, h', k, k' étant des entiers assujettis aux conditions

$$h + k = s; \qquad h' + k' = s'.$$

76. Après avoir déterminé les coefficients $K^{i,q}_{s,s'}$, nous allons introduire, dans les développements (9) et (9'), les valeurs des $L^{(i)}_{s,s'}$ données par l'équation (11). Les résultats qu'on obtient de la sorte, étant des développements suivant les puissances de σ, on peut les mettre sous la forme générale:

(12) $$C^{1,n}_{s,s'} = S^{1,n,0}_{s,s'} + S^{1,n,1}_{s,s'}\sigma + S^{1,n,2}_{s,s'}\sigma^2 + \ldots,$$

si l'on attribue aux coefficients $S^{1,n,q}_{s,s'}$ les valeurs que voici:

(13) $$S^{1,n,q}_{s,s'} = -\gamma_1^{1,n} K^{1,q}_{s,s'} + \gamma_2^{1,n} K^{2,q}_{s,s'} - \gamma_3^{1,n} K^{3,q}_{s,s'} + \ldots,$$

avec l'exception de

(13') $$S^{1,n,q}_{0,0} = (-1)^q \gamma_q^{1,n} K^{q,q}_{0,0} = \gamma_q^{1,n}.$$

Cela étant, nous allons établir les développements suivants, où l'on ne mettra en évidence que les termes jusqu'au sixième degré inclusivement:

$$\sigma = -2\eta^2 + 2\eta'^2 + \eta^4 - 4\eta^2\eta'^2 + 3\eta'^4$$
$$+ 2\eta^4\eta'^2 - 6\eta^2\eta'^4 + 4\eta'^6,$$

$$\sigma^2 = 4\eta^4 - 8\eta^2\eta'^2 + 4\eta'^4$$
$$- 4\eta^6 + 20\eta^4\eta'^2 - 28\eta^2\eta'^4 + 12\eta'^6,$$

$$\sigma^3 = -8\eta^6 + 24\eta^4\eta'^2 - 24\eta^2\eta'^4 + 8\eta'^6.$$

Si nous introduisons ces valeurs dans l'expression

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n \left(\frac{a'}{r'}\right)^{n+1} C_n^{(1)} = \frac{(1-\eta^2)^n}{(1-\eta'^2)^{n+1}} \frac{(1+\rho')^{n+1}}{(1+\rho)^n} \sum\sum \left\{ S_{s,s'}^{1,n,0} + S_{s,s'}^{1,n,1}\sigma + S_{s,s'}^{1,n,2}\sigma^2 + \ldots \right\} \rho^s \rho'^{s'},$$

et que, d'autre part, nous admettions qu'on ait établi le développement

$$(14)\quad \left(\frac{r}{a}\right)^n \left(\frac{a'}{r'}\right)^{n+1} C_n^{(1)} = \sum\sum \left\{ \Omega(n, s, s')_{0,0} - \Omega(n, s, s')_{1,0}\eta^2 + \Omega(n, s, s')_{0,1}\eta'^2 \right.$$

$$+ \Omega(n, s, s')_{2,0}\eta^4 - \Omega(n, s, s')_{1,1}\eta^2\eta'^2 + \Omega(n, s, s')_{0,2}\eta'^4$$

$$\left. - \ldots \right\} \rho^s \rho'^{s'},$$

il devient indispensable d'exprimer les coefficients constants $\Omega(n, s, s')_{\nu,\nu'}$ moyennant les S.

Dans ce but, supposons d'abord:

$$(15)\quad \frac{(1-\eta^2)^n}{(1-\eta'^2)^{n+1}} \left\{ S_{s,s'}^{1,n,0} + S_{s,s'}^{1,n,1}\sigma + \ldots \right\} = U_{s,s',0,0}^{(n)}$$

$$- U_{s,s',1,0}^{(n)}\eta^2 + U_{s,s',0,1}^{(n)}\eta'^2$$

$$+ U_{s,s',2,0}^{(n)}\eta^4 - U_{s,s',1,1}^{(n)}\eta^2\eta'^2 + U_{s,s',0,2}^{(n)}\eta'^4$$

$$- \ldots,$$

et nous obtenons facilement, après y avoir introduit les expressions de $\sigma, \sigma^2, \ldots$, ainsi que le développement de $\frac{(1-\eta^2)^n}{(1-\eta'^2)^{n+1}}$, les expressions suivantes:

$$
(16)\quad
\left\{
\begin{aligned}
U^{(n)}_{s,s',0,0} &= S^{1,n,0}_{s,s'},\\
U^{(n)}_{s,s',1,0} &= nS^{1,n,0}_{s,s'} + 2S^{1,n,1}_{s,s'},\\
U^{(n)}_{s,s',0,1} &= (n+1)S^{1,n,0}_{s,s'} + 2S^{1,n,1}_{s,s'},\\
U^{(n)}_{s,s',2,0} &= \frac{n(n-1)}{1.2}S^{1,n,0}_{s,s'} + (2n+1)S^{1,n,1}_{s,s'} + 4S^{1,n,2}_{s,s'},\\
U^{(n)}_{s,s',1,1} &= n(n+1)S^{1,n,0}_{s,s'} + (4n+6)S^{1,n,1}_{s,s'} + 8S^{1,n,2}_{s,s'},\\
U^{(n)}_{s,s',0,2} &= \frac{(n+1)(n+2)}{1.2}S^{1,n,0}_{s,s'} + (2n+5)S^{1,n,1}_{s,s'} + 4S^{1,n,2}_{s,s'},\\
U^{(n)}_{s,s',3,0} &= \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}S^{1,n,0}_{s,s'} + n^2S^{1,n,1}_{s,s'} + 4(n+1)S^{1,n,2}_{s,s'} + 8S^{1,n,3}_{s,s'},\\
U^{(n)}_{s,s',2,1} &= \frac{n(n-1)(n+1)}{1.2.1}S^{1,n,0}_{s,s'} + (3n^2+5n+2)S^{1,n,1}_{s,s'}\\
&\qquad + 4(3n+6)S^{1,n,2}_{s,s'} + 24S^{1,n,3}_{s,s'},\\
U^{(n)}_{s,s',1,2} &= \frac{n(n+1)(1+2)}{1.1.2}S^{1,n,0}_{s,s'} + (3n^2+12n+12)S^{1,n,1}_{s,s'}\\
&\qquad + 4(3n+9)S^{1,n,2}_{s,s'} + 24S^{1,n,3}_{s,s'},\\
U^{(n)}_{s,s',0,3} &= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}S^{1,n,0}_{s,s'} + (n^2+6n+9)S^{1,n,1}_{s,s'}\\
&\qquad + 4(n+4)S^{1,n,2}_{s,s'} + 8S^{1,n,3}_{s,s'}\\
&\text{etc.}
\end{aligned}
\right.
$$

Il convient de remarquer que la forme générale des coefficients U est celle-ci:

$$
(17)\qquad U^{(n)}_{s,s',p,q} = \varphi_0 S^{(0)}_{s,s'} + \varphi_1 S^{(1)}_{s,s'} + \varphi_2 S^{(2)}_{s,s'} + \ldots + \varphi_{p+q} S^{(p+q)}_{s,s'},
$$

où, en employant la notation abrégée

$$
S^{(q)}_{s,s'} = S^{1,n,q}_{s,s'},
$$

on a désigné par $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ des fonctions rationnelles du nombre n et d'autres entiers, mais indépendantes des indices s et s′.

Mais on pourra aussi mettre les coefficients U sous une autre forme, en les représentant comme fonctions des transcendantes $\gamma^{1,n}_{s}$. En effet, si

l'on remplace, dans les équations (16), les S^{ν}_{s} moyennant les développements (13) et (13'), et qu'on admette la notation

$$(18)\qquad G^{\nu,n}_{s,s',\nu,\nu'} = \varphi_0 K^{\nu,0}_{s,s'} + \varphi_1 K^{\nu,1}_{s,s'} + \dots + \varphi_{\nu+\nu'} K^{\nu,\nu+\nu'}_{s,s'},$$

les U seront exprimés par la formule

$$(19)\qquad U^{\nu,n}_{s,s',\nu,\nu'} = \dots - G^{1,\nu}_{s,s',\nu,\nu'}\gamma_1^{1,n} + G^{2,\nu}_{s,s',\nu,\nu'}\gamma_2^{1,n} - \dots,$$

mais dans le cas exceptionnel, où s et s' sont égaux à zéro, on aura, au lieu de la formule précédente, celle-ci:

$$(19')\qquad U^{\nu,n}_{0,0,\nu,\nu'} = \varphi_0\gamma_0^{1,n} + \varphi_1\gamma_1^{1,n} + \varphi_2\gamma_2^{1,n} + \dots + \varphi_{\nu+\nu'}\gamma_{\nu+\nu'}^{1,n}.$$

Venons finalement aux coefficients Ω.

En multipliant l'équation (15) par:

$$\frac{(1+\rho')^{n+1}}{(1+\rho)^{n}} = \left\{1 + \frac{n+1}{1}\rho' + \frac{(n+1)n}{1.2}\rho'^2 + \dots\right\}\left\{1 - \frac{n}{1}\rho + \frac{n(n+1)}{1.2}\rho^2 - \dots\right\},$$

on aura, en comparant le résultat avec l'équation (14), l'expression suivante de la fonction $\Omega(n, s, s')_{\nu,\nu'}$, où j'omets les indices n, ν et ν', vu qu'ils sont partout les mêmes:

$$(20)\qquad \Omega(n,s,s')_{\nu,\nu'} = U_{s,s'} - nU_{s-1,s'} + \frac{n(n+1)}{1.2}U_{s-2,s'} - \dots \pm \frac{n(n+1)\dots(n+s-1)}{1.2.3\dots s}U_{0,s'}$$

$$+ \frac{n+1}{1}\left\{U_{s,s'-1} - nU_{s-1,s'-1} + \frac{n(n+1)}{1.2}U_{s-2,s'-1} - \dots \pm \frac{n(n+1)\dots(n+s-1)}{1.2.3\dots s}U_{0,s'-1}\right\}$$

$$+ \frac{(n+1)n}{1.2}\left\{U_{s,s'-2} - nU_{s-1,s'-2} + \dots \pm \frac{n(n+1)\dots(n+s-1)}{1.2.3\dots s}U_{0,s'-2}\right\}$$

$$+ \dots$$

$$+ \frac{(n+1)n(n-1)\dots(n-s'+2)}{1.2\dots s'}\left\{U_{s,0} - nU_{s-1,0} + \dots \pm \frac{n(n+1)\dots(n+s-1)}{1.2.3\dots s}U_{0,0}\right\}.$$

En voici quelques valeurs spéciales, où l'indice n est toujours omis:

$$\Omega(n\,,\,0\,,\,0)_{\nu,\nu'} = U_{0,0,\nu,\nu'}\,,$$

$$\Omega(n\,,\,1\,,\,0)_{\nu,\nu'} = U_{1,0,\nu,\nu'} - nU_{0,0,\nu,\nu'}\,,$$

$$\Omega(n\,,\,0\,,\,1)_{\nu,\nu'} = U_{0,1,\nu,\nu'} + (n+1)U_{0,0,\nu,\nu'}\,,$$

$$\Omega(n\,,\,2\,,\,0)_{\nu,\nu'} = U_{2,0,\nu,\nu'} - nU_{1,0,\nu,\nu'} + \frac{n(n+1)}{1.2}U_{0,0,\nu,\nu'}\,,$$

$$\Omega(n\,,\,1\,,\,1)_{\nu,\nu'} = U_{1,1,\nu,\nu'} - nU_{0.1,\nu,\nu'} + (n+1)U_{1,0,\nu,\nu'} - n(n+1)U_{0,0,\nu,\nu'}\,,$$

$$\Omega(n\,,\,0\,,\,2)_{\nu,\nu'} = U_{0,2,\nu,\nu'} + (n+1)U_{0,1,\nu,\nu'} + \frac{(n+1)n}{1.2}U_{0,0,\nu,\nu'}\,.$$

77. Cherchons maintenant les expressions de la seconde forme des coefficients Ω, et admettons d'abord qu'il s'agisse du cas le plus simple où:

$$\nu = \nu' = 0.$$

On a alors:

$$\varrho_0 = 1\,; \qquad \varrho_1 = \varrho_2 = \ldots = 0,$$

et, en conséquence:

$$U^{(n)}_{s,s'} = -K^{1,0}_{s,s'}\gamma^{1,n}_1 + K^{2,0}_{s,s'}\gamma^{1,n}_2 - K^{3,0}_{s,s'}\gamma^{1,n}_3 + \ldots \tag{21}$$

En substituant cette valeur dans l'expression générale (20), on obtiendra:

$$\Omega(n\,,\,s\,,\,s')_{0,0} = \sum H^{n,i}_{s,s'}\gamma^{1,n}_i\,, \tag{22}$$

les coefficients $H^{n,i}_{s,s'}$ étant donnés moyennant la formule

$$\begin{aligned}(-1)^i H^{n,i}_{s,s'} = {} & K^{i,0}_{s,s'} - nK^{i,0}_{s-1,s'} + \frac{n(n+1)}{1.2}K^{i,0}_{s-2,s'} - \ldots \\ & + \frac{n+1}{1}\left\{K^{i,0}_{s,s'-1} - nK^{i,0}_{s-1,s'-1} + \frac{n(n+1)}{1.2}K^{i,0}_{s-2,s'-1} - \ldots\right\} \\ & + \frac{(n+1)n}{1.2}\left\{K^{i,0}_{s,s'-2} - nK^{i,0}_{s-1,s'-2} + \frac{n(n+1)}{1.2}K^{i,0}_{s-2,s'-2} - \ldots\right\} \\ & + \ldots \\ & \pm \frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-s+2)}{1.2\ldots s}\cdot\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+s'-1)}{1.2\ldots s'}K^{i,0}_{0,0}\,.\end{aligned} \tag{23}$$

C'est à M. Harzer qu'on doit cette seconde forme des coefficients Ω. Il n'en a pas donné, toutefois, l'expression générale, mais seulement les expressions numériques des coefficients $\mathrm{H}_{s,s'}^{n,s''}$ jusqu'à ceux, inclusivement, qui appartiennent aux indices satisfaisant la condition

$$s + s' = 3.$$

Voici d'abord les expressions des $H_{s,s'}^{n,s''}$ calculées par M. Harzer:[1]

$$\mathrm{H}_{0,0}^{n,0} = 1,$$

$$\mathrm{H}_{1,0}^{n,0} = -n,$$

$$\mathrm{H}_{0,1}^{n,0} = n + 1,$$

$$\mathrm{H}_{2,0}^{n,0} = \frac{n(n+1)}{1.2},$$

$$\mathrm{H}_{1,1}^{n,0} = -n(n+1),$$

$$\mathrm{H}_{0,2}^{n,0} = \frac{n(n+1)}{1.2},$$

$$\mathrm{H}_{3,0}^{n,0} = -\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3},$$

$$\mathrm{H}_{2,1}^{n,0} = \frac{n(n+1)^2}{1.2},$$

$$\mathrm{H}_{1,2}^{n,0} = -\frac{n^2(n+1)}{1.2},$$

$$\mathrm{H}_{0,3}^{n,0} = \frac{(n-1)n(n+1)}{1.2.3},$$

$$\mathrm{H}_{1,0}^{n,1} = -2,$$

$$\mathrm{H}_{0,1}^{n,1} = 2,$$

$$\mathrm{H}_{2,0}^{n,1} = 2n + 3,$$

$$\mathrm{H}_{1,1}^{n,1} = -2(2n+3),$$

$$\mathrm{H}_{0,2}^{n,1} = 2n + 3,$$

$$\mathrm{H}_{3,0}^{n,1} = -(n+2)^2,$$

$$\mathrm{H}_{2,1}^{n,1} = 3n^2 + 10n + 9,$$

$$\mathrm{H}_{1,2}^{n,1} = -3n^2 - 8n - 6,$$

$$\mathrm{H}_{0,3}^{n,1} = (n+1)^2,$$

$$\mathrm{H}_{2,0}^{n,2} = 4,$$

$$\mathrm{H}_{1,1}^{n,2} = -8,$$

$$\mathrm{H}_{0,2}^{n,2} = 4,$$

$$\mathrm{H}_{3,0}^{n,2} = -4(n+3),$$

$$\mathrm{H}_{2,1}^{n,2} = 4(3n+8),$$

$$\mathrm{H}_{1,2}^{n,2} = -4(3n+7),$$

$$\mathrm{H}_{0,3}^{n,2} = 4(n+2),$$

$$\mathrm{H}_{3,0}^{n,3} = -8,$$

$$\mathrm{H}_{2,1}^{n,3} = 24,$$

$$\mathrm{H}_{1,2}^{n,3} = -24,$$

$$\mathrm{H}_{0,3}^{n,3} = 8,$$

[1] Mémoires de l'acad. de St. Pét. Tome XXXIV, N° 12.

J'ajoute les valeurs suivantes qui appartiennent aux indices dont la somme est égale à 4 ou à 5. Les voici:

$$\mathrm{H}_{4,0}^{n,0} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4},$$

$$\mathrm{H}_{3,1}^{n,0} = -\frac{n(n+1)^2(n+2)}{1.2.3},$$

$$\mathrm{H}_{2,2}^{n,0} = \frac{n^2(n+1)^2}{1.2.1.2},$$

$$\mathrm{H}_{1,3}^{n,0} = -\frac{(n-1)n^2(n+1)}{1.2.3},$$

$$\mathrm{H}_{0,4}^{n,0} = \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{1.2.3.4},$$

$$\mathrm{H}_{5,0}^{n,0} = -\frac{n(n+1)(n+2)(n+4)(n+4)}{1.2\ldots5},$$

$$\mathrm{H}_{4,1}^{n,0} = \frac{n(n+1)^2(n+2)(n+3)}{1.2.3.4},$$

$$\mathrm{H}_{3,2}^{n,0} = -\frac{n^2(n+1)^2(n+2)}{1.2.3,1.2},$$

$$\mathrm{H}_{2,3}^{n,0} = \frac{(n-1)n^2(n+1)^2}{1.2.1.2.3},$$

$$\mathrm{H}_{1,4}^{n,0} = -(n-2)(n-1)n^2(n+1),$$

$$\mathrm{H}_{0,5}^{n,0} = \frac{(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)}{1.2\ldots5},$$

$$\mathrm{H}_{4,0}^{n,1} = 5 + 4n + 3\frac{n(n+1)}{1.2} + 2\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3},$$

$$\mathrm{H}_{3,1}^{n,1} = -12 - 10n - 8\frac{n(n+1)}{1.2} - 8\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3},$$

$$\mathrm{H}_{2,2}^{n,1} = 9 + 8n + 6\frac{n(n+1)}{1.2} + 12\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3},$$

$$\mathrm{H}_{1,3}^{n,1} = -2 - 2n - 8\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3},$$

$$\mathrm{H}_{0,4}^{n,1} = -\frac{n(n+1)}{1.2} + 2\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3},$$

$$H^{n,1}_{5,0} = -6 - 5n - 4\frac{n(n+1)}{1.2} - 3\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} - 2\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4},$$

$$H^{n,1}_{4,1} = 15 + 13n + 11\frac{n(n+1)}{1.2} + 9\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} + 10\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4},$$

$$H^{n,1}_{3,2} = -12 - 11n - 10\frac{n(n+1)}{1.2} - 6\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} - 20\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4},$$

$$H^{n,1}_{2,3} = 3 + 3n + 4\frac{n(n+1)}{1.2} - 6\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} + 20\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4},$$

$$H^{n,1}_{1,4} = -2\frac{n(n+1)}{1.2} + 9\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} - 10\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4},$$

$$H^{n,1}_{0,5} = \frac{n(n+1)}{1.2} - 3\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} + 2\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4},$$

$$H^{n,2}_{4,0} = 25 + 14n + 2n^2,$$

$$H^{n,2}_{3,1} = -76 - 48n - 8n^2,$$

$$H^{n,2}_{2,2} = 82 + 60n + 12n^2,$$

$$H^{n,2}_{1,3} = -36 - 32n - 8n^2,$$

$$H^{n,2}_{0,4} = 5 + 6n + 2n^2,$$

$$H^{n,2}_{5,0} = -44 - 25n - 12\frac{n(n+1)}{1.2} - 4\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3},$$

$$H^{n,2}_{4,1} = 145 + 89n + 48\frac{n(n+1)}{1.2} + 20\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3},$$

$$H^{n,2}_{3,2} = -176 - 118n - 72\frac{n(n+1)}{1.2} - 40\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3},$$

$$H^{n,2}_{2,3} = 94 + 70n + 48\frac{n(n+1)}{1.2} + 40\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3},$$

$$H^{n,2}_{1,4} = -20 - 17n - 12\frac{n(n+1)}{1.2} - 20\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3},$$

$$H^{n,2}_{0,5} = 1 + n + 4\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3},$$

$$H^{n,3}_{4,0} = \quad 36 + 8n,$$

$$H^{n,3}_{3,1} = -128 - 32n,$$

$$H^{n,3}_{2,2} = \quad 168 + 48n,$$

$$H^{n,3}_{1,3} = -\ 96 - 32n,$$

$$H^{n,3}_{0,4} = \quad 20 + 8n,$$

$$H^{n,3}_{5,0} = -102 - 36n - 8\frac{n(n+1)}{1.2},$$

$$H^{n,3}_{4,1} = \quad 402 + 156n + 40\frac{n(n+1)}{1.2},$$

$$H^{n,3}_{3,2} = -612 - 264n - 80\frac{n(n+1)}{1.2},$$

$$H^{n,3}_{2,3} = \quad 444 + 216n + 80\frac{n(n+1)}{1.2},$$

$$H^{n,3}_{1,4} = -150 - 84n - 40\frac{n(n+1)}{1.2},$$

$$H^{n,3}_{0,5} = \quad 18 + 12n + 8\frac{n(n+1)}{1.2},$$

$$H^{n,4}_{4,0} = \quad 16,$$

$$H^{n,4}_{3,1} = -64,$$

$$H^{n,4}_{2,2} = \quad 96,$$

$$H^{n,4}_{1,3} = -64,$$

$$H^{n,4}_{0,4} = \quad 16,$$

$$H^{n,4}_{5,0} = -\ 96 - 16n,$$

$$H^{n,4}_{4,1} = \quad 432 + 80n,$$

$$H^{n,4}_{3,2} = -768 - 160n,$$

$$H^{n,4}_{2,3} = \quad 672 + 160n,$$

$$H^{n,4}_{1,4} = -288 - 80n,$$

$$H^{n,4}_{0,5} = \quad 48 + 16n,$$

$$H^{n,5}_{5,0} = -\ 32,$$

$$H^{n,5}_{4,1} = \quad 160,$$

$$H^{n,5}_{3,2} = -320,$$

$$H^{n,5}_{2,3} = \quad 320,$$

$$H^{n,5}_{1,4} = -160,$$

$$H^{n,5}_{0,5} = \quad 32.$$

78. Venons maintenant au cas général où les indices ν et ν' ont des valeurs quelconques, et supposons que les coefficients Ω soient exprimés moyennant des formules du type

$$(24) \qquad \Omega(n\,,\,s\,,\,s')_{\nu,\nu'} = \sum H^{n,i}_{s,s',\nu,\nu'}\,\gamma^{i,n}_{\nu};$$

il s'ensuit, eu égard aux expressions (19), (21), (22) et (23), que les $H^{n,i}_{s,s',\nu,\nu'}$ seront encore exprimés par la formule (23), en mettant toutefois $G^{i,n}_{s,s',\nu,\nu'}$ au lieu de $K^{i,0}_{s,s'}$. Donc, en désignant par $N^{n,i,g}_{s,s'}$ ce que devient $H^{n,i}_{s,s'}$ lorsqu'on met $K^{i,g}_{s,s'}$ au lieu de $K^{i,0}_{s,s'}$, dans la formule (23), il viendra:

$$(25) \qquad H^{n,i}_{s,s',\nu,\nu'} = \varphi_0(\nu\,,\,\nu')N^{n,i,0}_{s,s'} + \varphi_1(\nu\,,\,\nu')N^{n,i,1}_{s,s'} + \ldots.$$

Dans cette formule, on a mis en évidence les deux indices ν et ν' d'où dépendent les facteurs φ. Ces facteurs dépendent encore du nombre n, il est vrai, mais ce serait inutile de mettre en évidence cet indice, vu qu'il ne change pas dans nos formules.

Puisque le facteur $\varphi_0(0\,,\,0)$ est indépendant de n et toujours égal à l'unité, on aura avant tout:

$$N^{n,i,0}_{s,s'} = H^{n,i}_{s,s',0,0} = H^{n,i}_{s,s'}.$$

Quant aux expressions des facteurs $\varphi_g(\nu\,,\,\nu')$, on s'aperçoit facilement qu'ils ne sont pas autre chose que les coefficients des divers $S^{1,n,g}_{s,s'}$ entrant dans les formules (16); on a en conséquence:

$$\varphi_0(1\,,\,0) = n, \qquad \varphi_1(1\,,\,0) = 2,$$

$$\varphi_0(0\,,\,1) = n+1, \qquad \varphi_1(0\,,\,1) = 2,$$

$$\varphi_0(2\,,\,0) = \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}, \qquad \varphi_1(2\,,\,0) = 2n+1, \qquad \varphi_2(2\,,\,0) = 4,$$

etc. etc. etc.

Pour obtenir les expressions des $H^{n,i}_{s,s',\nu,\nu'}$, il faut évaluer les $N^{n,i,g}_{s,s'}$, g étant plus grand que zéro. Dans ce but, nous introduirons, dans la formule (23), les valeurs des $K^{i,g}_{s,s'}$, en attribuant à g les valeurs $1\,,\,2\,,\,3$. Nous parviendrons de la sorte aux expressions suivantes:

$$N^{n,1,1}_{0,0} = 1,$$

$$N_{1,0}^{n,1,1} = -2 - n,$$

$$N_{0,1}^{n,1,1} = 3 + n,$$

$$N_{2,0}^{n,1,1} = 3 + 2n + \frac{n(n+1)}{1.2},$$

$$N_{1,1}^{n,1,1} = -6 - 4n - 2\frac{n(n+1)}{1.2},$$

$$N_{0,2}^{n,1,1} = 3 + 2n + \frac{n(n+1)}{1.2},$$

$$N_{3,0}^{n,1,1} = -4 - 3n - 2\frac{n(n+1)}{1.2} - \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3},$$

$$N_{2,1}^{n,1,1} = 9 + 7n + 5\frac{n(n+1)}{1.2} + 3\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3},$$

$$N_{1,2}^{n,1,1} = -6 - 5n - 4\frac{n(n+1)}{1.2} - 3\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3},$$

$$N_{0,3}^{n,1,1} = 1 + n + \frac{n(n+1)}{1.2} + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3},$$

$$N_{1,0}^{n,2,1} = -4,$$

$$N_{0,1}^{n,2,1} = 4,$$

$$N_{2,0}^{n,2,1} = 14 + 4n,$$

$$N_{1,1}^{n,2,1} = -28 - 8n,$$

$$N_{0,2}^{n,2,1} = 14 + 4n,$$

$$N_{3,0}^{n,2,1} = -32 - 14n - 4\frac{n(n+1)}{1.2},$$

$$N_{2,1}^{n,2,1} = 82 + 38n + 12\frac{n(n+1)}{1.2},$$

$$N_{1,2}^{n,2,1} = -68 - 34n - 12\frac{n(n+1)}{1.2},$$

$$N_{0,3}^{n,2,1} = 18 + 10n + 4\frac{n(n+1)}{1.2},$$

$$N^{n,3,1}_{2,0} = 12,$$

$$N^{n,3,1}_{1,1} = -24,$$

$$N^{n,3,1}_{0,2} = 12,$$

$$N^{n,3,1}_{3,0} = -60 - 12n,$$

$$N^{n,3,1}_{2,1} = 108 + 36n,$$

$$N^{n,3,1}_{1,2} = -150 - 36n,$$

$$N^{n,3,1}_{0,3} = 48 + 12n,$$

$$N^{n,4,1}_{3,0} = -32,$$

$$N^{n,4,1}_{2,1} = 96,$$

$$N^{n,4,1}_{1,2} = -96,$$

$$N^{n,4,1}_{0,3} = 32,$$

$$N^{n,2,2}_{0,0} = 1,$$

$$N^{n,2,2}_{1,0} = -4 - n,$$

$$N^{n,2,2}_{0,1} = 5 + n,$$

$$N^{n,3,2}_{1,0} = -6,$$

$$N^{n,3,2}_{0,1} = 6.$$

Les $N^{n,j,q}_{s,s'}$ étant évalués, on en déduit sans peine les $H^{n,j}_{s,s',\sigma,\sigma'}$, en faisant usage de la formule (25). Voici ceux de ces coefficients qui sont nécessaires au calcul des termes jusqu'au cinquième degré, inclusivement, par rapport aux fonctions diastématiques:

$$H^{n,0}_{0,0,1,0} = n,$$

$$H^{n,0}_{1,0,1,0} = -n^2,$$

$$H^{n,0}_{0,1,1,1} = n(n+1),$$

$$H^{n,0}_{2,0,1,0} = \frac{n^2(n+1)}{1.2},$$

$$H^{n,0}_{1,1,1,0} = -n^2(n+1),$$

$$H^{n,0}_{0,2,1,0} = \frac{n^2(n+1)}{1.2},$$

$$H^{n,0}_{3,0,1,0} = -\frac{n^2(n+1)(n+2)}{1.2.3},$$

$$H^{n,0}_{2,1,1,0} = \frac{n^2(n+1)^2}{1.2},$$

$$H^{n,0}_{1,2,1,0} = -\frac{n^3(n+1)}{1.2},$$

$$H^{n,0}_{0,3,1,0} = \frac{(n-1)n^2(n+1)}{1.2.3},$$

$$H^{n,1}_{0,0,1,0} = 2,$$

$$H^{n,1}_{1,0,1,0} = -4 - 4n,$$

$$H^{n,1}_{0,1,1,0} = 6 + 4n,$$

$$H^{n,1}_{2,0,1,0} = 6 + 5n + 6\frac{n(n+1)}{1.2},$$

$$H^{n,1}_{1,1,1,0} = -12 - 10n - 12\frac{n(n+1)}{1.2},$$

$$H^{n,1}_{0,2,1,0} = 6 + 5n + 6\frac{n(n+1)}{1.2},$$

$$H^{n,1}_{3,0,1,0} = -8 - 7n - 6\frac{n(n+1)}{1.2} - 8\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3},$$

$$H^{n,1}_{2,1,1,0} = 18 + 16n + 12\frac{n(n+1)}{1.2} + 24\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3},$$

$$H^{n,1}_{1,2,1,0} = -12 - 11n - 6\frac{n(n+1)}{1.2} - 24\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3},$$

$$H^{n,1}_{0,3,1,0} = 2 + 2n + 8\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3},$$

$$H^{n,2}_{1,0,1,0} = -8,$$

$$H^{n,2}_{0,1,1,0} = 8,$$

$$H^{n,2}_{2,0,1,0} = 28 + 12n,$$

$$H^{n,2}_{1,1,1,0} = -56 - 24n,$$

$$H^{n,2}_{0,2,1,0} = 28 + 12n,$$

$$H^{n,2}_{3,0,1,0} = -64 - 36n - 16\frac{n(n+1)}{1.2},$$

$$H^{n,2}_{2,1,1,0} = 164 + 96n + 48\frac{n(n+1)}{1.2},$$

$$H^{n,2}_{1,2,1,0} = -136 - 84n - 48\frac{n(n+1)}{1.2},$$

$$H^{n,2}_{0,3,1,0} = 36 + 24n + 16\frac{n(n+1)}{1.2},$$

$$H^{n,3}_{2,0,1,0} = 24,$$

$$H^{n,3}_{1,1,1,0} = -48,$$

$$H^{n,3}_{0,2,1,0} = 24,$$

$$H^{n,3}_{3,0,1,0} = -120 - 32n,$$

$$H^{n,3}_{2,1,1,0} = 336 + 96n,$$

$$H^{n,3}_{1,2,1,0} = -312 - 96n,$$

$$H^{n,3}_{0,3,1,0} = 96 + 32n,$$

$$H^{n,4}_{3,0,1,0} = -64,$$

$$H^{n,4}_{2,1,1,0} = 192,$$

$$H^{n,4}_{1,2,1,0} = -192,$$

$$H^{n,4}_{0,3,1,0} = 64,$$

$$H^{n,0}_{0,0,0,1} = n + 1,$$

$$H^{n,0}_{1,0,0,1} = -n(n+1),$$

$$H^{n,0}_{0,1,0,1} = (n+1)^2,$$

$$H^{n,0}_{2,0,0,1} = \frac{n(n+1)^2}{1.2},$$

$$H^{n,0}_{1,1,0,1} = -n(n+1)^2,$$

$$H^{n,0}_{0,2,0,1} = \frac{n(n+1)^2}{1.2},$$

$$H^{n,0}_{3,0,0,1} = -\frac{n(n+1)^2(n+2)}{1.2.3},$$

$$H^{n,0}_{2,1,0,1} = \frac{n(n+1)^3}{1.2},$$

$$H^{n,0}_{1,2,0,1} = -\frac{n^2(n+1)^2}{1.2},$$

$$H^{n,0}_{0,3,0,1} = \frac{(n-1)n(n+2)^2}{1.2.3},$$

$$H^{n,1}_{0,0,0,1} = 2,$$

$$H^{n,1}_{1,0,0,1} = -6 - 4n,$$

$$H^{n,1}_{0,1,0,1} = 8 + 4n,$$

$$H^{n,1}_{2,0,0,1} = 9 + 7n + 6\frac{n(n+1)}{1.2},$$

$$H^{n,1}_{1,1,0,0} = -18 - 14n - 12\frac{n(n+1)}{1.2},$$

$$H^{n,1}_{0,2,0,1} = 9 + 7n + 6\frac{n(n+1)}{1.2},$$

$$H^{n,1}_{3,0,0,1} = -12 - 10n - 8\frac{n(n+1)}{1.2} - 8\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3},$$

$$H^{n,1}_{2,1,0,1} = 27 + 23n + 18\frac{n(n+1)}{1.2} + 24\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3},$$

$$H^{n,1}_{1,2,0,1} = -18 - 16n - 12\frac{n(n+1)}{1.2} - 24\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3},$$

$$H^{n,1}_{0,3,0,1} = 3 + 3n + 2\frac{n(n+1)}{1.2} + 8\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3},$$

$$H^{n,2}_{1,0,0,1} = -8,$$

$$H^{n,2}_{0,1,0,1} = 8,$$

$$H^{n,2}_{2,0,0,1} = 32 + 12n,$$

$$H^{n,2}_{1,1,0,1} = -64 - 24n,$$

$$H^{n,2}_{0,2,0,1} = 32 + 12n,$$

$$H^{n,2}_{3,0,0,1} = -76 - 40n - 16\frac{n(n+1)}{1.2},$$

$$H^{n,2}_{2,1,0,1} = 196 + 108n + 48\frac{n(n+1)}{1.2},$$

$$H^{n,2}_{1,2,0,1} = -164 - 96n - 48\frac{n(n+1)}{1.2},$$

$$H^{n,2}_{0,3,0,1} = 44 + 28n + 16\frac{n(n+1)}{1.2},$$

$$H^{n,3}_{2,0,0,1} = 24,$$

$$H^{n,3}_{1,1,0,1} = -48,$$

$$H^{n,3}_{0,2,0,1} = 24,$$

$$H^{n,3}_{3,0,0,1} = -128 - 32n,$$

$$H^{n,3}_{2,1,0,1} = 360 + 96n,$$

$$H^{n,3}_{1,2,0,1} = -336 - 96n,$$

$$H^{n,3}_{0,3,0,1} = 104 + 32n,$$

$$H^{n,0}_{0,0,2,0} = \frac{n(n-1)}{1.2},$$

$$H^{n,0}_{1,0,2,0} = -\frac{n^2(n-1)}{1.2},$$

$$H^{n,1}_{0,1,2,0} = \frac{(n-1)n(n+1)}{1.2},$$

$$H^{n,1}_{0,0,2,0} = 2n + 1,$$

$$H^{n,1}_{1,0,2,0} = -2 - 4n - 3n^2,$$

$$H^{n,1}_{0,1,2,0} = 3 + 6n + 3n^2,$$

$$H^{n,2}_{0,0,2,0} = 4,$$

$$H^{n,2}_{1,0,2,0} = -20 - 12n,$$

$$H^{n,2}_{0,1,2,0} = 24 + 12n,$$

$$H^{n,3}_{1,0,2,0} = -24,$$

$$H^{n,3}_{0,1,2,0} = 24,$$

$$H^{n,0}_{0,0,1,1} = n(n+1),$$

$$H^{n,0}_{1,0,1,1} = -n^2(n+1),$$

$$H^{n,0}_{0,1,1,1} = n(n+1)^2,$$

$$H^{n,1}_{0,0,1,1} = 6 + 4n,$$

$$H^{n,1}_{1,0,1,1} = -12 - 16n - 6n^2,$$

$$H^{n,1}_{0,1,1,1} = 18 + 20n + 6n^2,$$

$$H^{n,2}_{0,0,1,1} = 8,$$

$$H^{n,2}_{1,0,1,1} = -56 - 24n,$$

$$H^{n,2}_{0,1,1,1} = 64 + 24n,$$

$$\mathrm{H}^{n,2}_{1,0,1,1} = -48,$$

$$\mathrm{H}^{n,2}_{0,1,1,1} = 48,$$

$$\mathrm{H}^{n,0}_{2,0,0,0} = \frac{(n+1)(n+2)}{1.2},$$

$$\mathrm{H}^{n,0}_{1,1,0,0} = \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2},$$

$$\mathrm{H}^{n,0}_{0,2,0,0} = \frac{(n+1)(n+2)}{1.2},$$

$$\mathrm{H}^{n,1}_{0,0,0,2} = 2n+5,$$

$$\mathrm{H}^{n,1}_{1,0,0,2} = -12 - 12n - 3n^2,$$

$$\mathrm{H}^{n,1}_{0,1,0,2} = 17 + 14n + 3n^2,$$

$$\mathrm{H}^{n,2}_{0,0,1,2} = 4,$$

$$\mathrm{H}^{n,2}_{1,0,1,2} = 36 - 12n,$$

$$\mathrm{H}^{n,2}_{0,1,1,2} = 40 + 12n,$$

$$\mathrm{H}^{n,3}_{1,0,0,2} = -24,$$

$$\mathrm{H}^{n,3}_{0,1,1,2} = 24.$$

Dans les cas où l'on est amené à aller plus loin que ne permettent les expressions des listes précédentes, on emploiera, pour le calcul des Ω, les formules (18), (19) et (20).

79. Par les formules que nous venons de mettre en évidence dans les derniers numéros, nous avons épuisé nos matières autant qu'elles concernent le développement de la fonction $\frac{1}{\Delta}$, soit suivant les multiples de H, soit suivant les puissances et les produits de ρ, ρ', χ_i^2 et $\chi_i'^2$: on a exprimé les coefficients de ces développements au moyen de polynômes finis

et linéaires des transcendantes $\gamma_i^{1,n}$. Passons maintenant à exprimer les fonctions $\frac{1}{\Delta^m}$ par des développements semblables.

En dénotant, de la manière suivante, le résultat de la différentiation par rapport à r, de l'équation (1):

$$(26) \qquad r\frac{\partial\left(\frac{a}{\Delta}\right)^m}{\partial r} = \left(\frac{a}{r}\right)^m E_0^{(m)} + 2\frac{r}{a}\left(\frac{a}{r}\right)^{m+1} E_1^{(m)} \cos H + \ldots,$$

on trouvera facilement, après avoir effectivement opéré la différentiation mentionnée, la relation

$$E_n^{(m)} = r\frac{\partial C_n^{(m)}}{\partial r} + nC_n^{(m)}.$$

En considérant, toutefois, la relation

$$r\frac{\partial \chi}{\partial r} = -2(1-\chi),$$

qui s'obtient par définition, on aura aussi:

$$r\frac{\partial C_n^{(m)}}{\partial r} = -2(1-\chi)\frac{\partial C_n^{(m)}}{\partial \chi},$$

d'où il s'ensuit:

$$E_n^{(m)} = -2(1-\chi)\frac{\partial C_n^{(m)}}{\partial \chi} + nC_n^{(m)}.$$

Maintenant, si nous supposons les développements

$$(27) \qquad \begin{cases} C_n^{(m)} = \gamma_0^{m,n} - \gamma_1^{m,n}\chi + \gamma_2^{m,n}\chi^2 - \ldots, \\ E_n^{(m)} = \eta_0^{m,n} - \eta_1^{m,n}\chi + \eta_2^{m,n}\chi^2 - \ldots, \end{cases}$$

et que nous les introduisons dans l'équation précédente, il viendra, quand nous égalons à zéro les coefficients des diverses puissances de χ,

$$(28) \qquad \eta_i^{m,n} = [2i + n]\gamma_i^{m,n} + 2(i+1)\gamma_{i+1}^{m,n}$$

De l'autre côté, si nous différentions l'expression de $\left(\frac{a}{\Delta}\right)^m$, il vient:

$$r\frac{\partial\left(\frac{a}{\Delta}\right)^m}{\partial r} = -ma^m\frac{r^2 - rr'\cos H}{\Delta^{m+2}};$$

mais puisqu'on a:

$$r^2 - rr'\cos H = \frac{1}{2}(\Delta^2 + r^2 - r'^2),$$

l'expression précédente se transforme en celle-ci:

$$r\frac{\partial\left(\frac{a}{\Delta}\right)^m}{\partial r} = -\frac{1}{2}m\left(\frac{a}{\Delta}\right)^m + \frac{m}{2\alpha^2}\left(\frac{r}{a}\right)^2\left(1-\frac{r^2}{r'^2}\right)\left(\frac{a}{\Delta}\right)^{m+2},$$

d'où l'on tire la suivante:

$$\left(\frac{a}{\Delta}\right)^{m+2} = \alpha^2\left(\frac{a}{r}\right)^2\left(1-\alpha^2(1-\chi)\right)^{-1}\left|\left(\frac{a}{\Delta}\right)^m + \frac{2}{m}r\frac{\partial\left(\frac{a}{\Delta}\right)^m}{\partial r}\right|$$

En y portant les valeurs de $\left(\frac{a}{\Delta}\right)^{m+2}$ et $\left(\frac{a}{\Delta}\right)^m$ selon l'équation (1), ainsi que celle de $r\frac{\partial\left(\frac{a}{\Delta}\right)^m}{\partial r}$ donnée par l'équation (26), nous serons facilement, en considérant les développements (27), conduits aux expressions

$$(29)\quad \begin{cases} \gamma_0^{m+2,n} = \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\left[\gamma_0^{m,n} + \frac{2}{m}\eta_0^{m,n}\right], \\ \gamma_1^{m+2,n} = \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\left[\gamma_1^{m,n} + \frac{2}{m}\eta_1^{m,n} + \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\left(\gamma_0^{m,n} + \frac{2}{m}\eta_0^{m,n}\right)\right], \\ \gamma_2^{m+2,n} = \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\left[\gamma_2^{m,n} + \frac{2}{m}\eta_2^{m,n} + \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\left(\gamma_1^{m,n} + \frac{2}{m}\eta_1^{m,n}\right)\right. \\ \qquad\qquad \left. + \left(\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\right)^2\left(\gamma_0^{m,n} + \frac{2}{m}\eta_0^{m,n}\right)\right], \\ \text{etc.}, \end{cases}$$

formules qui se remplacent par l'unique formule:

$$(29')\qquad \gamma_i^{m+2,n} = \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\left[\gamma_i^{m,n} + \frac{2}{m}\eta_i^{m,n}\right] + \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\gamma_{i-1}^{m+2,n}.$$

Les expressions que nous venons de déduire se prêtant avantageusement aux calculs numériques, les transcendantes $\gamma_i^{m,n}$ s'obtiennent aisément si les $\gamma_i^{1,m}$ sont connus d'avance.

Pour arriver, finalement, aux coefficients numériques du développement général (1), on calculera, en employant les formules établies des coefficients $\Omega(n\,,\,s\,,\,s')_{\nu,\nu'}$, mais avec les valeurs des $\gamma_i^{m,n}$ au lieu de celles des $\gamma_i^{1,n}$, les quantités numériques entrant dans le développement

$$\left(\frac{r'}{a}\right)^{m-1}\left(\frac{a}{\Delta}\right)^{m} = \frac{a}{r}\,C_0^{(1,m)} + 2\left(\frac{a}{r}\right)^{2}\frac{r}{a}\,C_1^{(1,m)}\cos H + \ldots,$$

après quoi on trouvera le résultat cherché en multipliant la formule précédente par

$$\left(\frac{a}{r}\right)^{m-1} = \left(\frac{1+\rho}{1-\eta^2}\right)^{m-1}$$

$$= \left\{1 + \frac{m-1}{1}\rho' + \frac{(m-1)(m-2)}{1\,.\,2}\rho'^2 + \ldots\right\}\left\{1 + \frac{m-1}{1}\eta'^2 + \frac{(m-1)m}{1\,.\,2}\eta'^4 + \ldots\right\}.$$

En opérant de la sorte, on se procure l'avantage de profiter des coefficients $H_{s,s',\nu,\nu'}^{n,\lambda}$ que nous venons de donner dans les deux numéros précédents.

80. On pourra encore se procurer le développement envisagé de différents autres modes. On y parviendra, par exemple, en utilisant les développements du n° 68. Voici les transformations nécessaires.

Si l'on introduit, dans l'équation

$$\frac{a}{\Delta} = \frac{a}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos H}},$$

la valeur

$$\cos H = \cos w + h,$$

qu'on développe suivant les puissances de h, et qu'on admette finalement la notation

$$\frac{a}{D} = \frac{a}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos w}},$$

on aura, en adoptant la forme de l'équation (33) du n° 68, c'est-à-dire, en admettant:

$$\frac{a}{\Delta} = W_0 + W_1 h + W_2 h^2 + \ldots.$$

les expressions

$$(30)\quad \begin{cases} W_0 = \dfrac{a}{D}, \\[2ex] W_1 = \dfrac{1}{a}\dfrac{r}{a}\dfrac{r'}{a}\left(\dfrac{a}{D}\right)^3, \\[2ex] W_2 = \dfrac{3}{2}\dfrac{1}{a^2}\left(\dfrac{r}{a}\right)^2\left(\dfrac{r'}{a}\right)^2\left(\dfrac{a}{D}\right)^5, \\ \ldots \end{cases}$$

On aura ensuite, par les notations du n° 74, les formules

$$(31)\quad \begin{cases} W_0 = \dfrac{a}{r'}C_0^{(1)} + 2\dfrac{r}{a}\left(\dfrac{a}{r'}\right)^2 C_1^{(1)}\cos w + \ldots, \\[2ex] W_1 = \dfrac{1}{a}\dfrac{r}{a}\dfrac{r'}{a}\left\{\left(\dfrac{a}{r'}\right)^3 C_0^{(3)} + 2\dfrac{r}{a}\left(\dfrac{a}{r'}\right)^4 C_1^{(3)}\cos w + \ldots\right\}, \\[2ex] W_2 = \dfrac{3}{2}\dfrac{1}{a^2}\left(\dfrac{r}{a}\right)^2\left(\dfrac{r'}{a}\right)^2\left\{\left(\dfrac{a}{r'}\right)^5 C_0^{(5)} + 2\dfrac{r}{a}\left(\dfrac{a}{r'}\right)^6 C_1^{(5)}\cos w + \ldots\right\}, \\ \ldots \end{cases}$$

dont la première, quand on la compare avec l'expression de W_0, donnée dans le n° 68, conduit à la valeur

$$U_n = \left(\frac{r}{a}\right)^n\left(\frac{a}{r'}\right)^{n+1} C_n^{(1)}.$$

Maintenant, si l'on se rappelle les équations (35) et (36) du n° 69, et qu'on les compare avec les expressions des fonctions W_m et U_n que nous venons d'établir, on parviendra aisément aux deux formules que voici:

$$(32)\quad W_n^{(m)} = \frac{1.3\ldots(2m-1)}{1.2\ldots m\,a^m}\left(\frac{r}{a}\right)^{m+n}\left(\frac{r'}{a}\right)^m\left(\frac{a}{r'}\right)^{n+2m+1} C_n^{(2m+1)},$$

$$(33)\quad \begin{aligned} W_n^{(m)} = {} & T_n^{m,n}\left(\frac{r}{a}\right)^{m+n}\left(\frac{a}{r'}\right)^{m+n+1} C_{m+n}^{(1)} \\ & + T_{n+2}^{m,n}\left(\frac{r}{a}\right)^{m+n+2}\left(\frac{a}{r'}\right)^{m+n+3} C_{m+n+2}^{(1)} \\ & + \ldots \end{aligned}$$

En portant, dans la deuxième de ces formules, les valeurs des quantités $\left(\frac{r}{a}\right)^{n+n+\nu}$, $\left(\frac{a'}{r'}\right)^{m+n+\nu+1}$, $C^{(1)}_{n+n+\nu}$ qu'on a données par la formule (14), et en admettant l'expression

$$(34)\qquad W_n^{(m)} = \sum\sum \left\{ \begin{array}{l} V^m(n, s, s')_{0,0} - V^m(n, s, s')_{1,0}\eta^2 + \dots \\ \qquad + V^m(n, s, s')_{0,1}\eta'^2 - \dots \\ \qquad\qquad + \dots \end{array} \right\} \rho^s \rho'^{s'},$$

on trouvera:

$$\begin{aligned}(35)\qquad V^m(n, s, s') = {} & T_n^{m,n}\,\Omega(m+n, s, s')_{..} \\ & + T_{n+2}^{m,n}\,\Omega(m+n+2, s, s')_{..} \\ & + T_{n+4}^{m,n}\,\Omega(m+n+4, s, s')_{..} \\ & + \dots\end{aligned}$$

Ayant ainsi obtenu les $W_n^{(m)}$, on en déduira facilement les coefficients du développement de la fonction $\left(\frac{a}{\Delta}\right)^m$, toutefois après avoir restitué l'angle H au lieu de w. On aura en effet, en vertu de l'équation (32), la formule suivante:

$$(36)\qquad \left(\frac{r}{a}\right)^n \left(\frac{a'}{r'}\right)^{n+2\nu+1} C_n^{(2m+1)} = \frac{1 \,.\, 2 \dots m}{1 \,.\, 3 \dots (2m-1)}\, \alpha^m \left(\frac{a}{r}\right)^m \left(\frac{a'}{r'}\right)^m W_n^{(m)},$$

Il serait facile de mettre cette expression sous la même forme que nous avons employée pour l'équation (14); cependant, puisqu'en même temps on pourra tenir compte d'autres facteurs multipliant les $\left(\frac{a}{\Delta}\right)^{2m+1}$, nous remettons la multiplication algébrique par les facteurs $\left(\frac{a}{r}\right)^m$ et $\left(\frac{a'}{r'}\right)^m$ à l'occasion où nous ferons l'application de la formule établie.

81. Je vais encore communiquer les principaux traits d'une méthode plus directe que les précédentes pour établir le développement (1). De l'équation

$$(37)\qquad \left(\frac{a}{\Delta}\right)^m = \alpha^m \left(\frac{a'}{r'}\right)^m \left\{1 - \alpha \frac{r}{a}\frac{a'}{r'} e^{iH}\right\}^{-\frac{m}{2}} \left\{1 - \alpha \frac{r}{a}\frac{a'}{r'} e^{-iH}\right\}^{-\frac{m}{2}},$$

il est facile de conclure, en remplaçant toujours le produit $\left(\frac{r}{a}\right)^2\left(\frac{a}{r}\right)^2$ par $1-\chi$, les expressions

$$C_0^{(m)} = \alpha^m\left\{1 + \frac{m}{2}\frac{m}{2}\alpha^2(1-\chi) + \frac{m(m+2)}{2.4}\frac{m(m+2)}{2.4}\alpha^4(1-\chi)^2 + \dots\right\},$$

$$C_1^{(m)} = \alpha^{m+1}\left\{\frac{m}{2} + \frac{m}{2}\frac{m(m+2)}{2.4}\alpha^2(1-\chi) + \dots\right\},$$

. . . .

et généralement:

$$(38)\qquad C_n^{(m)} = \alpha^{m+n}\left\{\frac{m(m+2)\dots(m+2n-2)}{2.4\dots2n} + \frac{m}{2}\frac{m(m+2)\dots(m+2n)}{2.4\dots2n(2n+2)}\alpha^2(1-\chi) + \frac{m(m+2)}{2.4}\frac{m(m+2)\dots(m+2n+2)}{2.4\dots(2n+2)(2n+4)}\alpha^4(1-\chi)^2 + \dots\right\}$$

Cette équation devant être identique avec la première des équations (27), on en tire le développement général

$$(39)\qquad \frac{1}{\alpha^m}\gamma_i^{m,n} = \frac{\frac{m}{2}\left(\frac{m}{2}+1\right)\dots\left(\frac{m}{2}+i-1\right)\frac{m}{2}\left(\frac{m}{2}+1\right)\dots\left(\frac{m}{2}+n+i-1\right)}{1.2.3\dots i\;1.2.3\dots(n+i)}\alpha^{n+2i}F\left(\frac{m}{2}+i,\frac{m}{2}+n+i,n+i+1,\alpha^2\right),$$

$F(a, b, c, x)$ étant la série hypergéométrique de GAUSS.

Nous voilà donc conduits à un premier résultat utile; on pourra l'employer pour vérifier les calculs numériques exécutés d'après les formules du n° 79, qui donnent les $\gamma_s^{m,n}$ exprimés moyennant les transcendantes $\beta_n^{(s)}$. Des nombreuses formules de transformation qu'on a établies relativement aux séries hypergéométriques, il n'y a lieu de faire application, quant à présent, que de celle-ci:

$$F\left(\frac{m}{2}+i,\frac{m}{2}+n+i,n+i+1,\alpha^2\right)$$

$$= \frac{1}{(1-\alpha^2)^{\frac{m}{2}+i}}F\left(\frac{m}{2}+i,1-\frac{m}{2},n+i+1,-\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\right)$$

Il en résulte la formule

(40) $$\frac{1}{\alpha^m}\gamma_i^{m,n} =$$

$$\frac{\frac{m}{2}\left(\frac{m}{2}+1\right)\ldots\left(\frac{m}{2}+i-1\right)\frac{m}{2}\left(\frac{m}{2}+n+i-1\right)}{1.2.3\ldots i\;1.2.3.(n+i)}\,\frac{\alpha^{n+2i}}{(1-\alpha^2)^{\frac{m}{2}+i}}\,F\left(\frac{m}{2}+i,\,1+\frac{m}{2},\,n+i+1,\,\frac{-\alpha^2}{1-\alpha^2}\right),$$

dont l'application le plus souvent et surtout si n est un grand nombre, sera plus aisée que celle de la formule (39).

Mais en partant de la première des formules (27), il sera facile de trouver les développements demandés sous une nouvelle forme. Pour y parvenir, multiplions la formule mentionnée par

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n\left(\frac{a}{r}\right)^n = (1-\chi)^n,$$

ce qui donne un résultat de la forme

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n\left(\frac{a}{r}\right)^n C_n^{(m)} = \vartheta_0^{m,n} - \vartheta_1^{m,n}\chi + \vartheta_2^{m,n}\chi^2 - \ldots$$

On pourrait, il est vrai, représenter les ϑ au moyen de séries procédant suivant les puissances de α^2, mais, pour le calcul numérique, il convient mieux de se servir des formules

$$\vartheta_0^{m,n} = \gamma_0^{m,n},$$

$$\vartheta_1^{m,n} = \gamma_1^{m,n} + \frac{n}{2}\gamma_0^{m,n},$$

$$\vartheta_2^{m,n} = \gamma_2^{m,n} + \frac{n}{2}\gamma_1^{m,n} + \frac{n(n+2)}{2.4}\gamma_0^{m,n},$$

etc.

Maintenant, pour établir le développement

(41) $$\left(\frac{r}{a}\right)^n\left(\frac{a}{r}\right)^n C_n^{(m)} = \sum\sum\left\{V_{s,s'}^{m,n,0} + V_{s,s'}^{m,n,1}\sigma + \ldots\right\}\rho^s\rho'^{s'},$$

on renouvelera les procédés des numéros 74 et 76.

On formera donc les fonctions

$$D_{s,s'}^{m,n} = \vartheta_0^{m,n} L_{s,s'}^{(0)} - \vartheta_1^{m,n} L_{s,s'}^{(1)} + \ldots,$$

ce qui donne d'abord:

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n \left(\frac{a}{r}\right)^n C_n^{(s,m)} = \sum\sum D_{s,s'}^{m,n} \rho^s \rho'^{s'}.$$

Ensuite, si l'on fait:

$$\Gamma_{s,s'}^{m,n,q} = \vartheta_0^{m,n} K_{s,s'}^{0,q} - \vartheta_1^{m,n} K_{s,s'}^{1,q} + \vartheta_2^{m,n} K_{s,s'}^{2,q} + \ldots,$$

on aura, en vertu de l'équation (11),

$$D_{s,s'}^{m,n} = \Gamma_{s,s'}^{m,n,0} + \Gamma_{s,s'}^{m,n,1}\sigma + \Gamma_{s,s'}^{m,n,2}\sigma^2 + \ldots;$$

après quoi l'expression (41) s'obtiendra immédiatement.

Pour obtenir un résultat de la forme

$$(42) \qquad \left(\frac{r}{a}\right)^n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+m} C_n^{(m)} = \sum\sum \left\{ \Omega^m(n, s, s')_{0,0} - \Omega^m(n, s, s')_{1,0}\eta^2 + \ldots \right\} \rho^s \rho'^{s'},$$

il ne nous reste qu'à introduire dans l'équation (41), les valeurs de $\sigma, \sigma^2, \ldots$ données dans le numéro 76, et à multiplier le résultat par

$$\left(\frac{a}{r}\right)^m = \left\{ 1 + \frac{m}{1}\rho' + \frac{m(m-1)}{1.2}\rho'^2 + \ldots \right\} \left\{ 1 + \frac{m}{1}\eta'^2 + \frac{m(m+1)}{1.2}\eta'^4 + \ldots \right\}.$$

82. M. Scheibner, dans un mémoire de l'an 1853, a montré comment on peut exprimer les coefficients du développement de la fonction perturbatrice, tant qu'ils dépendent du rapport α, au moyen des transcendantes β.[1] Dans les numéros précédents, j'ai poursuivi les mêmes intentions, sans les regarder, toutefois, comme l'objet principal de mes transformations. Les procédés du dernier numéro ont abouti à exprimer les fonctions $C_n^{(m)}$ ainsi que leurs produits par $\left(\frac{r}{a}\right)^n \left(\frac{a}{r}\right)^n$, moyennant les transcendantes γ et ϑ, qui

[1] Pour les détails du procédé de M. Scheibner, on consultera son mémoire: Ueber die Berechnung einer Gattung von Functionen, welche bei der Entwicklung der Störungsfunction erscheinen. Gotha 1853.

à leur tour se ramènent, par les équations (6), (27) et (28), aux transcendantes β. Le calcul numérique, si l'on utilise ces dernières formules, est, il est vrai, aisé et conduit aux résultats dont l'exactitude n'est pas amoindrie par l'imperfection des formules, mais ces formules ne permettent, m étant plus grand que l'unité, qu'un calcul de proche en proche. Or, puisqu'il pourra être utile de disposer des règles d'un calcul direct, je vais chercher les expressions s'y rapportant.

En mettant, pour abréger, k_1 à la place de $\alpha \frac{r}{a}\frac{a'}{r'}$, de sorte qu'on a:

$$k_1 = \alpha\sqrt{1-\chi},$$

on parvient facilement à l'expression

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n \left(\frac{a'}{r'}\right)^n C_n^{(m)} = \frac{\alpha^m}{\pi}\int_0^\pi \left\{1 - 2k_1 \cos\xi + k_1^2\right\}^{-\frac{m}{2}} \cos n\xi d\xi.$$

Cette formule, se transformant en vertu d'un théorème bien connu de Jacobi, on en tire:

$$C_n^{(m)} = \frac{m(m+2)\ldots(m+2(n-1))}{1.3\ldots(2n-1)}\frac{\alpha^{m+n}}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{\sin\xi}{\sqrt{1-2k_1\cos\xi+k_1^2}}\right)^{2n} \frac{d\xi}{(1-2k_1\cos\xi+k_1^2)^{\frac{m}{2}}}.$$

Cela étant, si nous employons la substitution de Landen, en posant:

$$\cos\xi = k_1 \sin\varphi^2 + \cos\varphi\sqrt{1-k_1^2\sin\varphi^2},$$

d'où il s'ensuit:

$$\sin\xi = \sin\varphi(\sqrt{1-k_1^2\sin\varphi^2} - k_1\cos\varphi),$$

$$\sqrt{1-2k_1\cos\xi+k_1^2} = \sqrt{1-k_1^2\sin\varphi^2} - k_1\cos\varphi$$

et

$$\frac{d\xi}{\sqrt{1-2k_1\cos\xi+k_1^2}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k_1^2\sin\varphi^2}},$$

la formule précédente devient:

$$(43)\quad C_n^{(m)} = \frac{m(m+2)\ldots(m+2(n-1))}{1.2\ldots(2n-1)}\frac{\alpha^{m+n}}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin\varphi^{2n}\,d\varphi}{\sqrt{1-k_1^2\sin\varphi^2}}\left\{\frac{\sqrt{1-k_1^2\sin\varphi^2}+k_1\cos\varphi}{1-k_1^2}\right\}^{m-1}.$$

Pour m égal à l'unité, on retombe dans l'expression de $C_n^{(1)}$, que nous venons de donner dans le numéro 74.

Considérons ensuite le cas général où m a une valeur impaire et positive, mais d'ailleurs n'importe quelle. Posons $2m+1$ au lieu de m et prêtons attention au fait que tous les termes ayant comme facteur une puissance impaire de $\cos\varphi$ disparaissent par l'intégration. L'expression (43) se met alors sous la forme suivante

$$C_n^{(2m+1)} = \frac{(2m+1)(2m+3)\ldots(2m+2n-1)}{1.3\ldots(2n-1)(1-k_1^2)^{2m}} \frac{2\alpha^{2m+1+n}}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin\varphi^{2n}\, d\varphi}{\sqrt{1-k_1^2\sin\varphi^2}} \Bigg\{ (1-k_1^2\sin\varphi^2)^m$$

$$+ \frac{2m(2m-1)}{1.2}(1-k_1^2\sin\varphi^2)^{m-1} k_1^2\cos\varphi^2 + \ldots \Bigg\}.$$

Il s'agit maintenant d'obtenir le développement suivant les puissances de $-\chi$, car leurs coefficients ne sont autre chose que les transcendantes $\gamma_r^{m,n}$; et puisque les termes sous le signe $\int$ se mettent sous la forme $\frac{\sin\varphi^{2r}}{(1-\alpha^2\sin\varphi^2)^{\frac{s}{2}}}$, ce qui est immédiatement visible, les γ seront exprimés moyennant les β.

En inspectant la formule précédente, on voit tout d'abord que les termes figurant entre les parenthèses sous le signe $\int$ constituent un polynôme fini en χ, du degré m. On aura en effet:

$$\Bigg\{ (1-k_1^2\sin\varphi^2)^m + \frac{2m(2m-1)}{1.2} k_1^2\cos\varphi^2(1-k_1^2\sin\varphi^2)^{m-1} + \ldots \Bigg\}$$

$$= A_0^{(m)} + A_1^{(m)}\chi + A_2^{(m)}\chi^2 + \ldots,$$

si l'on admet les notations

$$A_0^{(m)} = (1-\alpha^2\sin\varphi^2)^m + \frac{2m(2m-1)}{1.2}\alpha^2\cos\varphi^2(1-\alpha^2\sin\varphi^2)^{m-1}$$

$$+ \frac{2m(2m-1)(2m-2)(2m-3)}{1.2.3.4}\alpha^4\cos\varphi^4(1-\alpha^2\sin\varphi^2)^{m-2} + \ldots,$$

$$
\begin{aligned}
A_1^{(m)} = {} & \frac{m}{1}\alpha^2\sin\varphi^2(1-\alpha^2\sin\varphi^2)^{m-1} \\
& + \frac{2m(2m-1)}{1.2}\alpha^2\cos\varphi^2\Big[-(1-\alpha^2\sin\varphi^2)^{m-1} \\
& \qquad\qquad + \frac{m-1}{1}\alpha^2\sin\varphi^2(1-\alpha^2\sin\varphi^2)^{m-2}\Big] \\
& + \frac{2m(2m-1)(2m-2)(2m-3)}{1.2.3.4}\alpha^4\cos\varphi^4\Big[-2(1-\alpha^2\sin\varphi^2)^{m-2} \\
& \qquad\qquad + \frac{m-2}{1}\alpha^2\sin\varphi^2(1-\alpha^2\sin\varphi^2)^{m-3}\Big] \\
& + \ldots,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_2^{(m)} = {} & \frac{m(m-1)}{1.2}\alpha^4\sin\varphi^4(1-\alpha^2\sin\varphi^2)^{m-2} \\
& + \frac{2m(2m-1)}{1.2}\alpha^2\cos\varphi^2\Big[-\frac{m-1}{1}\alpha^2\sin\varphi^2(1-\alpha^2\sin\varphi^2)^{m-2} \\
& \qquad\qquad + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}\alpha^4\sin\varphi^4(1-\alpha^2\sin\varphi^2)^{m-3}\Big] \\
& + \frac{2m(2m-1)(2m-2)(2m-3)}{1.2.3.4}\alpha^4\cos\varphi^4\Big[(1-\alpha^2\sin\varphi^2)^{m-2} \\
& \qquad\qquad - 2\frac{m-2}{1}\alpha^2\sin\varphi^2(1-\alpha^2\sin\varphi^2)^{m-3} \\
& \qquad\qquad + \frac{(m-2)(m-3)}{1.2}\alpha^4\sin\varphi^4(1-\alpha^2\sin\varphi^2)^{m-4}\Big] \\
& + \ldots,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_3^{(m)} = {} & \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\alpha^6\sin\varphi^6(1-\alpha^2\sin\varphi^2)^{m-3} \\
& + \frac{2m(2m-1)}{1.2}\alpha^2\cos\varphi^2\Big[-\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}\alpha^4\sin\varphi^4(1-\alpha^2\sin\varphi^2)^{m-3} \\
& \qquad\qquad + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3}\alpha^6\sin\varphi^6(1-\alpha^2\sin\varphi^2)^{m-4}\Big] \\
& + \frac{2m(2m-1)(2m-2)(2m-3)}{1.2.3.4}\alpha^4\cos\varphi^4\Big[\frac{m-2}{1}\alpha^2\sin\varphi^2(1-\alpha^2\sin\varphi^2)^{m-3} \\
& \qquad\qquad - 2\frac{(m-2)(m-3)}{1.2}\alpha^4\sin\varphi^4(1-\alpha^2\sin\varphi^2)^{m-4} \\
& \qquad\qquad + \frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3}\alpha^6\sin\varphi^6(1-\alpha^2\sin\varphi^2)^{m-5}\Big] \\
& + \ldots,
\end{aligned}
$$

etc.

Après avoir remarqué que la valeur $m = 0$ rend $A_0^{(m)}$ égal à l'unité, ce qui reconduit à la formule (6), nous allons mettre en évidence les formules spéciales des $A^{(m)}$ appartenant aux valeurs $m = 1$ et $m = 2$, les seules que nous aurons occasion de considérer. Les voici :

$$A_0^{(1)} = \quad 1 + \alpha^2 - 2\alpha^2 \sin\varphi^2,$$

$$A_1^{(1)} = -\alpha^2 + 2\alpha^2 \sin\varphi^2,$$

$$A_0^{(2)} = \quad 1 + 6\alpha^2 + \alpha^4 - 8(\alpha^2 + \alpha^4)\sin\varphi^2 + 8\alpha^4 \sin\varphi^4,$$

$$A_1^{(2)} = -6\alpha^2 - 2\alpha^4 + 8(\alpha^2 + 2\alpha^4)\sin\varphi^2 - 16\alpha^4 \sin\varphi^4,$$

$$A_2^{(2)} = \quad \alpha^4 - 8\alpha^4 \sin\varphi^2 + 8\alpha^4 \sin\varphi^4.$$

En introduisant, dans l'expression précédente de $C_n^{(2m+1)}$ les développements des facteurs $\{(1 - k_1^2 \sin\varphi^2)^m + \ldots\}$ que nous venons d'établir, on parviendra facilement au résultat

$$C_n^{(2m+1)} = \frac{(2m+1)(2m+3)\ldots(2m+2n-1)}{1.3.5\ldots(2n-1)(1-k_1^2)^{2m}}\,\alpha^{2m+1+n}\{p_0^{(m)} - p_1^{(m)}\chi + p_2^{(m)}\chi^2 - \ldots\},$$

les $p_i^{(m)}$ étant donnés au moyen des expressions

$$p_0^{(m)} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{A_0^{(m)} \sin\varphi^{2n}\, d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2\sin\varphi^2}},$$

$$p_1^{(m)} = \frac{2}{\pi}\left|\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\alpha^2 A_0^{(m)} \sin\varphi^{2n+2}\, d\varphi}{\{1-\alpha^2\sin\varphi^2\}^{\frac{3}{2}}} - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{A_1^{(m)} \sin\varphi^{2n}\, d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2\sin\varphi^2}}\right|,$$

$$p_2^{(m)} = \frac{2}{\pi}\left|\frac{1.3}{2.4}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\alpha^4 A_0^{(m)} \sin\varphi^{2n+4}\, d\varphi}{\{1-\alpha^2\sin\varphi^2\}^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\alpha^2 A_1^{(m)} \sin\varphi^{2n+2}\, d\varphi}{\{1-\alpha^2\sin\varphi^2\}^{\frac{3}{2}}} + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{A_2^{(m)} \sin\varphi^{2n}\, d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2\sin\varphi^2}}\right|,$$

etc.

Les diverses intégrales entrant dans ces formules s'expriment aisément au moyen des transcendantes ${}_{\prime}\beta_n^{(s)}$: quand m est égal à 1 ou à 2, on déduit facilement les valeurs

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{A_0^{(1)} \sin\varphi^{2n}\, d\varphi}{\{1 - \alpha^2 \sin\varphi^2\}^{\frac{s}{2}}} = (1 + \alpha^2)\,{}_{\prime}\beta_n^{(s)} - 2\alpha^2\,{}_{\prime}\beta_{n+1}^{(s)},$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{A_1^{(1)} \sin\varphi^{2n}\, d\varphi}{\{1 - \alpha^2 \sin\varphi^2\}^{\frac{s}{2}}} = -\alpha^2\,{}_{\prime}\beta_n^{(s)} + 2\alpha^2\,{}_{\prime}\beta_{n+1}^{(s)},$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{A_0^{(2)} \sin\varphi^{2n}\, d\varphi}{\{1 - \alpha^2 \sin\varphi^2\}^{\frac{s}{2}}} = (1 + 6\alpha^2 + \alpha^4)\,{}_{\prime}\beta_n^{(s)} - 8(\alpha^2 + \alpha^4)\,{}_{\prime}\beta_{n+1}^{(s)} + 8\alpha^4\,{}_{\prime}\beta_{n+2}^{(s)},$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{A_1^{(2)} \sin\varphi^{2n}\, d\varphi}{\{1 - \alpha^2 \sin\varphi^2\}^{\frac{s}{2}}} = -2(3\alpha^2 + \alpha^4)\,{}_{\prime}\beta_n^{(s)} + 8(\alpha^2 + 2\alpha^4)\,{}_{\prime}\beta_{n+1}^{(s)} - 16\alpha^4\,{}_{\prime}\beta_{n+2}^{(s)},$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{A_2^{(2)} \sin\varphi^{2n}\, d\varphi}{\{1 - \alpha^2 \sin\varphi^2\}^{\frac{s}{2}}} = \alpha^4\,{}_{\prime}\beta_n^{(s)} - 8\alpha^4\,{}_{\prime}\beta_{n+1}^{(s)} + 8\alpha^4\,{}_{\prime}\beta_{n+2}^{(s)}.$$

On tire de là les expressions

$$p_0^{(1)} = (1 + \alpha^2)\,{}_{\prime}\beta_n^{(1)} - 2\alpha^2\,{}_{\prime}\beta_{n+1}^{(1)},$$

$$p_1^{(1)} = \frac{1}{2}\alpha^2[(1 + \alpha^2)\,{}_{\prime}\beta_{n+1}^{(3)} - 2\alpha^2\,{}_{\prime}\beta_{n+2}^{(3)}] + \alpha^2[{}_{\prime}\beta_n^{(1)} - 2\,{}_{\prime}\beta_{n+1}^{(1)}],$$

$$p_2^{(1)} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\alpha^4[(1 + \alpha^2)\,{}_{\prime}\beta_{n+2}^{(5)} - 2\alpha^2\alpha_{n+3}^{(5)}] + \frac{1}{2}\alpha^4[{}_{\prime}\beta_{n+1}^{(3)} - 2\,{}_{\prime}\beta_{n+2}^{(3)}],$$

$$p_3^{(1)} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\alpha^6[(1 + \alpha^2)\,{}_{\prime}\beta_{n+3}^{(7)} - 2\alpha^2\,{}_{\prime}\beta_{n+4}^{(7)}] + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\alpha^6[{}_{\prime}\beta_{n+2}^{(5)} - 2\,{}_{\prime}\beta_{n+3}^{(5)}],$$

etc.

$$p_0^{(2)} = (1 + 6\alpha^2 + \alpha^4)\beta_n^{(1)} - 8\alpha^2(1 + \alpha^2)\beta_{n+1}^{(1)} + 8\alpha^4\beta_{n+2}^{(1)},$$

$$p_1^{(2)} = \frac{1}{2}\alpha^2[(1 + 6\alpha^2 + \alpha^4)\beta_{n+1}^{(3)} - 8\alpha^2(1 + \alpha^2)\beta_{n+2}^{(3)} + 8\alpha^4\beta_{n+3}^{(3)}]$$

$$+ 2\alpha^2(3 + \alpha^2)\beta_n^{(1)} - 8\alpha^2(1 + 2\alpha^2)\beta_{n+1}^{(1)} + 16\alpha^4\beta_{n+2}^{(1)},$$

$$p_2^{(2)} = \frac{1.3}{2.4}\alpha^4[(1 + 6\alpha^2 + \alpha^4)\beta_{n+2}^{(5)} - 8\alpha^2(1 + \alpha^2)\beta_{n+3}^{(5)} + 8\alpha^4\beta_{n+4}^{(5)}]$$

$$+ \frac{1}{2}\alpha^4[2(3 + \alpha^2)\beta_{n+1}^{(3)} - 8(1 + 2\alpha^2)\beta_{n+2}^{(3)} + 16\alpha^2\beta_{n+3}^{(3)}]$$

$$+ \alpha^4[\beta_n^{(1)} - 8\beta_{n+1}^{(1)} + 8\beta_{n+2}^{(1)}],$$

$$p_3^{(2)} = \frac{1.3.5}{2.4.6}\alpha^6[(1 + 6\alpha^2 + \alpha^4)\beta_{n+3}^{(7)} - 8\alpha^2(1 + \alpha^2)\beta_{n+4}^{(7)} + 8\alpha^4\beta_{n+5}^{(7)}]$$

$$+ \frac{1.3}{2.4}\alpha^6[2(3 + \alpha^2)\beta_{n+2}^{(5)} - 8(1 + 2\alpha^2)\beta_{n+3}^{(5)} + 16\alpha^2\beta_{n+4}^{(5)}]$$

$$+ \frac{1}{2}\alpha^6[\beta_{n+1}^{(3)} - 8\beta_{n+2}^{(3)} + 8\beta_{n+3}^{(3)}],$$

etc.

En introduisant, finalement, dans l'expression précédente de $C_n^{(2m+1)}$, le développement

$$\frac{1}{(1 - k_1^2)^{2m}} = \frac{1}{(1 - a^2)^{2m}}\left\{1 - \frac{2m}{1}\frac{a^2}{1 - a^2}\chi + \frac{2m(2m + 1)}{1.2}\left(\frac{a^2}{1 - a^2}\right)^2\chi^2 - \ldots\right\},$$

on parviendra, après avoir effectué la multiplication des deux séries procédant suivant les puissances de $-\chi$, au développement dont les coefficients sont identiques avec les $\gamma_s^{m,n}$. On aura ainsi :

$$(44)\quad \gamma_s^{2m+1,n} = \frac{(2m + 1)(2m + 3)\ldots(2m + 2n - 1)}{1.3.5\ldots(2n - 1)}\frac{a^{2m+1+n}}{(1 - a^2)^{2m}}\left\{p_s^{(m)} + \frac{2m}{1}\frac{a^2}{1 - a^2}p_{s-1}^{(m)}\right.$$
$$\left. + \frac{2m(2m + 1)}{1.2}\left(\frac{a^2}{1 - a^2}\right)^2 p_{s-2}^{(m)} + \ldots\right\}$$

Telle est l'expression demandée, réduite à la forme la plus simple. On pourra l'employer avantageusement pour vérifier les résultats obtenus, soit par la méthode du n° 79, soit par la formule (39).

83. Disons finalement quelques mots sur les méthodes d'évaluer les transcendantes $\beta_n^{(s)}$. M. MASAL, dans ses tables de la transcendante dont il s'agit, en a donné, il est vrai, les valeurs numériques dans une étendue telle qu'elles suffisent généralement aux demandes du calculateur. Néanmoins, il peut arriver qu'on aura besoin d'autres valeurs de notre transcendante que ne donnent ces tables, ou bien des valeurs calculées avec un plus grand nombre de décimales. Pour de tels cas, voici les formules se prêtant le mieux aux calculs numériques.

En partant de l'équation (5), on déduit les développements bien connus que voici:

$$\beta_n^{(s)} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\left\{1 + \frac{s}{2}\frac{2n+1}{2n+2}\alpha^2 + \frac{s(s+2)}{2.4}\frac{(2n+1)(2n+3)}{(2n+2)(2n+4)}\alpha^4 + \ldots\right\},$$

$$\beta_n^{(s)} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\frac{1}{(1-\alpha^2)^{\frac{s}{2}}}\left\{1 - \frac{s}{2}\frac{1}{2n+2}\beta^2 + \frac{s(s+2)}{2.4}\frac{1.3}{(2n+2)(2n+4)}\beta^4 - \ldots\right\}.$$

Dans le second, on a employé, pour abréger, la notation

$$\beta^2 = \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}.$$

Voilà les formules appropriées au calcul d'une transcendante isolée. Mais il s'agit le plus souvent d'en calculer une suite appartenant aux valeurs consécutives des indices. A cette fin, on remarquera la relation

$$\beta_n^{(s+2)} = \beta_n^{(s)} + \alpha^2\beta_{n+1}^{(s+2)},$$

qui s'obtient facilement par la définition. En appliquant cette formule successivement, on obtiendra celle-ci:

$$\beta_n^{(s+2)} = \beta_n^{(s)} + \alpha^2\beta_{n+1}^{(s)} + \alpha^4\beta_{n+2}^{(s)} + \ldots + \alpha^{2\nu}\beta_{n+\nu}^{(s+2)}.$$

Qu'on fasse attention qu'une erreur affectant les valeurs de $\beta_{n+1}^{(s)}$, $\beta_{n+2}^{(s)}$, ... et de $\beta_{n+\nu}^{(s+2)}$ n'entrera que diminuée dans le résultat du calcul.

On pourra encore signaler la relation suivante entre trois β consécutifs:

$$0 = (2n+1)\beta_n^{(s)} - [2n+2+\alpha^2(2n-s+3)]\beta_{n+1}^{(s)} + \alpha^2[2n-s+4]\beta_{n+2}^{(s)}.$$

Le calcul d'après cette formule est généralement moins aisé, mais on peut la remplacer par une fraction continue servant à calculer, de proche en proche, les rapports de deux transcendantes consécutives.

En introduisant les notations

$$p_n = \frac{\beta_{n+1}^{(s)}}{\beta_n^{(s)}},$$

$$\lambda_n = \frac{2n + 1}{2n + 2 + \alpha^2(2n - s + 3)},$$

$$\vartheta_n = \frac{p_n}{\lambda_n},$$

$$f_n = \alpha^2 \frac{2n - s + 4}{2n + 1} \lambda_n \lambda_{n+1},$$

on obtiendra de la relation signalée celle-ci:

$$1 = \vartheta_n - f_n \vartheta_n \vartheta_{n+1}$$

qui s'écrit aussi de la manière suivante:

$$\vartheta_n = \frac{1}{1 - f_n \vartheta_{n+1}}.$$

De cette formule découle immédiatement la fraction continue que voici:

$$\vartheta_n = \cfrac{1}{1 - \cfrac{f_n}{1 - \cfrac{f_{n+1}}{1 \quad \cdots \quad \cfrac{f_{n+\nu-1}}{1 - f_{n+\nu} \vartheta_{n+\nu+1}}}}},$$

dont l'application numérique est souvent très avantageuse. On peut encore y remarquer que, pour de grandes valeurs de n, ϑ_n tend vers la limite $1 + \alpha^2$.

C'est là l'algorithme introduit par Hansen qui s'est servi, d'ailleurs, dans le cas où la fraction mentionnée cesse de converger suffisamment, des recherches de Gauss sur la série hypergéométrique.

A peine est-il nécessaire de rappeler que quelquesunes des transcendantes $\beta_n^{(s)}$ s'expriment, d'une manière très simple, moyennant les intégrales ellip-

tiques complètes de la première et de la deuxième éspèce. Mais il ne faut pas passer sous silence que M. HARZER, dans son mémoire »Untersuchungen über einen speciellen Fall der drei Körper» que nous venons de citer, a employé, en suivant une remarque de M. BRUNS, la méthode des quadratures numériques pour le calcul des transcendantes β. Dans certains cas, cette méthode paraît, en effet, supérieure aux méthodes purement analytiques.

Quant aux transcendantes γ, on remarquera encore le rapport entre celles-là et les coefficients du développement

$$\{1 - 2\alpha \cos H + \alpha^2\}^{-\frac{m}{2}} = \frac{1}{2}\mathcal{B}^{(0)}_{\frac{m}{2}} + \sum \mathcal{B}^{(n)}_{\frac{m}{2}} \cos nH$$

On a d'abord:

$$\frac{1}{2}\mathcal{B}^{(n)}_{\frac{m}{2}} = \frac{\frac{m}{2}\left(\frac{m}{2}+1\right)\ldots\left(\frac{m}{2}+n-1\right)}{1\,.\,2\ldots n}\alpha^n \Bigg\{1 + \frac{\frac{m}{2}}{1}\frac{\left(\frac{m}{2}+n\right)}{n+1}\alpha^2$$
$$+ \frac{\frac{m}{2}\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1\,.\,2}\frac{\left(\frac{m}{2}+n\right)\left(\frac{m}{2}+n+1\right)}{(n+1)(n+2)}\alpha^4 + \ldots\Bigg\},$$

d'où l'on conclut, en comparant cette expression avec l'équation (39), l'égalité

$$\frac{1}{\alpha^m}\gamma_0^{m,n} = \frac{1}{2}\mathcal{B}^{(n)}_{\frac{m}{2}}.$$

Les $\gamma_i^{m,n}$ s'expriment moyennant les dérivées des transcendantes $\mathcal{B}^{(n)}_{\frac{m}{2}}$. Je ne m'y arrête cependant pas, vu que les relations entre ces deux genres de transcendantes ne nous seront pas utiles dans la suite, et qu'elles ne sont pas assez simples. Quant à une propriété importante des dérivées mentionnées, il y a toutefois lieu de consulter les notes de M. M. TISSERAND, CALLANDREAU et DARBOUX, toutes les trois insérées dans le tome XC des comptes rendus de l'académie des sciences de Paris.

84. Si l'on avait calculé la transcendante β avec une valeur de α non parfaitement exacte, et qu'on eût obtenu en conséquence un résultat un peu erroné, il serait avantageux, pour parvenir à la valeur exacte, d'employer des formules donnant la correction due à l'incrément de α, au

lieu de refaire le calcul en entier. On déduit une telle formule de correction tout facilement en différentiant l'équation (5). Il s'ensuivra:

$$\frac{d\,{}_l\beta_n^{(s)}}{d\alpha} = s\alpha\,{}_l\beta_{n+1}^{(s+2)}$$

Or, en désignant par $\Delta\alpha$ et $\Delta\,{}_l\beta_n^{(s)}$ les incréments de α et de ${}_l\beta_n^{(s)}$, et en admettant la notation

$$\delta = \frac{\Delta\alpha}{\alpha},$$

on aura:

$$\Delta\,{}_l\beta_n^{(s)} = s\alpha^2\,{}_l\beta_{n+1}^{(s+2)}\,\delta$$

On peut encore signaler la formule

$$\Delta\gamma_s^{1,n} = \frac{1\,.\,3\,.\,.\,.\,(2s-1)}{2\,.\,4\,.\,.\,.\,2s}\,\alpha^{n+2s+1}\left\{(n+2s+1)\,{}_l\beta_{n+s}^{(2s+1)} + (2s+1)\,\alpha^2\,{}_l\beta_{n+s+1}^{(2s+3)}\right\}\delta$$

$$-\left\{(n+2s+1)\,\gamma_s^{1,n} + (2s+2)\,\gamma_{s+1}^{1,n}\right\}\delta,$$

où $\Delta\gamma_s^{1,n}$ signifie la correction de $\gamma_s^{1,n}$ due à l'incrément de α.

Quant aux $\gamma_s^{m,n}$, m ayant une valeur plus grande que l'unité, on obtiendra facilement, en différentiant la formule (44), la correction à ajouter aux valeurs préalablement calculées. Il ne paraît pas, cependant, nécessaire de mettre en évidence, à cette occasion, l'expression de cette correction, vu que sa forme analytique est sans intérêt.

Quant au calcul des corrections dont il s'agit on pourra aussi utiliser les tables de M. Wellmann publiées dans les »astronomische Nachrichten» n° 3040.

Finalement, en différentiant l'équation (24), on aura l'expression de l'incrément des coefficients $\Omega(n\,,\,s\,,\,s')_{\nu,\nu'}$ dû à l'erreur de α.

CHAPITRE III.

Exposition détaillée du calcul des coefficients du développement de la fonction perturbatrice ainsi que de ses dérivées partielles.

85. Les équations différentielles que nous allons traiter dans le livre prochain contiennent, dès l'abord, des termes dépendant des quatre dérivées partielles $D_v \Omega$, $\frac{\partial \Omega}{\partial r}$, $\frac{\partial \Omega}{\partial \mathrm{v}}$ et $\frac{\partial \Omega}{\partial z}$. Mais au lieu des trois dernières dérivées, nous verrons toutefois apparaître, par les transformations successives, les produits suivants:

$$(1) \qquad P = \frac{r^2}{(r)} \frac{a \partial \Omega}{\partial r},$$

$$(2) \qquad Q = \frac{r^2}{(r)} \frac{\partial \Omega}{\partial \mathrm{v}},$$

$$(3) \qquad R = \frac{r^2}{(r)} \frac{\partial \Omega}{\partial \mathrm{h}},$$

desquels il convient de chercher, immédiatement, les développements.

Il est bon de rappeler tout d'abord l'équation (25) du n° 67, en vertu de laquelle on écrira, au lieu de l'expression (1), celle-ci:

$$(1') \qquad P = -\frac{a}{\mu} \frac{\partial \Omega}{\partial \rho}.$$

En outre, si nous considérons la relation

$$\frac{r^2}{(r)} = \frac{a(1 - \eta^2)}{\mu(1 + \rho)^2},$$

nous pouvons remplacer les formules (2) et (3) par les suivantes:

$$(2') \qquad Q = \frac{a(1 - \eta^2)}{\mu(1 + \rho)^2} \frac{\partial \Omega}{\partial \mathrm{v}},$$

$$(3') \qquad R = \frac{a(1 - \eta^2)}{\mu(1 + \rho)^2} \frac{\partial \Omega}{\partial \mathrm{h}}.$$

Les dérivées partielles entrant dans les formules (1), (2), (3) ainsi que dans (1′), (2′), (3′), s'obtiennent de deux manières différentes: ou moyennant des différentiations directes, ou en employant les valeurs

(4) $$r\frac{\partial\Omega}{\partial r} = -\mu'\frac{r^2}{\Delta^3} + \mu' r r'\left\{\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right\}\cos H,$$

(5) $$\frac{\partial\Omega}{\partial \mathrm{v}} = \mu' r r'\left\{\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right\}\frac{\partial\cos H}{\partial \mathrm{v}},$$

(6) $$\frac{\partial\Omega}{\partial \mathrm{h}} = \mu' r r'\left\{\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right\}.$$

Evidemment, de ces formules, les deux premières s'écrivent aussi de la manière suivante:

(4′) $$r\frac{\partial\Omega}{\partial r} = -\mu'\frac{r^2}{\Delta^3} + \frac{\partial\Omega}{\partial \mathrm{h}}\cos H,$$

(5′) $$\frac{\partial\Omega}{\partial \mathrm{v}} = \frac{\partial\Omega}{\partial \mathrm{h}}\frac{\partial\cos H}{\partial \mathrm{v}}.$$

Avec les expressions signalées, on aura facilement celles-ci:

(1″) $$\mathrm{P} = -\frac{\mu' a}{(c)}\frac{r^3}{\Delta^3} + \frac{\mu' a}{(c)}r^2 r'\left\{\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right\}\cos H,$$

(2″) $$\mathrm{Q} = \frac{\mu' r}{(c)}r^2 r'\left\{\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right\}\frac{\partial\cos H}{\partial \mathrm{v}},$$

(3″) $$\mathrm{R} = \frac{\mu' r}{(c)}r^2 r'\left\{\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right\},$$

dont les deux premières se mettent sous la forme

(1‴) $$\mathrm{P} = -\frac{\mu' a}{(c)}\frac{r^3}{\Delta^3} + \frac{a}{r}\mathrm{R}\cos H,$$

(2‴) $$\mathrm{Q} = \mathrm{R}\frac{\partial\cos H}{\partial \mathrm{v}}.$$

En introduisant, dans ces formules, le développement (1) du dernier chapitre, nous trouverons les trois fonctions P, Q, R développées suivant

les cosinus des multiples de H, l'expression de la fonction Q toutefois renfermant le facteur $\frac{\partial \cos H}{\partial \mathrm{v}}$, qui se remplace facilement par une fonction de v et v′, en vertu de l'équation

$$\frac{\partial \cos H}{\partial \mathrm{v}} = - \sin(\mathrm{v} - \mathrm{v}') + \frac{\partial \mathrm{h}}{\partial \mathrm{v}}$$

Mais les séries obtenues de la sorte, on les doit convertir en d'autres ayant pour arguments v et v′ au lieu de H. Dans ce but, on pourra employer deux procédés différents: soit la substitution des expressions des $\cos nH$ que nous avons mis en évidence dans le deuxième chapitre du livre précédent, soit le développement suivant les puissances de h, développement que nous avons entamé pareillement dans le chapitre mentionné. Il peut se présenter des cas, il est vrai, où ce développement n'est pas toujours convergent, mais lorsqu'il s'agit des planètes principales, nous admettons que ce cas n'aviendra pas. Au reste, quant à la légitimité de cette hypothèse, il y a lieu de rapprocher du commencement du chapitre précédent, ce que vient d'élucider M. Tisserand dans son mémoire inséré dans le tome XV des annales de l'observatoire de Paris.

Supposons donc qu'on ait développé, dès le début, la fonction perturbatrice de la manière suivante:

$$\frac{a}{\mu}\,\Omega = W_0 + W_1 \mathrm{h} + W_2 \mathrm{h}^2 + \dots, \tag{7}$$

W_0 étant ce que devient $\frac{a}{\mu}\,\Omega$ quand on y met $\mathrm{v} - \mathrm{v}' = \mathrm{w}$ à la place de H, et les autres W_m, les expressions des fonctions W_m du n° 68 qu'on obtient en partant de la valeur indiquée de W_0.

Or, en posant, conformément à l'équation (35) du n° 69,

$$W_m = W_0^{(m)} + 2\,W_1^{(m)} \cos \mathrm{w} + 2\,W_2^{(m)} \cos 2\mathrm{w} + \dots, \tag{8}$$

on trouvera:

$$\frac{\partial W_m}{\partial \rho} = \frac{\partial W_0^{(m)}}{\partial \rho} + 2\,\frac{\partial W_1^{(m)}}{\partial \rho} \cos \mathrm{w} + \dots, \tag{9}$$

$$\frac{\partial W_m}{\partial \mathrm{v}} = - 2\,W_1^{(m)} \sin \mathrm{w} - 4\,W_2^{(m)} \sin 2\mathrm{w} - \dots. \tag{10}$$

Cela étant, si l'on admet les développements

$$(11)\qquad \begin{cases} P = P^{(0)} + P^{(1)}\mathrm{h} + P^{(2)}\mathrm{h}^2 + \ldots, \\ Q = Q^{(0)} + Q^{(1)}\mathrm{h} + Q^{(2)}\mathrm{h}^2 + \ldots + R\dfrac{\partial \mathrm{h}}{\partial v}, \\ R = R^{(0)} + R^{(1)}\mathrm{h} + R^{(2)}\mathrm{h}^2 + \ldots, \end{cases}$$

on obtiendra:

$$(12)\qquad \begin{cases} \dfrac{\mu}{\mu} P^{(m)} = -\left\{ \dfrac{\partial W_0^{(m)}}{\partial \rho} + 2\dfrac{\partial W_1^{(m)}}{\partial \rho}\cos \mathrm{w} + 2\dfrac{\partial W_2^{(m)}}{\partial \rho}\cos 2\mathrm{w} + \ldots \right\}, \\ \dfrac{\mu}{\mu} Q^{(m)} = -\dfrac{1-\eta^2}{(1+\rho)^2}\left\{ 2W_1^{(m)}\sin \mathrm{w} + 4W_2^{(m)}\sin 2\mathrm{w} + \ldots \right\}, \\ \dfrac{\mu}{\mu} R^{(m)} = (m+1)\dfrac{1-\eta^2}{(1+\rho)^2}\left\{ W_0^{(m+1)} + 2W_1^{(m+1)}\cos \mathrm{w} + 2W_2^{(m+1)}\cos 2\mathrm{w} + \ldots \right\} \end{cases}$$

Déja dans le n° 70, j'ai prévenu le lecteur, que la fonction totale Ω sera développée suivant les puissances de ξ et ξ', en sorte que ce développement aura la forme de l'équation (40) du numéro cité. En conséquence, il faut représenter les fonctions W_m, $P^{(m)}$, $Q^{(m)}$, $R^{(m)}$ au moyen de pareils développements. Soit maintenant M une de ces fonctions, on aura, conformément à l'équation que nous venons de mentionner, un résultat de la forme

$$(13)\qquad \begin{aligned} M = M_{0,0} &+ (1-\eta^2)M_{1,0}\xi + \ldots \\ &+ (1-\eta'^2)M_{0,1}\xi' + \ldots \\ &+ \ldots \end{aligned}$$

et on comprend sur-le-champ que les divers $M_{k,k'}$ s'obtiennent moyennant la formule générale

$$(14)\qquad M_{k,k'} = \frac{1}{1.2\ldots k.1\ldots k'}\frac{\partial^{k+k'} M_{0,0}}{\partial(\rho)^k\partial(\rho')^{k'}}$$

Les différentiations demandées s'effectuant aisément, il n'y a pas de difficulté quant à la formation des coefficients du développement (13). La fonction $M_{0,0}$ finalement, n'est autre chose que ce que devient M lorsqu'on y change ρ et ρ' en (ρ) et (ρ').

86. Supposons maintenant que les $M_{k,k'}$ soient mis sous la forme des équations (14) et (42) du chapitre précédent. Nous écrivons alors:

$$(15) \quad M_{k,k'} = \sum\sum \{ M^{m}(k, k', n, s, s')_{0,0} - M^{m}(k, k', n, s, s')_{1,0}\eta^2 + \dots + M^{m}(k, k', n, s, s')_{0,1}\eta'^2 - \dots + \dots \} (\rho)^s (\rho')^{s'},$$

où les $M^{(m)}(k, k', n, s, s')_{\nu,\nu'}$ désignent des coefficients dépendant de nombres entiers ainsi que des transcendantes γ ou ϑ.

En premier lieu, nous allons admettre:

$$M_{0,0} = W_0,$$

W_0 signifiant la valeur de $\frac{a}{\mu}\Omega$, en y supposant h, ξ et ξ' égaux à zéro. Nous aurons alors, en supprimant les indices m, k et k', tous les trois étant égaux à zéro,

$$(16) \quad W_n^{(0)} = \sum\sum \{ \Omega(n, s, s')_{0,0} - \Omega(n, s, s')_{1,0}\eta^2 + \dots \} (\rho)^s (\rho')^{s'},$$

la fonction totale W_0 étant donnée par l'équation (8).

Il s'ensuit de la formule signalée la suivante:

$$\frac{\partial W_n^{(0)}}{\partial(\rho)} = \sum\sum (s+1) \{ \Omega(n, s+1, s')_{0,0} - \Omega(n, s+1, s')_{1,0}\eta^2 + \dots + \Omega(n, s+1, s')_{0,1}\eta'^2 - \dots + \dots \} (\rho)^s (\rho')^{s'}.$$

Cela étant, si nous admettons la notation

$$(17) \quad \frac{\mu}{\mu'} P_n^{(0)} = -\sum\sum \{ P(n, s, s')_{0,0} - P(n, s, s')_{1,0}\eta^2 + \dots + \dots \} (\rho)^s (\rho')^{s'},$$

nous aurons, en comparant les deux derniers développements avec la première des équations (12),

$$(18) \quad P(n, s, s')_{\nu,\nu'} = (s+1) \{ \Omega(n, s+1, s')_{\nu,\nu'} + \Omega(n, s+1, s')_{\nu-1,\nu'} \}.$$

Reprenons ensuite l'équation (34) du chapitre précédent. En y mettant (ρ) et (ρ') au lieu de ρ et ρ' nous aurons

$$(19)\qquad W_n^{(m)} = \sum\sum\left\{ Y^m(n\,,\,s\,,\,s')_{0,0} - Y^m(n\,,\,s\,,\,s')_{1,0}\eta^2 + \dots\right\}(\rho)^s(\rho')^{s'},$$

équation d'où dérive la formule (16), en mettant dans celle-là m égal à zéro.

Par la formule (35) du n° 80, les coefficients $Y^m(n\,,\,s\,,\,s')_{\nu,\nu'}$ sont exprimés moyennant des séries procédant suivant les fonctions $\Omega(n+m+2p\,,\,s\,,\,s')_{\nu,\nu'}$, p ayant successivement les valeurs des nombres entiers, à partir de p égal à zéro. Mais bien que les séries mentionnées soient toujours convergentes, cette convergence peut être extrêmement lente, d'où naît la nécessité de chercher d'autres expressions représentant les coefficients dont il s'agit. Dans ce but, écrivons l'équation (42) du n° 81 de la manière suivante:

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n\left(\frac{a}{r}\right)^{n+2m+1} C_n^{(2m+1)} = \sum\sum\left\{\Omega^m(n\,,\,s\,,\,s')_{0,0} - \Omega^m(n\,,\,s\,,\,s')_{1,0}\eta^2 + \right.$$
$$+\ \Omega^m(n\,,\,s\,,\,s')_{0,1}\eta'^2 - \dots$$
$$\left. + \dots\right\}\rho^s\rho'^{s'},$$

ce qui revient à donner à l'indice m, dans les termes du membre droit, une signification un peu modifiée. En introduisant cette valeur dans l'équation (36) du n° 80, on obtiendra l'expression que voici:

$$W_n^{(m)} = \frac{1.3\dots(2m-1)}{1.2\dots m}\frac{1}{a^m}\left(\frac{1-\eta^2}{1+\rho}\right)^m\left(\frac{1-\eta'^2}{1+\rho'}\right)^m$$
$$\times \sum\sum\left\{\Omega^m(n\,,\,s\,,\,s')_{0,0} - \Omega^m(n\,,\,s\,,\,s')_{1,0}\eta^2 + \dots\right\}\rho^s\rho'^{s'}.$$

En effectuant la multiplication par

$$\left(\frac{1-\eta^2}{1+\rho}\right)^m\left(\frac{1-\eta'^2}{1+\rho'}\right)^m$$

$$= \left\{1 - m\eta^2 + \frac{m(m-1)}{1.2}\eta^4 - \dots\right\}\left\{1 - m\eta'^2 + \frac{m(m-1)}{1.2}\eta'^4 - \dots\right\}$$

$$\times\left\{1 - m\rho + \frac{m(m+1)}{1.2}\rho^2 - \dots\right\}\left\{1 - m\rho' + \frac{m(m+1)}{1.2}\rho'^2 - \dots\right\},$$

et en comparant le résultat, après y avoir mis (ρ) et (ρ') au lieu de ρ et ρ', avec l'équation (19), on sera conduit à la formule générale:

$$
\begin{aligned}
(20)\quad Y^m(n,s,s')_{\nu,\nu'} = {} & \frac{1.3\ldots(2m-1)}{1.2\ldots m}\frac{1}{a^m} \\
\times \Big\{ & \Omega^m(n,s,s')_{\nu,\nu'} - m\Omega^m(n,s-1,s')_{\nu,\nu'} - m\Omega^m(n,s,s'-1)_{\nu,\nu'} \\
& + \frac{m(m+1)}{1.2}\Omega^m(n,s-2,s')_{\nu,\nu'} + mm\Omega^m(n,s-1,s'-1)_{\nu,\nu'} \\
& + \frac{m(m+1)}{1.2}\Omega^m(n,s,s'-2)_{\nu,\nu'} - \ldots \\
& + m\Big[\Omega^m(n,s,s')_{\nu-1,\nu'} - m\Omega^m(n,s-1,s')_{\nu-1,\nu'} \\
& \qquad - m\Omega^m(n,s,s'-1)_{\nu-1,\nu'} \\
& + \frac{m(m+1)}{1.2}\Omega^m(n,s-2,s')_{\nu-1,\nu'} + \ldots\Big] \\
& - m\left[\Omega^m(n,s,s')_{\nu,\nu'-1} - m\Omega^m(n,s-1,s')_{\nu,\nu'-1} - \ldots\right] \\
& + \frac{m(m-1)}{1.2}\left[\Omega^m(n,s,s')_{\nu-2,\nu'} - m\Omega^m(n,s-1,s')_{\nu-2,\nu'} - \ldots\right] \\
& + \ldots \Big\}.
\end{aligned}
$$

Cette formule étant de la même nature que celles que nous allons déduire prochainement, je trouve convenable de l'insérer à cette place, bien qu'elle appartienne aussi au n° 80.

87. Mettons, maintenant, en évidence les coefficients du développement des trois fonctions que nous avons définies par les équations (12)

D'abord, si nous différentions, par rapport à (ρ), l'équation (19), il viendra:

$$
\frac{\partial H_n^{(m)}}{\partial(\rho)} = \sum\sum(s+1)\Big\{Y^m(n,s+1,s')_{0,0} - Y^m(n,s+1,s')_{1,0}\eta^2 + \\
+ \ldots\Big\}(\rho)^s(\rho')^{s'},
$$

résultat d'où l'on tire, après avoir établi l'équation

$$(21) \qquad \frac{\mu}{\mu} P_n^{(m)} = \sum\sum \{ P^m(n, s, s')_{0,0} - P^m(n, s, s')_{1,0}\eta^2 + \ldots$$
$$+ \ldots \} (\rho)^s (\rho')^{s'},$$

la formule que voici:

$$(22) \qquad P^m(n, s, s')_{\nu,\nu} = (s+1)\{ \Gamma^m(n, s+1, s')_{\nu,\nu} + \Gamma^m(n, s+1, s')_{\nu+1,\nu} \}.$$

Qu'on remarque l'analogie, avec la formule (18), de l'équation que nous venons d'obtenir et qui, du reste, revient à celle-là, si l'on fait m égal à zéro. On s'en convainc facilement, en considérant l'équation (35) du n° 80 ainsi que les expressions des coefficients $T_{\nu+2r}^{m,\nu}$ que nous avons données dans le n° 69. Il en résulte, en effet, l'égalité

$$\Gamma^0(n, s, s')_{\nu,\nu} = \Omega(n, s, s')_{\nu,\nu}$$

Admettons ensuite:

$$(23) \qquad \frac{\mu}{\mu} Q_n^{(m)} = - n\sum\sum \{ Q^m(n, s, s')_{0,0} - Q^m(n, s, s')_{1,0}\eta^2 \ldots$$
$$+ \ldots \} (\rho)^s (\rho')^{s'},$$

et nous aurons, en consultant la seconde des équations (12), ainsi que l'équation (19), la formule

$$(24) \quad Q^m(n,s,s')_{\nu,\nu} = \Gamma^m(n,s,s')_{\nu,\nu} - 2\Gamma^m(n,s-1,s')_{\nu,\nu} + 3\Gamma^m(n,s-2,s')_{\nu,\nu} - \ldots$$
$$\pm (s+1)\Gamma^m(n,0,s')_{\nu,\nu}$$
$$+ \Gamma^m(n,s,s')_{\nu+1,\nu} - 2\Gamma^m(n,s-1,s')_{\nu+1,\nu} + 3\Gamma^m(n,s-2,s')_{\nu+1,\nu} - \ldots$$
$$\pm (s+1)\Gamma^m(n,0,s')_{\nu+1,\nu}.$$

Finalement, si nous posons:

$$(25) \qquad \frac{\mu}{\mu} R_n^{(m)} = (m+1)\sum\sum \{ R^m(n, s, s')_{0,0} - R^m(n, s, s')_{1,0}\eta^2 + \ldots$$
$$+ \ldots \} (\rho)^s (\rho')^{s'},$$

la comparaison de cette formule avec la troisième des équations (12) et avec l'équation (19) nous conduira à l'expression suivante:

$$(26)\qquad \begin{aligned} R^{(m)}(n,s,s')_{\nu,\nu'} = {} & P^{(m+1)}(n,s,s')_{\nu,\nu'} - 2P^{(m+1)}(n,s-1,s')_{\nu,\nu'} \\ & + 3P^{(m+1)}(n,s-2,s')_{\nu,\nu'} - \ldots \\ & \pm (s+1)P^{(m+1)}(n,0,s')_{\nu,\nu'} \\ & + P^{(m+1)}(n,s,s')_{\nu-1,\nu'} - 2P^{(m+1)}(n,s-1,s')_{\nu-1,\nu'} \\ & + 3P^{(m+1)}(n,s-2,s')_{\nu-1,\nu'} - \ldots \\ & \pm (s+1)P^{(m+1)}(n,0,s')_{\nu-1,\nu'}. \end{aligned}$$

On conclut encore, en vertu des formules (24) et (26), la relation

$$(27)\qquad R^{(m)}(n,s,s')_{\nu,\nu'} = Q^{(m+1)}(n,s,s')_{\nu,\nu'};$$

une autre relation du même genre s'obtient en comparant les formules (22) et (24). La voici:

$$(28)\qquad \begin{aligned} Q^{(m)}(n,s,s')_{\nu,\nu'} = {} & \frac{1}{s}P^{(m)}(n,s-1,s')_{\nu,\nu'} - \frac{2}{s-1}P^{(m)}(n,s-2,s')_{\nu,\nu'} \\ & + \frac{3}{s-2}P^{(m)}(n,s-3,s')_{\nu,\nu'} - \ldots \\ & \mp sP(n,0,s')_{\nu,\nu'} \pm (s+1)Q^{(m)}(n,0,s')_{\nu,\nu'}. \end{aligned}$$

Evidemment, par $P_n^{(m)}$, $Q_n^{(m)}$ et $R_n^{(m)}$ nous avons désigné les coefficients du développement, suivant les multiples de w, des fonctions $(1-\eta^2)P^{(m)}$, $Q^{(m)}$ et $R^{(m)}$, en sorte que nous avons, au lieu des équations (12), les suivantes:

$$(29)\qquad \left|\begin{aligned} (1-\eta^2)P^{(m)} &= P_0^{(m)} + 2P_1^{(m)}\cos w + 2P_2^{(m)}\cos 2w + \ldots, \\ Q^{(m)} &= 2Q_1^{(m)}\sin w + 2Q_2^{(m)}\sin 2w + \ldots, \\ R^{(m)} &= R_0^{(m)} + 2R_1^{(m)}\cos w + 2R_2^{(m)}\cos 2w + \ldots \end{aligned}\right.$$

Il faut encore remarquer qu'on pourra identifier la fonction $M_{0,0}$ de l'équation (13) avec les $P_n^{(m)}$, $Q_n^{(m)}$ et $R_n^{(m)}$, après quoi on déduira les fonctions $M_{k,k'}$, y correspondant, en utilisant la formule (14).

88. Les développements que nous venons d'effectuer, dans le chapitre précédent, et dont les coefficients sont des fonctions des transcendantes γ ou ϑ, se rapportent seulement à la partie principale de la fonction perturbatrice, c'est à dire au terme $\frac{a}{\Delta}$ entrant dans l'expression de $\frac{a}{\mu}\Omega$. Pour rendre complets les développements mentionnés, il faut, au terme déjà considéré, ajouter celui-ci:

$$-\frac{ar}{r'^2}\cos H = -\frac{ar}{r'^2}(\cos \mathrm{w} + \mathrm{h}),$$

supposant toutefois qu'il s'agisse de l'influence de la planète extérieure sur la planète inférieure. Dans le cas opposé, nous désignerons la fonction perturbatrice par Ω' et nous mettrons μ'_k à la place de μ', μ'_k étant ce que devient μ' quand on change la masse m_l de la planète extérieure en celle, m_k, de la planète inférieure. Nous aurons alors:

$$\frac{a'}{\mu'_k}\Omega' = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{a}{\Delta}\right) - \frac{a\,r}{r^2}\cos H. \tag{30}$$

Occupons-nous d'abord du premier cas.

En remarquant l'identité

$$\frac{ar}{r'^2}\cos H = \alpha^2\frac{r}{a}\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\cos H,$$

on aperçoit facilement qu'il suffira, afin de tenir compte du terme indépendant de Δ, de remplacer, dans l'expression de $\frac{a}{\mu}\Omega$ donnée par l'équation (1) du n° 74, la fonction $C_1^{(1)}$ par $C_1^{(1)} - \frac{1}{2}\alpha^2$, ce qui, en vertu de l'équation (7) du numéro cité, revient à remplacer $\gamma_0^{1,1}$ par $\gamma_0^{1,1} - \frac{1}{2}\alpha^2$.

Les incréments à ajouter aux coefficients $\Omega(1\,,\,s\,,\,s')_{\nu,\nu'}$ s'obtiennent facilement au moyen de l'équation (24) du n° 78. En effet, si l'on y met $-\frac{1}{2}\alpha^2$ au lieu de $\gamma_0^{1,1}$, et qu'on désigne l'incrément dont il s'agit par $\Delta\Omega(1\,,\,s\,,\,s')_{\nu,\nu'}$, il résultera:

$$\Delta\Omega(1\,,\,s\,,\,s')_{\nu,\nu'} = -\frac{1}{2}\alpha^2 H^{1,0}_{s,\nu,\nu'}. \tag{31}$$

Quand on a déterminé cet incrément, il sera facile, en utilisant les équations (18) et (24), d'obtenir les expressions des quantités qu'on doit ajouter aux coefficients $P(1, s, s')_{\nu,\nu'}$ et $Q(1, s, s')_{\nu,\nu'}$ communs aux développements, tant des fonctions $(1-\eta^2)P$ et Q suivant les multiples de H, que des fonctions $(1-\eta^2)P^{(0)}$ et $Q^{(0)}$ suivant les multiples de w. Mais quant à l'incrément de la fonction R, dû à la seconde partie de la fonction perturbatrice, il est visible qu'il s'exprime moyennant la formule

$$\frac{\mu}{\mu'}\Delta R = -\frac{\mu r^3}{(c)\, r'^2} = -\alpha^2\left(\frac{1-\eta^2}{1-\eta'^2}\right)^2\frac{(1+\rho')^2}{(1+\rho)^3}. \tag{32}$$

Donc, si l'on avait développé la partie principale de $\frac{\mu}{\mu'}R$ suivant les multiples de H, seulement le terme indépendant de H aurait été altéré par la seconde partie.

En développant le second membre de l'équation (32), il résultera

$$\begin{aligned}\frac{\mu}{\mu'}\Delta R = -\alpha^2(1+\sigma)\{1 &- 3\rho + 2\rho' \\ &+ 6\rho^2 - 6\rho\rho' + \rho'^2 \\ &- 10\rho^3 + 12\rho^2\rho' - 3\rho\rho'^2 \\ &+ 15\rho^4 - 20\rho^3\rho' + 6\rho^2\rho'^2 \\ &- 21\rho^5 + 30\rho^4\rho' - 10\rho^3\rho'^2 + \ldots\},\end{aligned} \tag{33}$$

σ étant la fonction $-1+\left(\frac{1-\eta^2}{1-\eta'^2}\right)^2$, dont nous avons donné, dans le n° 76, le développement suivant les puissances de η^2 et de η'^2.

L'expression de ΔR est donc ramenée à la même forme que celle des fonctions $P_n^{(m)}$, $Q_n^{(m)}$ et $R_n^{(m)}$, et on comprend que seulement la fonction $R_0^{(0)}$ est altérée par l'incrément ΔR.

On peut encore remarquer que les incréments ΔP et ΔQ s'expriment aisément au moyen de l'incrément ΔR. On tire, en effet, des équations (1‴) et (2‴) les expressions suivantes:

$$\left\{\begin{aligned}(1-\eta^2)\Delta P &= (1+\rho)\Delta R\cos H, \\ \Delta Q &= \Delta R\frac{\partial \cos H}{\partial v}.\end{aligned}\right. \tag{34}$$

89. Le cas où la planète dont il s'agit de déterminer le mouvement, est plus éloignée du soleil que la planète sollicitante, exige quelques remarques ultérieures. Fixons avant tout les notations

$$(35)\qquad \begin{cases} P' = \dfrac{r'^2 a}{(c')}\dfrac{\partial\Omega}{\partial r}, \\[2ex] Q' = \dfrac{r'^2}{(c')}\dfrac{\partial\Omega}{\partial v}, \\[2ex] R' = \dfrac{r'^2}{(c')}\dfrac{\partial\Omega}{\partial h}. \end{cases}$$

De ces équations, tout analogues avec les équations (1), (2), (3), découlent les suivantes, analogues aux équations (1″), (2″), (3″),

$$(35')\qquad \begin{cases} P' = -\dfrac{\mu'_k a}{(c')}\dfrac{r'^3}{\Delta^3} + \dfrac{\mu'_k a}{(c')}\, rr'^2\left\{\dfrac{1}{\Delta^3} - \dfrac{1}{r^3}\right\}\cos H, \\[2ex] Q' = \dfrac{\mu'_k r}{(c')}\, rr'^2\left\{\dfrac{1}{\Delta^3} - \dfrac{1}{r^3}\right\}\dfrac{\partial \cos H}{\partial v}, \\[2ex] R' = \dfrac{\mu'_k r}{(c')}\, rr'^2\left\{\dfrac{1}{\Delta^3} - \dfrac{1}{r^3}\right\}, \end{cases}$$

équations qui s'écrivent aussi de la manière suivante:

$$(35'')\qquad \begin{cases} P' = -\dfrac{\mu'_k a}{a^3(c')}\left(\dfrac{a}{r}\right)^3\left(\dfrac{r}{a}\right)^3\dfrac{r^3}{\Delta^3} + \dfrac{a}{r}\, R'\cos H, \\[2ex] Q' = R'\dfrac{\partial \cos H}{\partial v}, \\[2ex] R' = \dfrac{\mu'_k r}{a^3(c')}\left(\dfrac{a}{r}\right)^3\left(\dfrac{r}{a}\right)^3 r^3\left\{\dfrac{1}{\Delta^3} - \dfrac{1}{r^3}\right\}. \end{cases}$$

La forme sous laquelle nous avons mis ces trois fonctions est choisie afin de mettre en évidence le rapport $\dfrac{r^3}{\Delta^3}$, dont nous supposons le développement établi. En partant de ces dernières formules, il sera donc facile d'établir les développements des trois fonctions dont il s'agit. Cherchons cependant, pour les obtenir d'une voie plus courte, à exprimer les P', Q',

R' par les P, Q, R, dont nous supposons les développements déjà établis. On y parvient facilement en utilisant les identités

$$\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3} = \frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3},$$

$$1 = \frac{\mu'_1 r' r^3}{(r)} \frac{(r)}{\mu'_1 r' r^3},$$

à l'aide desquelles la troisième des équations (35') nous donne celle-ci:

$$(36) \qquad R' = \frac{\mu'_k r'^2 (r)}{\mu'_1 r^2 (r)} R + \frac{\mu'_k r'}{(r)} \left(\frac{r}{r'} - \frac{r'^2}{r^2}\right).$$

Avec le résultat obtenu, il sera facile de tirer, des deux premières des équations (35''), les suivantes

$$(37) \qquad \begin{cases} P' = -\frac{\mu'_k a}{(r)} \left(\frac{r'}{r}\right)^3 \frac{r^3}{\Delta^3} + \frac{a}{r} \frac{\mu'_k r'^2 (r)}{\mu'_1 r^2 (r)} R \cos H + \frac{\mu'_k a}{(r)} \left(\frac{r}{r'} - \frac{r'^2}{r^2}\right) \cos H, \\ Q' = \left\{\frac{\mu'_k r'^2 (r)}{\mu'_1 r^2 (r)} R + \frac{\mu'_k r'}{(r)} \left(\frac{r}{r'} - \frac{r'^2}{r^2}\right)\right\} \frac{\partial \cos H}{\partial v}, \end{cases}$$

d'où l'on déduit, par un calcul assez simple, que je passe cependant sous silence, les expressions en P et en Q. Ce sont, en effet, les expressions en R qui se prêtent le mieux aux développements dont il est question maintenant.

90. Mais on parviendra, d'une voie encore plus facile, aux résultats demandés.

En ne considérant d'abord que la partie principale de la fonction perturbatrice, c'est-à-dire la partie qui s'annule avec $\frac{1}{\Delta}$, on exprimera les trois fonctions définies par les équations (35) moyennant des formules tout à fait semblables à celles qui ont servi à établir les expressions de P, Q et R. Or, en supprimant les seconds parties des fonctions Ω et Ω', on aura la relation

$$\frac{a'}{\mu'_k} \Omega' = \frac{1}{a} \frac{a}{\mu'_1} \Omega,$$

qui, du reste, n'est autre chose que l'équation (56) du n° 72, si l'on en

supprime le second membre. On parviendra maintenant, en considérant l'équation (7), au développement

$$(38)\qquad \frac{a'}{\mu'_k}\,\Omega' = \frac{1}{a}\left\{ W_0 + W_1 \mathrm{h} + W_2 \mathrm{h}^2 + \dots \right\},$$

les W_m, donnés par l'équation (8), étant par conséquent, les mêmes dans les deux développements (7) et (38).

On aura ensuite:

$$(39)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial W_m}{\partial \rho'} = \dfrac{\partial W_0^{(m)}}{\partial \rho'} + 2\dfrac{\partial W_1^{(m)}}{\partial \rho'}\cos \mathrm{w} + \dots, \\[2ex] \dfrac{\partial W_m}{\partial \mathrm{v}'} = 2\, W_1^{(m)} \sin \mathrm{w} + 2\, W_2^{(m)} \sin 2\mathrm{w} + \dots, \end{cases}$$

d'où l'on tire immédiatement, eu égard à l'équation (10), la relation

$$(40)\qquad \frac{\partial W_m}{\partial \mathrm{v}} + \frac{\partial W_m}{\partial \mathrm{v}'} = 0$$

Ensuite, puisque, ce qui est facile à voir, les fonctions W_m doivent satisfaire la condition exprimée par l'équation (44') du n° 71, nous aurons:

$$(41)\qquad (1+\rho)\frac{\partial W_m}{\partial \rho} + (1+\rho')\frac{\partial W_m}{\partial \rho'} = W_m.$$

Arrêtons-nous un moment pour déduire, d'une manière immédiate, l'équation dernièrement énoncée. Dans ce but, rappelons-nous d'abord les relations

$$r\frac{\partial W_m}{\partial r} = -(1+\rho)\frac{\partial W_m}{\partial \rho}; \qquad r'\frac{\partial W_m}{\partial r'} = -(1+\rho')\frac{\partial W_m}{\partial \rho'}.$$

Considérons ensuite les équations (30) du n° 80, dont le type général est celui-ci:

$$W_m = \text{const. } r^m r'^m D^{-(2m+1)}.$$

Il s'ensuit, par différentiation,

$$\frac{1}{W_m}\frac{\partial W_m}{\partial r} = \frac{m}{r} - (2m+1)\frac{r - r'\cos \mathrm{w}}{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos \mathrm{w}},$$

$$\frac{1}{W_m}\frac{\partial W_m}{\partial r'} = \frac{m}{r'} - (2m+1)\frac{r' - r\cos \mathrm{w}}{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos \mathrm{w}},$$

d'où l'on tire, après avoir multiplié la première équation par r et, la seconde par r',

$$r\frac{\partial W'_m}{\partial r} + r'\frac{\partial W'_m}{\partial r'} = - W'_m,$$

ce qui revient à l'équation (41).

Les dérivées $\frac{\partial W'^{(m)}_n}{\partial(\rho')}$, liées avec les $\frac{\partial W'^{(m)}_n}{\partial(\rho)}$ par des relations de la forme de l'équation (41), s'obtiennent maintenant de deux manières différentes: en premier lieu par différentiation directe de l'équation (19). On arrivera de la sorte à l'expression

$$(42)\quad \frac{\partial W'^{(m)}_n}{\partial(\rho')} = \Sigma\Sigma(s'+1)\{Y'^m(n, s, s'+1)_{0,0} - Y'^m(n, s, s'+1)_{1,0}\eta^2 + \dots$$
$$+ \dots\}(\rho)^s(\rho')^{s'}.$$

L'autre mode d'exprimer les dérivées dont il s'agit est fondé sur l'équation (41). En y introduisant la valeur de $W'^{(m)}_n$ selon l'équation (19), ainsi que celle de sa dérivée par rapport à (ρ), il viendra

$$(1+(\rho'))\frac{\partial W'^{(m)}_n}{\partial(\rho')} = \Sigma\Sigma\{Y'^m(n, s, s')_{0,0} - Y'^m(n, s, s')_{1,0}\eta^2 + \dots$$
$$+ \dots\}(\rho)^s(\rho')^{s'}$$
$$-(1+(\rho))\Sigma\Sigma(s+1)\{Y'^m(n, s+1, s')_{0,0} - \dots\}(\rho)^s(\rho')^{s'}.$$

En effectuant les multiplications demandées, on arrivera à une expression de $\frac{\partial W'^{(m)}_n}{\partial(\rho')}$ qui, comparée avec l'équation (42), conduit à la relation générale que voici:

$$(43)\qquad (s'+1)Y'^m(n, s, s'+1)_{\nu,\nu'} =$$
$$-(s+1)[Y'^m(n, s+1, s')_{\nu,\nu'} - Y'^m(n, s+1, s'-1)_{\nu,\nu'} + \dots$$
$$\pm Y'^m(n, s+1, 0)_{\nu,\nu'}]$$
$$-(s-1)[Y'^m(n, s, s')_{\nu,\nu'} - Y'^m(n, s, s'-1)_{\nu,\nu'} + \dots$$
$$\pm Y'^m(n, s, 0)_{\nu,\nu'}].$$

91. En analogie avec les opérations expliquées dans le n° 85, nous allons introduire les notations

$$
(44)\qquad
\left\{
\begin{aligned}
P' &= P'^{(0)} + P'^{(1)}\mathfrak{h} + \ldots \\
Q' &= Q'^{(0)} + Q'^{(1)}\mathfrak{h} + \ldots + R'\frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial v}, \\
R' &= R'^{(0)} + R'^{(1)}\mathfrak{h} + \ldots,
\end{aligned}
\right.
$$

où les coefficients des diverses puissances de $\mathfrak{h}$ sont donnés, ce qu'on trouve facilement en consultant les équations (35) ainsi que l'équation (38), moyennant les développements que voici:

$$
(45)\qquad
\left\{
\begin{aligned}
\alpha^{\frac{\mu_l}{\mu_k}} P'^{(m)} &= -\left\{\frac{\partial W_0'^{(m)}}{\partial \rho} + 2\frac{\partial W_1'^{(m)}}{\partial \rho}\cos w + 2\frac{\partial W_2'^{(m)}}{\partial \rho}\cos 2w + \ldots\right\}, \\
\alpha^{\frac{\mu_l}{\mu_k}} Q'^{(m)} &= \frac{1-\eta^2}{(1+\rho)^2}\left\{2W_1'^{(m)}\sin w + 4W_2'^{(m)}\sin 2w + \ldots\right\}, \\
\alpha^{\frac{\mu_l}{\mu_k}} R'^{(m)} &= \frac{(m+1)(1-\eta^2)}{(1+\rho)^2}\left\{W_0'^{(m+1)} + 2W_1'^{(m+1)}\cos w + \ldots\right\}
\end{aligned}
\right.
$$

Posons en outre:

$$
(46)\qquad
\left\{
\begin{aligned}
(1-\eta'^2)P'^{(m)} &= P_0'^{(m)} + 2P_1'^{(m)}\cos w + 2P_2'^{(m)}\cos 2w + \ldots, \\
Q'^{(m)} &= 2Q_1'^{(m)}\sin w + 2Q_2'^{(m)}\sin 2w + \ldots, \\
R'^{(m)} &= R_0'^{(m)} + 2R_1'^{(m)}\cos w + 2R_2'^{(m)}\cos 2w + \ldots,
\end{aligned}
\right.
$$

et encore:

$$
(47)\qquad
\left\{
\begin{aligned}
{}^{\frac{\mu_l}{\mu_k}} P_n'^{(m)} = -\sum\sum\{&P'^{m}(n,s,s')_{0,0} - P'^{m}(n,s,s')_{1,0}\eta^2 + \\
&+ P'^{m}(n,s,s')_{0,1}\eta'^2 - \ldots \\
&+ \ldots\}(\rho)^s(\rho')^{s'}, \\
{}^{\frac{\mu_l}{\mu_k}} Q_n'^{(m)} = n\sum\sum\{&Q'^{m}(n,s,s')_{0,0} - Q'^{m}(n,s,s')_{1,0}\eta^2 + \ldots\}(\rho)^s(\rho')^{s'}, \\
{}^{\frac{\mu_l}{\mu_k}} R_n'^{(m)} = (m+1)\sum\sum\{&R'^{m}(n,s,s')_{0,0} - R'^{m}(n,s,s')_{1,0}\eta^2 + \ldots\}(\rho)^s(\rho')^{s'},
\end{aligned}
\right.
$$

et quant aux coefficients de ces derniers développements, nous arriverons facilement, en considérant les équations (19), (42) et (45), aux formules suivantes:

$$(48)\quad \alpha P'^{m}(n, s, s')_{\nu,\nu'} = (s'+1)\{\mathcal{P}'^{m}(n, s, s'+1)_{\nu,\nu'} + \mathcal{P}'^{m}(n, s, s'+1)_{\nu,\nu'-1}\},$$

$$(49)\quad \alpha Q'^{m}(n, s, s')_{\nu,\nu'} = \mathcal{P}'^{m}(n, s, s')_{\nu,\nu'} - 2\mathcal{P}'^{m}(n, s, s'-1)_{\nu,\nu'} + \ldots$$
$$\pm (s'+1)\mathcal{P}'^{m}(n, s, 0)_{\nu,\nu'}$$
$$+ \mathcal{P}'^{m}(n, s, s')_{\nu,\nu'-1} - 2\mathcal{P}'^{m}(n, s, s'-1)_{\nu,\nu'-1} + \ldots$$
$$\pm (s'+1)\mathcal{P}'^{m}(n, s, 0)_{\nu,\nu'-1},$$

$$(50)\quad R'^{m}(n, s, s')_{\nu,\nu'} = Q'^{m+1}(n, s, s')_{\nu,\nu'},$$

$$(51)\quad Q'^{m}(n, s, s')_{\nu,\nu'} = \frac{1}{s'}P'^{m}(n, s, s'-1)_{\nu,\nu'} - \frac{2}{s'-1}P'^{m}(n, s, s'-2)_{\nu,\nu'} + \ldots$$
$$\mp s'P'^{m}(n, s, 0)_{\nu,\nu'} \pm (s'+1)Q'^{m}(n, s, 0)_{\nu,\nu'}.$$

Telles sont les expressions servant au calcul immédiat des coefficients dont il s'agit; mais puisque les fonctions $\mathcal{P}'^{m}(n, s, s')_{\nu,\nu'}$ y entrant sont en partie communes aux formules (22), (24) et (26), on pourra les éliminer de deux équations correspondantes, et on parviendra ainsi à des relations entre les $P^{m}(\ )$ et les $P'^{m}(\ )$. Ces relations s'obtenant très facilement, je me restreins à n'en signaler que celle-ci:

$$(52)\quad (s'+1)P^{m}(n, s, s'+1)_{0,0} = \alpha(s+1)P'^{m}(n, s+1, s')_{0,0}.$$

Au moyen de cette formule, les $P'^{m}(\ )$ dérivent d'une manière extrêmement simple des $P^{m}(\ )$.

92. En employant toujours les notations introduites dans les numéros précédents, nous aurons, en vertu de l'équation (30):

$$\frac{a'}{\mu_k}\Delta\Omega' = -\frac{a'r}{r'^2}\cos H$$
$$= -\frac{a'r}{r'^2}(\cos w + h),$$

termes qu'il faut ajouter à l'équation (38) afin d'avoir l'expression complète de la fonction perturbatrice. Or, le second membre se divisant en deux

parties dont l'une s'ajoute à W_0 et l'autre, à W_1, nous aurons, en désignant par $\Delta W_1'^{(0)}$ et $\Delta W_0'^{(1)}$ les incréments à ajouter aux coefficients $W_1'^{(0)}$ et $W_0'^{(1)}$:

(53) $$\Delta W_1'^{(0)} = \Delta W_0'^{(1)} = -\frac{aa'r}{r^2}$$

$$= -\frac{1}{a}\frac{1}{(1-\eta^2)^2}\frac{\eta'^2}{}\frac{(1+\rho)^2}{1+\rho'}.$$

Après avoir établi cette valeur, on parvient aisément aux formules suivantes des termes supplémentaires à ajouter aux expressions (46):

(54)
$$\begin{cases} (1-\eta'^2)\frac{\mu_l}{\mu_k}\Delta P'^{(0)} = -\frac{2}{a^2}\left(\frac{1-\eta'^2}{1-\eta^2}\right)^2\left(\frac{1+\rho}{1+\rho'}\right)^2 \cos w, \\ (1-\eta'^2)\frac{\mu_l}{\mu_k}\Delta P'^{(1)} = -\frac{1}{a^2}\left(\frac{1-\eta'^2}{1-\eta^2}\right)^2\left(\frac{1+\rho}{1+\rho'}\right)^2, \\ \frac{\mu_l}{\mu_k}\Delta Q'^{(0)} = -\frac{2}{a^2}\left(\frac{1-\eta'^2}{1-\eta^2}\right)^2\frac{(1+\rho)^2}{(1+\rho')}\sin w, \\ \frac{\mu_l}{\mu_k}\Delta R'^{(0)} = -\frac{1}{a^2}\left(\frac{1-\eta'^2}{1-\eta^2}\right)^2\frac{(1+\rho)^2}{(1+\rho')^3}, \end{cases}$$

formules qu'on développera sans peine suivant les puissances de ρ, ρ', η^2 et η'^2. On obtient de la sorte les incréments des coefficients $P'^0(1, s, s')_{\nu,\nu'}$, $P'^0(0, s, s')_{\nu,\nu'}$, $Q'^0(1, s, s')_{\nu,\nu'}$ et $R'^0(0, s, s')_{\nu,\nu'}$. Il suffit de mettre en évidence un seul de ces développements. J'ai choisi celui-ci:

(55) $$\frac{\mu_l}{\mu_k}\Delta R'^{(0)} = -\frac{1}{a^2}\frac{1}{1+\sigma}\{1 + 2\rho - 3\rho'$$

$$+ \rho^2 - 6\rho\rho' + 6\rho'^2$$

$$- 3\rho^2\rho' + 12\rho\rho'^2 - 10\rho'^3$$

$$+ \ldots\},$$

qui, on le voit immédiatement, est tout à fait analogue avec le développement (33).

Signalons encore les relations

$$\Delta P' = \frac{a}{r} \Delta R' \cos H,$$

$$\Delta Q' = \Delta R' \frac{\partial \cos H}{\partial v},$$

qu'on obtient immédiatement en vertu des équations (35'').

93. Reste à dire quelques mots sur le développement de la dérivée $D_v \Omega$, développement qui s'établit facilement si ceux des fonctions $W_n^{(m)}$ sont connus, et qui se ramène, au reste, à ceux des fonctions P, Q et R. On parvient au développement demandé en partant de l'équation (37) du n° 70, si l'on y introduit le développement (7) du chapitre présent. Il viendra de la sorte

$$(56)\qquad \frac{a}{\mu} D_v \Omega = \left\{ \frac{\partial W_0}{\partial \rho} + \frac{\partial W_1}{\partial \rho} h + \frac{\partial W_2}{\partial \rho} h^2 + \dots \right\} D_v(\rho)$$
$$+ \frac{\partial W_0}{\partial v} + \frac{\partial W_1}{\partial v} h + \frac{\partial W_2}{\partial v} h^2 + \dots$$
$$+ \{ W_1 + 2 W_2 h + 3 W_3 h^2 + \dots \} \frac{\partial h}{\partial v},$$

formule qui se remplace par la suivante:

$$(57)\qquad \frac{a}{\mu}(1 - \eta^2) D_v \Omega = \frac{a}{\mu} \{ -(1 - \eta^2) P D_v(\rho) + (1 + \rho)^2 Q \},$$

ou bien, par celle-ci:

$$(58)\qquad \frac{a}{\mu}(1 - \eta^2) D_v \Omega = \frac{a}{\mu} \Big\{ -(1 - \eta^2)(P^{(0)} + P^{(1)} h + \dots) D_v(\rho)$$
$$+ (1 + \rho)^2 (Q^{(0)} + Q^{(1)} h + \dots)$$
$$+ (1 + \rho)^2 (R^{(0)} + R^{(1)} h + \dots) \frac{\partial h}{\partial v} \Big\}.$$

Par ces formules, on obtiendra, d'une manière aussi aisée que possible, le développement de la dérivée dont il s'agit, sous la forme que nous venons

de mettre en usage par les équations (21), (23), (25) et (29). Cependant, très souvent il paraît préférable de chercher cette dérivée moyennant la différentiation directe, après avoir substitué, dans le développement de $\frac{a}{r'}\Omega$, les valeurs de (ρ) et de h. De ces valeurs, celle de (ρ) est donnée, comme nous savons, par la formule

$$(\rho) = \eta_{\prime} \cos(\mathrm{v} - \bar{\omega} - (\pi - I')),$$

d'où il vient:

$$(\rho)^2 = \frac{1}{2}\eta_{\prime}^2 + \frac{1}{2}\eta_{\prime}^2 \cos 2(\mathrm{v} - \bar{\omega} - (\pi - I')),$$

$$(\rho)^3 = \frac{3}{4}\eta_{\prime}^3 \cos(\mathrm{v} - \bar{\omega} - (\pi - I')) + \frac{1}{4}\eta_{\prime}^3 \cos 3(\mathrm{v} - \bar{\omega} - (\pi - I')),$$

etc.

Quant à la valeur de h, nous l'avons donnée à plusieurs reprises: d'abord, dans le n° 47, par les équations (4) et (5). On y a aussi donné les expressions de la deuxième et de la troisième puissance de h, en ne considérant, toutefois, que la principale partie de cette fonction, ce qui suffit le plus souvent, notamment dans le cas des planètes principales.

En ne tenant compte toujours que de la partie mentionnée de h, nous aurons, en vertu de l'équation (5, a) du numéro cité, l'expression

$$(59)\quad \mathrm{h} = \Phi_0 \cos(\mathrm{v} - \mathrm{v}') + \Phi_1 \cos(\mathrm{v} + \mathrm{v}') + \Phi_2 \sin(\mathrm{v} - \mathrm{v}') + \Phi_3 \sin(\mathrm{v} + \mathrm{v}'),$$

Φ_0, Φ_1, ... étant des fonctions restant inaltérées des différentiations D_{v} et $\mathrm{D}_{\mathrm{v}'}$, et dont voici les expressions:

$$(60)\quad \Phi_0 = -\frac{1}{4}(1 + \mathrm{f})I^2 - \frac{1}{4}(1 + \mathrm{f}')I'^2 + \frac{1}{2}II' \cos(\vartheta_1 - \vartheta_1' - (G - G'))$$
$$+ \frac{1}{16}(1 + \mathrm{f})(1 + \mathrm{f}')I^2I'^2[1 + \cos 2(\vartheta_1 - \vartheta_1' - (G - G'))],$$

$$(60')\quad \Phi_1 = \frac{1}{4}(1 + \mathrm{f})I^2 \cos 2(\vartheta_1 - G) + \frac{1}{4}(1 + \mathrm{f}')I'^2 \cos 2(\vartheta_1' - G')$$
$$- \frac{1}{2}II' \cos(\vartheta_1 + \vartheta_1' - G - G')$$
$$- \frac{1}{16}(1 + \mathrm{f})(1 + \mathrm{f}')I^2I'^2[\cos 2(\vartheta_1 - G) + \cos 2(\vartheta_1' - G')],$$

$$(60'')\qquad \Phi_2 = \frac{1}{2} II' \sin(\vartheta_1 - \vartheta_1' - (G - G'))$$
$$+ \frac{1}{16}(1 + f)(1 + f') I^2 I'^2 \sin 2(\vartheta_1 - \vartheta_1' - (G - G'))$$

$$(60''')\qquad \Phi_3 = \frac{1}{4}(1 + f) I^2 \sin 2(\vartheta_1 - G) + \frac{1}{4}(1 + f') I'^2 \sin 2(\vartheta_1' - G')$$
$$- \frac{1}{2} II' \sin(\vartheta_1 + \vartheta_1' - G - G')$$
$$- (1 + f)(1 + f') I^2 I'^2 [\sin 2(\vartheta_1 - G) + \sin 2(\vartheta_1' - G')]$$

Dans ces formules, on a employé, pour abréger, les notations du n° 32, savoir:

$$\vartheta_1 = \vartheta + \Omega - \Theta; \qquad \vartheta_1' = \vartheta' + \Omega' - \Theta'.$$

Evidemment, après avoir mis la fonction h sous la forme (59), il sera très facile d'effectuer les multiplications que demandent les formules (7) et (8), (11) et (12), ainsi que les formules analogues relativement aux fonctions P′, Q′, R′ et aux dérivées $D_v \Omega$ et $D_v \Omega'$. On aura en effet, pour en donner un exemple,

$$(61,a)\quad h \cos n(v - v') = \frac{1}{2} \Phi_0 [\cos(n - 1)(v - v') + \cos(n + 1)(v - v')]$$
$$+ \frac{1}{2} \Phi_1 [\cos((n-1)v - (n+1)v') + \cos((n+1)v - (n-1)v')]$$
$$+ \frac{1}{2} \Phi_2 [-\sin(n - 1)(v - v') + \sin(n + 1)(v - v')]$$
$$+ \frac{1}{2} \Phi_3 [-\sin((n - 1)v - (n + 1)v')$$
$$+ \sin((n + 1)v - (n - 1)v')],$$

$$(61,b)\quad h \sin n(v - v') = \frac{1}{2} \Phi_0 [\sin(n - 1)(v - v') + \sin(n + 1)(v - v')],$$
$$+ \frac{1}{2} \Phi_1 [\sin((n-1)v - (n+1)v') + \sin((n+1)v - (n-1)v')]$$
$$+ \frac{1}{2} \Phi_2 [\cos(n - 1)(v - v') - \cos(n + 1)(v - v')]$$
$$+ \frac{1}{2} \Phi_3 [\cos((n - 1)v - (n + 1)v')$$
$$- \cos((n + 1)v - (n - 1)v')]$$

On comprend encore que les puissances de $\mathfrak{h}$, ainsi que les produits de ces puissances par $\frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial \mathrm{v}}$ ou $\frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial \mathrm{v}'}$, se forment aisément et, que les multiplications de ces puissances ou produits par $\cos n(\mathrm{v}-\mathrm{v}')$ ou $\sin n(\mathrm{v}-\mathrm{v}')$ s'opèrent sans difficulté.

Mais au lieu de l'expression (59), on peut aussi, dans certaines occasions, employer la forme de $\mathfrak{h}$ qu'on a donnée au n° 51, forme qui ne conviendra pas, il est vrai, quand il s'agit de former les dérivées partielles, par rapport à v ou à v′, au moyen de différentiations directes. Mais à certains égards, la forme du numéro mentionné nous rendra des services importants. Je ne parlerai, quant à présent, que d'une seule question dont la solution s'obtient aisément en employant la forme mentionnée.

On sait que l'expression complète de $\mathfrak{h}$ renferme des inégalités périodiques des fonctions $\mathfrak{z}$ et $\mathfrak{z}'$ dépendant des configurations des planètes et s'évanouissant avec leurs masses, inégalités qu'il convient d'appeler *inégalités anastématiques*. Or, ces inégalités formant des incréments à ajouter aux parties élémentaires de $\mathfrak{z}$ et $\mathfrak{z}'$, c'est-à-dire, aux quantités que nous avons désignées, dans le n° 51, par $(\mathfrak{z})$ et $(\mathfrak{z}')$, on parviendra le plus promptement possible à détacher, de la fonction totale $\mathfrak{h}$, la partie qui dépend des incréments $\delta\mathfrak{z}$ et $\delta\mathfrak{z}'$, si l'on a exprimé $\mathfrak{h}$ par $\mathfrak{z}$ et $\mathfrak{z}'$

Désignons dorénavant par $(\mathfrak{h})$ la partie élémentaire de $\mathfrak{h}$, en sorte que $(\mathfrak{h})$ sera la fonction déterminée par l'équation (4) du n° 47, et, par $\delta\mathfrak{h}$ la partie de $\mathfrak{h}$ qui disparaît avec les inégalités anastématiques : nous aurons alors :

$$\mathfrak{h} = (\mathfrak{h}) + \delta\mathfrak{h} \tag{62}$$

Cela posé, en consultant l'équation (12) du n° 51, on reconnaîtra tout de suite que la partie $\delta\mathfrak{h}$ sera donnée par la formule

$$\begin{aligned} \delta\mathfrak{h} = {} & M_1\delta\mathfrak{z} + M_1'\delta\mathfrak{z}' + N_1\frac{d\delta\mathfrak{z}}{dv} + N_1'\frac{d\delta\mathfrak{z}}{dv} \\ & + P_1\delta\mathfrak{z}^2 + P_1'\delta\mathfrak{z}'^2 + Q_1\delta\mathfrak{z}\frac{d\delta\mathfrak{z}}{dv} + Q_1'\delta\mathfrak{z}'\frac{d\delta\mathfrak{z}}{dv} + R_1\delta\mathfrak{z}\delta\mathfrak{z}' + \end{aligned} \tag{63}$$

les M_1, M_1', N_1, ... étant donnés dans le numéro cité.

Afin de tenir compte, dans le développement de la fonction perturbatrice ainsi que dans ceux de ses dérivées partielles, des termes dépendant

des inégalités anastématiques, il faut développer les expressions (7), (11), (38), (44) et (56) suivant les puissances de ∂h. Ces développements s'effectuant d'une manière très simple sans qu'il soit nécessaire d'en donner une explication détaillée, je les passe sous silence.

Quant à la fonction (h), il faut encore observer qu'elle n'est pas tout à fait identique avec h donné par la formule (59), vu qu'il manque les petits termes sousélémentaires qui dépendent des fonctions (ζ) et (ζ'), termes qu'on a mis en évidence dans l'équation (4) du n° 47.

94. A la fin du chapitre présent, je vais mettre un résumé succinct des développements établis, et fixer le système des indices, dont le nombre est assez grand.

Soit N une des fonctions $\frac{a}{r}\Omega$, P, Q, ..., nous allons d'abord établir le développement

$$(\alpha) \qquad N = N^{(0)} + N^{(1)}h + N^{(2)}h^2 + \ldots,$$

auquel il faut ajouter, dans certains cas, un terme qui paraît multiplié par $\frac{\partial h}{\partial v}$ ou par $\frac{\partial h}{\partial v'}$. Il ne sera pas nécessaire de tenir compte, dans cet exposé, de ce terme. En introduisant, dans la formule (α), l'expression complète de h, on considérera, d'une manière tout à fait rigoureuse, l'influence des inégalités anastématiques.

Cela étant, nous allons développer la fonction $N^{(m)}$ suivant les puissances et produits des inégalités diastématiques, en établissant la formule

$$\begin{aligned}(\beta) \qquad N^{(m)} = N^{(m)}_{0,0} &+ N^{(m)}_{1,0}\partial\rho + N^{(m)}_{2,0}\partial\rho^2 + \ldots\\ &+ N^{(m)}_{0,1}\partial\rho' + N^{(m)}_{1,1}\partial\rho\,\partial\rho' + \ldots\\ &+ N^{(m)}_{0,2}\partial\rho'^2 + \ldots\\ &+ \ldots,\end{aligned}$$

où j'écris, pour garder plus de symétrie, $\partial\rho$ et $\partial\rho'$ au lieu de $(1-\eta^2)\xi$ et $(1-\eta'^2)\xi'$, c'est-à-dire, au lieu de R et de R'.

Maintenant, je puis omettre tous les indices, en considérant les termes des divers $N^{(m)}_{k,k'}$ comme formant des groupes isolés qu'il faut traiter séparément des autres. J'écris donc tout simplement N au lieu de $N^{(m)}_{k,k'}$, mais

quelquefois, s'il est nécessaire de distinguer les termes appartenant à divers groupes, j'emploierai la notation

$$\mathrm{N}_{k,k}^{(m)} = \overset{m,k,k}{\mathrm{Gr}}\,\mathrm{N},$$

ce qui me permettra de charger le symbole N d'un grand nombre d'indices nouveaux.

Les N étant des fonctions de w, (ρ), (ρ'), η^2 et η'^2, je les représenterai, conformément à nos développements fondamentaux, au moyen de l'expression suivante:

$$(\gamma)\qquad \begin{aligned} \mathrm{N} = \sum\sum \Big\{ & \mathrm{N}(0, s, s')_{0,0} - \mathrm{N}(0, s, s')_{1,0}\eta^2 + \dots \\ & + \mathrm{N}(0, s, s')_{0,1}\eta'^2 - \dots \\ & + \dots \Big\}(\rho)^s(\rho')^{s'} \\ + 2\sum\sum\sum \Big\{ & \mathrm{N}(n, s, s')_{0,0} - \mathrm{N}(n, s, s')_{1,0}\eta^2 + \dots \\ & + \mathrm{N}(n, s, s')_{0,1}\eta'^2 - \dots \\ & + \dots \Big\}(\rho)^s(\rho')^{s'} \left.\begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}\right| n\mathrm{w}. \end{aligned}$$

Voilà la forme fondamentale du développement de la fonction perturbatrice. Il est certain que l'expression (γ) est convergente, tant que les fonctions diastématiques restent moindres que l'unité. C'est de même quant au développement (β): Les inégalités diastématiques pourraient être beaucoup plus fortes qu'elles ne le sont à l'état actuel des choses, sans que le développement (β) cesse d'être très convergent. Mais la formule (α) peut être divergente même si la valeur de h reste toujours notablement inférieure à l'unité; s'il s'agit des planètes principales, il n'y a pas, cependant, lieu de craindre qu'un tel cas n'arrive

De la forme fondamentale, on pourra déduire, moyennant des transformations convenables, plusieurs autres formes du développement de la fonction perturbatrice: je me restreins à n'en indiquer que les trois suivantes:

A) En introduisant, dans l'équation (γ), l'expression du produit $(\rho)^s(\rho')^{s'} e^{in(\mathrm{v}-\mathrm{v}')}$ donnée par l'équation (3) du n° 55, on aura, après un calcul assez simple, bien qu'il puisse paraître laborieux, la fonction N développée suivant les multiples de F, F' et $\mathrm{F} - \mathrm{F}' + \omega - \omega' + \pi - \Gamma - (\pi' - \Gamma')$.

Mais cette forme n'étant pas appropriée à l'intégration directe des équations différentielles que nous allons déduire prochainement, je ne la considère plus.

B) Les arguments E et E' ainsi que G et G', definis au n° 26, étant homorythmiques avec F et F' respectivement, on pourra exprimer le développement de la fonction N moyennant les arguments E, E' et

$$E - E' + \omega - \omega' + \pi - \Gamma - (\pi' - \Gamma'),$$

ou encore par G, G' et $G - G' + \omega - \omega' + \pi - \Gamma - (\pi' - \Gamma')$. C'est surtout la dernière forme qui mérite d'être mentionnée, vu qu'elle porte à exécuter un certain nombre des intégrations demandées d'une manière assez simple. Il faut toutefois rappeler que les angles G et G' ne sont pas homorythmiques, ni même isocinétiques avec les angles $nt + A - \Gamma$ et $n't + A' - \Gamma'$ respectivement, parce que les différences $nt - G$ et $n't - G'$ renferment, chacune, un terme séculaire. On aura, en effet, si l'on introduit dans l'équation (10) du n° 26, la valeur

$$\zeta = t - T,$$

l'expression

$$G = (1 - \varsigma)nt - (1 - \varsigma)nT + A - \pi + (1 - \varsigma)X,$$

d'où l'on voit, immédiatement, que le terme séculaire dont nous avons parlé est ςnt. Il est donc impossible d'employer, comme arguments, les angles $nt + A - \Gamma$ et $n't + A' - \Gamma'$ sans être obligé de développer suivant les puissances du temps, ce qu'il faut, cependant, éviter dans une solution absolue de notre problème.

Mais les angles G et G' étant isocinétiques avec $(1 - \varsigma)nt + A - \Gamma$ et $(1 - \varsigma')n't + A' - \Gamma'$ respectivement, on peut employer ceux-là comme arguments au lieu des premiers. Cependant, les agrégats périodiques $(1 - \varsigma)nT$ et $(1 - \varsigma')n'T'$ renfermant des termes dont les vitesses de l'argument sont extrêmement faibles, en sorte que la nature isocinétique des arguments dont il s'agit paraît altérée pendant de longs intervalles du temps, on pourra douter que l'introduction de ces derniers arguments soit favorable. Elle est, au contraire, interdite dans certaines occasions.[1]

[1] Dans mon mémoire »Untersuchungen über die Convergenz etc.», j'ai évité le développement suivant les puissances de la quantité T (ou Z), ce qui m'a permi de mettre en évidence qu'une inégalité dépendant d'un très petit diviseur ne peut pas excéder une limite déterminée, bien que ce diviseur soit évanouissant.

Pour arriver au développement qui procède suivant les multiples de G et de G′, il ne faut que mettre en usage les expressions de $(\rho)^m \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\Big| n\mathrm{F}$ données par Le Verrier dans le Tome premier des Annales de l'observatoire de Paris.

C) Il existe cependant une seconde forme trigonométrique du développement de la fonction perturbatrice qui paraît amener beaucoup de facilités, soit parce qu'elle est plus convergente que celle où l'on a employé les arguments G et G′, soit parce qu'elle se prête le mieux aux intégrations des équations différentielles d'où s'obtiennent les coefficients diastématiques Cette nouvelle forme qui présente, d'ailleurs, plusieurs analogies avec la forme employée par Hansen dans ses recherches sur les perturbations des petites planètes, dérive de la substitution, dans le développement fondamental, des expressions de $(\rho)^s(\rho')^{s'}e^{ni(v-v')}$, dont nous avons donné l'exposition au n° 59. C'est en particulier de cette forme que nous allons nous occuper dans le chapitre qui suivra.

CHAPITRE IV.

Forme diastématique du développement de la fonction perturbatrice.

95. La forme sous laquelle se présente le développement de la fonction perturbatrice lorsqu'on introduit, dans la forme fondamentale (équation (γ) du dernier numéro), les expressions des produits $(\rho)^s(\rho')^{s'}e^{in(v-v')}$ données dans le n° 59, sera appelée *forme diastématique*, parce que l'argument diastématique de la planète dont on cherche à déterminer soit l'orbite absolue soit les inégalités, y entrera comme argument fondamental sans être remplacé par un autre argument astronomique.

La conversion de la forme fondamentale en la forme diastématique s'opère d'après des règles très simples; néanmoins, le travail à y effectuer peut être assez considérable, vu que le nombre, soit des termes qu'il faut transformer, soit des termes résultants, est généralement très grand.

En inspectant les formules du n° 59, on voit facilement que le terme général d'un produit du type dont il s'agit est formé de la manière suivante:

$$(1)\qquad \mathrm{T}(\rho^s\rho'^{s'}e^{inw}) = \overset{(c)}{\mathrm{E}}\eta^{s+\mu}\eta'^{[illegible]}e^{[illegible]}$$

$$\times\, e^{[illegible]},$$

où l'on a écrit ρ et ρ' au lieu de (ρ) et (ρ') et désigné par μ, μ', r et r' des entiers positifs. On y a encore employé le symbole T(F) pour signifier le terme général du développement de la fonction F, et, le symbole $\overset{(c)}{\mathrm{E}}$ pour représenter le coefficient, effectivement dépendant des sept indices n, s, s', μ, μ', r et r', et encore de la combinaison des signes qui, dans la formule (1), sont ambigus. Ces combinaisons, en nombre de quatre, je les ai indiquées par la petite lettre (c) mise entre parenthèses à la tête du symbole E, en sorte que

(1)	signifiera	la	combinaison	— —,
(2)	»	»	»	+ —,
(3)	»	»	»	— +,
(4)	»	»	»	+ +.

S'il est nécessaire de distinguer les différents indices, j'emploierai la notation

$$\overset{(\cdot)}{E}{}^{s,s',n}_{\mu,\mu',r,r'}.$$

Ainsi, pour donner un exemple, si l'on admet:

$$s = s' = 1; \qquad \mu = 3; \qquad \mu' = 0; \qquad r = 2; \qquad r' = 0,$$

et qu'on prenne les signes supérieurs c'est-à-dire la combinaison (4), le coefficient aura la valeur

$$\overset{(4)}{E}{}^{1,1,n}_{3,0,2,0} = \frac{1}{4}\left\{\varepsilon_3^{(n+1,\varepsilon,1)} + \varepsilon_3^{(n+1,\varepsilon,-1)}\right\},$$

ce qui est immédiatement visible par la formule (14, 1, 1, 5) du n° 59.

Dans un second exemple, nous allons chercher, parmi les termes de la formule (14, 2, 1, 5), celui dans lequel les coefficients de $i(\pi - \Gamma)$ et de $i(\pi' - \Gamma')$ sont respectivement $+3$ et $+2$. Evidemment, il faut prendre la combinaison (4), et le coefficient du terme dont il est question est donné par l'expression

$$\overset{(4)}{E}{}^{2,1,n}_{1,1,0,0} = -\frac{1}{8}\varepsilon^{n+1}\varepsilon_1^{(n+2,\varepsilon,1)}.$$

On obtiendra de même:

$$\overset{(4)}{E}{}^{2,1,n}_{1,1,1,0} = -\varepsilon_1^{(n+1,\varepsilon,1)}\left\{\frac{1}{8}\varepsilon_1^{(n+2,\varepsilon,1)} + \frac{1}{4}\varepsilon_1^{(n+2,\varepsilon,1)}\right\}$$

J'adopte encore les notations que voici:

$$(2) \qquad \begin{cases} p = s + \mu, \\ p' = s' + \mu', \\ s = n \mp (p - 2r), \\ s' = n' \pm (p' - 2r'), \end{cases}$$

ce qui me permet de rendre la formule (1) un peuplus courte. Je l'écris, en effet, de la manière suivante:

$$(1') \qquad T(\rho^s \rho'^{s'} e^{im\ldots}) = \overset{(\cdot)}{E}\eta^p \eta'^{p'} e^{[illegible]},$$

formule qui se remplace par la suivante

$$(1'') \qquad \mathrm{T}(\rho^{s}\rho'^{s'}e^{inw}) = \overset{(\nu)}{\mathrm{E}}\eta^{p}\eta'^{p'}e^{i(n-s)(\pi-\Gamma)+i(s'-n)(\pi'-\Gamma')+i[s(\mathrm{V}-\omega)-s'\mathrm{V}+n(\bar{\omega}-\omega')]}.$$

On voit immédiatement que le degré du terme auquel appartient le coefficient dépendant des indices s, s′, μ et μ', est déterminé par la somme

$$\mathrm{d} = \mathrm{p} + \mathrm{p}'$$
$$- \mathrm{s} + \mathrm{s}' + \mu + \mu'.$$

Evidemment, il existe une infinité de termes dont les indices s et s' restent les mêmes. Le groupe renfermant tous ces termes sera appelé la *synechie* des indices s et s', et il convient de la désigner par le symbole

$$\sum^{s,s'}\nu.$$

Encore, pour exprimer que différents termes appartiennent à la même synechie, je les nomme *termes coordonnés*.

On voit facilement que les termes coordonnés forment une série infinie procédant suivant les puissances et les produits des fonctions diastématiques. Mais il faut remarquer qu'il y entre plusieurs termes du même degré dont le nombre est, toutefois, fini.

Les termes coordonnés du degré le plus bas déterminent le degré de la synechie; je les appelle *termes coordonnés principaux* ou plus brièvement *termes principaux*. Le nombre qu'indique ce degré étant évidemment égal à la plus petite valeur que peut acquérir la somme p + p′, je vais montrer que la valeur minima de p + p′ est égale à la différence $s' - s$ prise toujours positivement.

Dans ce but, il suffit de remarquer qu'on aura, en vertu des deux dernières des équations (2), la relation

$$\mathrm{p} + \mathrm{p}' = s' - s + 2(\mathrm{r} + \mathrm{r}'),$$

ou bien:

$$\mathrm{p} + \mathrm{p}' = s - s' + 2(\mathrm{r} + \mathrm{r}'),$$

les différences $s - s'$ et $s' - s$ étant supposées toujours positives. Or, les nombres r et r′ étant toujours positifs, la valeur minima est, en conséquence, ou égale à $s - s'$, ou, à $s' - s$

Concevons maintenant en particulier les termes principaux afin de déterminer leur nombre.

En désignant par d le degré de la synechie, il est aisé de voir que les termes principaux sont au nombre de d + 1.

En effet, les divers termes principaux étant différents des autres, d'abord par les différentes valeurs de p et p′, dont la somme est toujours constante, on peut distinguer les coefficients

$$\eta^{d}, \eta^{d-1}\eta', \eta^{d-2}\eta'^{2}, \ldots, \eta\eta'^{d-1}, \eta'^{d},$$

dont le nombre est évidemment d + 1.

Si l'on a fixé les valeurs des trois nombres s, s' et p, on obtient celles des nombres n et p′ en vertu des relations

$$(3) \qquad s = n - p; \qquad s' = n + p',$$

supposé toutefois que s soit moindre que s'. Dans le cas opposé, on doit prendre:

$$(3') \qquad s = n + p; \qquad s' = n - p'.$$

Dans le premier cas, il faut prendre p′ tout au plus égal à s'; dans le second, p tout au plus égal à s.

Au contraire, si les valeurs de s, s' et p′ étaient données, on déterminerait les valeurs de n et de p, en utilisant les relations indiquées.

Ces règles seront utiles lorsqu'il s'agit de chercher les termes d'une certaine forme appartenant à une synechie déterminée.

Pour rendre les choses plus claires, passons à traiter un exemple.

Supposons:

$$s = 2; \qquad s' = 5; \qquad p = 2$$

Le degré de la synechie est 3, et il est évident qu'on doit prendre p′ égal à 1.

Maintenant, les relations

$$n = s + p; \qquad n = s' - p'$$

donnent, toutes les deux,

$$n = 4.$$

Cela étant, puisqu'on a:

$$2 = s + \mu; \qquad 1 = s' + \mu',$$

on doit faire successivement:

$$s = 0\,,\ \mu = 2; \qquad s = 1\,,\ \mu = 1; \qquad s = 2; \qquad \mu = 0,$$

$$s' = 0\,,\ \mu' = 1; \qquad s' = 1\,,\ \mu' = 0,$$

et chercher, dans les formules (12, 0, 0, 3), (12, 1, 0, 3), (12, 2, 0, 3), (12, 0, 1, 3) (12, 1, 1, 3) et (12, 2, 1, 3), en y faisant n égal à 4, les termes qui renferment le facteur

$$\eta^{2}\eta' e^{2n(\pi-\Gamma)+n(\pi'-\Gamma')+i[2(V-\bar{\omega})-5V+4(\bar{\omega}-\omega)]}.$$

On trouvera de la sorte les coefficients $\xi_1^{4,1}\varepsilon_2^{5\varphi,2}$, $-\frac{1}{2}\xi_1^{4,1}\varepsilon_1^{5\varphi,1}$, $\frac{1}{4}\xi_1^{4,1}$, $\frac{1}{2}\varepsilon_2^{5\varphi,2}$, $-\frac{1}{4}\varepsilon_1^{5\varphi,1}$, $\frac{1}{8}$, dont les produits par le facteur indiqué donnent tous les termes de la forme envisagée.

Il convient de remarquer que la somme $p + p'$ est un nombre pair tant que la différence $s - s'$ est paire; dans le cas opposé, $p + p'$ est un nombre impair.

Mais il peut arriver que les nombres s et s', tous les deux ou seulement l'un d'eux, acquièrent des valeurs négatives. Dans un tel cas, le degré de la synechie est encore égal à la valeur absolue de la différence $s - s'$, et servent les formules (3) et (3′) toujours à déterminer la valeur de n.

Soient par exemple:

$$s = 2; \qquad s' = -2; \qquad p = 1;$$

il en résultera:

$$d = 4; \qquad p' = d - 1 = 3,$$

et nous aurons, d'après les relations (3′),

$$n = 1.$$

En introduisant ces valeurs dans la formule (1″), il viendra:

$$T\rho^{s}\rho'^{s'}e^{iNV} = E\eta\eta'^{3}e^{-n(\pi-\Gamma)-3n(\pi'-\Gamma')+i[2(V-\omega)+2V+\omega-\omega']};$$

et puisqu'on a:

$$1 = s + \mu, \qquad 3 = s' + \mu',$$

on doit chercher les différentes valeurs du coefficient E dans les formules (13,0,0,4), (13,1,0,4), (13,0,1,4), (13,1,1,4), (13,0,2,4), (13,1,2,4), (13,0,3,4) et (13,1,3,4). On obtiendra ainsi les coefficients $-\xi_2^{1}$ [illegible], $\frac{1}{2}\xi_2^{1}$ [illegible], $\frac{1}{2}\xi_2^{0,2}\varepsilon_1$ [illegible], etc.

96. S'il s'agit des termes d'un degré plus élevé que celui de la synechie à laquelle appartiennent ces termes, il faut que les nombres p et p′ satisfassent à la condition

$$\mathrm{p} + \mathrm{p}' = \mathrm{d} + 2(\mathrm{r} + \mathrm{r}'),$$

d étant le degré de la synechie; tandis que r et r′ représentent des entiers positifs pris à volonté.

On en conclut que le degré d'un terme appartenant à une synechie donnée ne peut différer du degré de la synechie que d'un nombre pair.

Mettons en évidence les quatre combinaisons auxquelles sont soumises les deux dernières des équations (2). Nous aurons:

I	$n - s = -(\mathrm{p} - 2\mathrm{r});$	$s' - n = -(\mathrm{p}' - 2\mathrm{r}'),$
II.	$n - s = \mathrm{p} - 2\mathrm{r}\,;$	$s' - n = -(\mathrm{p}' - 2\mathrm{r}'),$
III.	$n - s = -(\mathrm{p} - 2\mathrm{r});$	$s' - n = \mathrm{p}' - 2\mathrm{r}'\,,$
IV.	$n - s = \mathrm{p} - 2\mathrm{r}\,;$	$s' - n = \mathrm{p}' - 2\mathrm{r}'\,.$

En ajoutant les équations de chaque groupe, l'une et l'autre, il résultera:

$$(4)\quad \left|\begin{array}{l} s' - s = -(\mathrm{p} - 2\mathrm{r}) - (\mathrm{p}' - 2\mathrm{r}'), \\ s' - s = \mathrm{p} - 2\mathrm{r} - (\mathrm{p}' - 2\mathrm{r}'), \\ s' - s = -(\mathrm{p} - 2\mathrm{r}) + \mathrm{p}' - 2\mathrm{r}'\,, \\ s' - s = \mathrm{p} - 2\mathrm{r} + \mathrm{p}' - 2\mathrm{r}' \end{array}\right.$$

Cela étant, on peut prendre s', s, p et p′ à volonté, à la seule condition que la somme p + p′ soit paire ou impaire selon que la différence est paire ou impaire; et encore qu'elle soit plus grande ou tout au moins

égale à la valeur absolue de cette différence. Mais pour rétablir l'égalité, il faut attribuer à r et r' certaines valeurs positives, assujetties aux conditions

$$p \geq 2r; \qquad p' \geq 2r'.$$

Alors, les différences p — 2r et p' — 2r' seront toujours positives ou nulles, et l'on doit considérer celle ou celles des équations (4) qui seront satisfaites, les valeurs de s, s', p et p' étant données.

Supposons, pour étudier un exemple spécial,

$$s = 2; \qquad s' = 5; \qquad p = 3; \qquad p' = 2$$

Evidemment, les conditions nécessaires seront satisfaites, soit par la seconde, soit par la quatrième des équations (4). On aura en effet:

1) si l'on choisit la seconde de ces équations:

$$3 = 3 - 2r - (2 - 2r'),$$

d'où il est visible qu'il faut adopter les valeurs

$$r = 0; \qquad r' = 1;$$

2) si l'on prend la quatrième des équations dont il s'agit:

$$3 = 3 - 2r + (2 - 2r'),$$

équation qui sera satisfaite de deux manières différentes: d'abord en faisant r = 1; r' = 0, et ensuite par les valeurs r = 0, r' = 1. Mais on s'aperçoit sur-le-champ de l'identité de cette dernière hypothèse avec le résultat trouvé dans le premier cas.

Examinons un peu en détail, les deux cas que nous venons de distinguer.

D'abord, les équations II nous donnent les relations

$$n - 2 = 3; \qquad 5 - n = 0,$$

d'où il résulte:

$$n = 5.$$

Mais puisqu'on a

$$3 = s + \mu; \qquad 2 = s' + \mu',$$

on doit chercher, parmi les termes des formules (14, 0, 0, 5), (14, 1, 0, 5),

[illegible], ceux qui, n pris égal à 5, dépendent du facteur variable :

$$\eta\,\eta'^{2}e^{[illegible]}$$

De la première des formules énumérées, on tire le coefficient $\xi_2^{[illegible]}\varepsilon_{[illegible]}^{[illegible]}$; de la seconde, le coefficient $\frac{1}{2}\xi_2^{[illegible]}\varepsilon_2^{[illegible]}$; etc

Venons au second cas.

L'équation IV nous donne, en supposant r = 1 , r' = 0,

$$n - 2 = 1, \qquad 5 - n = 2,$$

donc, il faut prendre

$$n = 3.$$

Or, dans le cas présent, on a, outre les relations

$$3 = s + \mu; \qquad 2 = s' + \mu',$$

qui sont communes aux deux cas, les valeurs

$$n - s = 1; \qquad s' - n = 2;$$

on doit donc chercher, dans les expressions énumérées tout à l'heure, les termes qui ont pour facteur variable l'expression

$$\eta^{3}\eta'^{2}e^{[illegible]})+2i\pi[illegible])+[illegible]2([illegible]5V+3[illegible])}.$$

On aura, par exemple, de la première des expressions mentionnées: $\xi_2^{3,2}\,\varepsilon_3^{5\varphi,1}$.

Après avoir montré comment on détache, de la forme fondamentale, les termes isolés appartenant à une synechie donnée, je passe à transformer la totalité des termes de la forme mentionnée.

97. Il s'entend, par ce qui précède, que les termes d'un type donné appartenant à la forme diastématique, se produisent en transformant diverses parties de la forme fondamentale. Or, il convient de réunir tous ces termes en un seul, ce qui sera, évidemment, possible. Dans ce but, on se rappellera que les divers produits $\rho^{s}\rho'^{s'}e^{inw}$ entrant dans le développement (γ) sont multipliés par les coefficients $N(n\,,\,s\,,\,s')_{\nu,\nu'}$. En conséquence, pour avoir le coefficient complet d'un terme dont le facteur variable est

$$\eta^{p+2\nu}\eta'^{p'+2\nu'}e^{[illegible]}$$

$$\times\, e^{[illegible]}.$$

il faut former la somme

$$(5) \qquad \overset{(i)}{G}(\mathrm{p}, \mathrm{p}', \mathrm{r}, \mathrm{r}', n)_{\nu,\nu'} = \sum \left\{ N(n, \mathrm{s}, \mathrm{s}')_{\nu,\nu'} \overset{(i)}{E}{}^{\mathrm{s},\mathrm{s}',n}_{\mathrm{p}-\mathrm{s},\mathrm{p}'-\mathrm{s}',\mathrm{r},\mathrm{r}'} \right\},$$

en étendant la sommation sur toutes les valeurs de s et s′ qui, à partir de s = s′ = 0, ne surpassent pas s = p et s′ = p′.

En faisant usage de la formule (5), on remarquera que le résultat sera indépendant de s et s′, c'est-à-dire que ces nombres n'entreront pas comme indices dans le résultat, mais que l'indice n y reste comme symbole algébrique.

Prenons pour exemple le terme du quatrième ordre dont le facteur variable est

$$\eta^2 \eta'^2 e^{2i(\varpi-\Gamma)-2i(\varpi'-\Gamma')+i\{(n-2)(v-\omega)-(n-2)(v'+n(\omega-\omega'))\}}.$$

En inspectant les équations (13, s, s′, 4), et en détachant les termes du type mentionné, on trouve, après avoir effectué les multiplications par les $N(n, \mathrm{s}, \mathrm{s}')_{\nu,\nu'}$ que demande la formule (5),

$$\begin{aligned}
\overset{(2)}{G}(2, 2, 0, 0, n)_{\nu,\nu'} = \quad & \xi_2^{n,-2} \varepsilon_2^{(n-2)\varsigma,2} N(n, 0, 0)_{\nu,\nu'} \\
& - \frac{1}{2} \xi_2^{n,-2} \varepsilon_1^{(n-2)\varsigma,1} N(n, 1, 0)_{\nu,\nu'} \\
& + \frac{1}{2} \xi_1^{n-1,-1} \varepsilon_2^{(n-2)\varsigma,2} N(n, 0, 1)_{\nu,\nu'} \\
& + \frac{1}{4} \xi_2^{n,-2} N(n, 2, 0)_{\nu,\nu'} \\
& - \frac{1}{4} \xi_1^{n-1,-1} \varepsilon_1^{(n-2)\varsigma,1} N(n, 1, 1)_{\nu,\nu'} \\
& + \frac{1}{4} \varepsilon_2^{(n-2)\varsigma,2} N(n, 0, 2)_{\nu,\nu'} \\
& + \frac{1}{8} \xi_1^{n-1,-1} N(n, 2, 1)_{\nu,\nu'} \\
& - \frac{1}{8} \varepsilon_1^{(n-2)\varsigma,1} N(n, 1, 2)_{\nu,\nu'} \\
& + \frac{1}{16} N(n, 2, 2)_{\nu,\nu'}
\end{aligned}$$

Evidemment, dans notre exemple, il faut prendre

$$\nu = \nu' = 0;$$

autrement, le facteur dépendant des fonctions η et η' devrait être

$$\eta^{2+2\nu}\eta'^{2+2\nu'}.$$

Les formules servant au calcul des coefficients G sont, comme on voit, soit par l'expression (5), soit par l'exemple que nous venons de traiter, de la même forme, quelles que soient les valeurs de ν et ν'.

Qu'on remarque encore que les cinq indices p, p', r, r et n déterminent complètement, avec le nombre c l'argument du terme. Ainsi, par exemple, l'expression complète du terme dont le coefficient est

$$\overset{(4)}{\mathrm{G}}(3\,,\,1\,,\,1\,,\,0\,,\,n)_{\nu,\nu'}\,,$$

sera:

$$\overset{(4)}{\mathrm{G}}(3\,,\,1\,,\,1\,,\,0\,,\,n)_{\nu,\nu'}\,\eta^{3}\eta' e^{i[\text{[illegible]}]}.$$

On sait que la valeur du nombre c peut être 1, 2, 3 ou 4; cependant, si l'indice p est nul ou égal à 2r, les combinaisons (1) et (2) se réduisent, l'une à l'autre, et c'est de même quant aux combinaisons (3) et (4). Egalement, si l'indice p' est nul ou égal à 2r', les combinaisons (1) et (3) ne diffèrent pas, l'une de l'autre, ni les combinaisons (2) et (4) non plus. Si p et p' sont simultanément égaux à zéro ou à 2r, respectivement à 2r', toutes les quatre combinaisons reviennent à une seule, et ce ne serait plus nécessaire de les distinguer par la notation (c): je vais cependant, dans ces cas spéciaux employer la notation (0). Mais on pourra éviter cette notation encore si l'on emploie les indices p, p', s, s' et n. En effet, la relation

$$\overset{c}{\mathrm{G}}(\mathrm{p}\,,\,\mathrm{p}'\,,\,\mathrm{r}\,,\,\mathrm{r}'\,,\,n)_{\nu,\nu'} = \mathrm{G}(\mathrm{p}\,,\,\mathrm{p}'\,,\,s\,,\,s'\,,\,n)_{\nu,\nu'}$$

sera legitime si l'on a déterminé la valeur de c en considérant les signes de $n - s$ et $s' - n$, et qu'on ait choisi les nombres r et r' de façon que les relations

$$n - s = +(\mathrm{p} - 2\mathrm{r}); \qquad s' - n = +(\mathrm{p}' - 2\mathrm{r}')$$

soient satisfaites, 2r étant toujours moindre ou tout au plus égal à p, et 2r', moindre ou tout au plus égal à p'.

Supposons, pour élucider le rapport entre les deux manières de dénoter les coefficients G,

$$\mathrm{p} = 3, \qquad \mathrm{p}' = 2, \qquad s = 2, \qquad s' = 3; \qquad n = 1.$$

D'abord, puisqu'on a

$$n - s = -1; \qquad s' - n = +2,$$

le cas considéré appartient évidemment à la troisième combinaison; et il est encore clair qu'on doit prendre

$$\mathrm{r} = 1; \qquad \mathrm{r}' = 0.$$

Selon les circonstances, on pourra donc se servir de l'une ou de l'autre des notations signalées: la première, où l'on met, directement, la combinaison en évidence, est préférable lorsqu'il s'agit de termes appartenant à une valeur indéterminée de l'indice n, et la seconde, s'il s'agit d'une synechie déterminée.

Quand p est égal à zéro, on aura nécessairement aussi r égal à zéro et s égal à n. C'est de même quant aux indices p', r', s' et n.

98. Voici maintenant la liste complète des coefficients appartenant aux termes jusqu'au troisième degré inclusivement. J'y adopte la première manière à mettre en évidence les indices, et j'omets les indices ν et ν' qui sont communs à tous les termes.

$$\overset{(0)}{\mathrm{G}}(0, 0, 0, 0, n) = \mathrm{N}(n, 0, 0),$$

$$\overset{(1)}{\mathrm{G}}(1, 0, 0, 0, n) = -\varepsilon_1^{n,1}\mathrm{N}(n, 0, 0) + \frac{1}{2}\mathrm{N}(n, 1, 0),$$

$$\overset{(2)}{\mathrm{G}}(1, 0, 0, 0, n) = -\varepsilon_1^{n,1}\mathrm{N}(n, 0, 0) + \frac{1}{2}\mathrm{N}(n, 1, 0),$$

$$\overset{(1)}{\mathrm{G}}(0, 1, 0, 0, n) = \xi_1^{n,1}\mathrm{N}(n, 0, 0) + \frac{1}{2}\mathrm{N}(n, 0, 1),$$

$$\overset{(3)}{\mathrm{G}}(0, 1, 0, 0, n) = \xi_1^{n,1}\mathrm{N}(n, 0, 0) + \frac{1}{2}\mathrm{N}(n, 0, 1),$$

$$\overset{(0)}{G}(2, 0, 1, 0, n) = -\varepsilon_2^{n\varsigma,0} N(n, 0, 0) - \frac{1}{2}(\varepsilon_1^{n\varsigma,1} + \varepsilon_1^{n\varsigma,-1}) N(n, 1, 0)$$

$$+ \frac{1}{2} N(n, 2, 0),$$

$$\overset{(1)}{G}(2, 0, 0, 0, n) = \varepsilon_2^{n\varsigma,-2} N(n, 0, 0) - \frac{1}{2}\varepsilon_1^{n\varsigma,-1} N(n, 1, 0) + \frac{1}{4} N(n, 2, 0),$$

$$\overset{(2)}{G}(2, 0, 0, 0, n) = \varepsilon_2^{n\varsigma,2} N(n, 0, 0) - \frac{1}{2}\varepsilon_1^{n\varsigma,1} N(n, 1, 0) + \frac{1}{4} N(n, 2, 0),$$

$$\overset{(1)}{G}(1, 1, 0, 0, n) = -\xi_1^{n,-1}\varepsilon_1^{(n-1)\varsigma,-1} N(n, 0, 0) + \frac{1}{2}\xi_1^{n,-1} N(n, 1, 0)$$

$$- \frac{1}{2}\varepsilon_1^{(n-1)\varsigma,-1} N(n, 0, 1) + \frac{1}{4} N(n, 1, 1),$$

$$\overset{(2)}{G}(1, 1, 0, 0, n) = -\xi_1^{n,-1}\varepsilon_1^{(n-1)\varsigma,1} N(n, 0, 0) + \frac{1}{2}\xi_1^{n,-1} N(n, 1, 0)$$

$$- \frac{1}{2}\varepsilon_1^{(n-1)\varsigma,1} N(n, 0, 1) + \frac{1}{4} N(n, 1, 1),$$

$$\overset{(3)}{G}(1, 1, 0, 0, n) = -\xi_1^{n,1}\varepsilon_1^{(n+1)\varsigma,-1} N(n, 0, 0) + \frac{1}{2}\xi_1^{n,1} N(n, 1, 0)$$

$$- \frac{1}{2}\varepsilon_1^{(n+1)\varsigma,-1} N(n, 0, 1) + \frac{1}{4} N(n, 1, 1),$$

$$\overset{(4)}{G}(1, 1, 0, 0, n) = -\xi_1^{n,1}\varepsilon_1^{(n+1)\varsigma,1} N(n, 0, 0) + \frac{1}{2}\xi_1^{n,1} N(n, 1, 0)$$

$$- \frac{1}{2}\varepsilon_1^{(n+1)\varsigma,1} N(n, 0, 1) + \frac{1}{4} N(n, 1, 1),$$

$$\overset{(0)}{G}(0, 2, 0, 1, n) = -\xi_2^{n,0} N(n, 0, 0) + \frac{1}{2}(\xi_1^{n-1,1} + \xi_1^{n+1,-1}) N(n, 0, 1)$$

$$+ \frac{1}{2} N(n, 0, 2),$$

$$\overset{(1)}{G}(0, 2, 0, 0, n) = \xi_2^{n,-2} N(n, 0, 0) + \frac{1}{2}\xi_1^{n-1,-1} N(n, 0, 1) + \frac{1}{4} N(n, 0, 2),$$

$$\overset{(3)}{G}(0, 2, 0, 0, n) = \xi_2^{n,2} N(n, 0, 0) + \frac{1}{2}\xi_1^{n+1,1} N(n, 0, 1) + \frac{1}{4} N(n, 0, 2),$$

$$\overset{(1)}{G}(3, 0, 1, 0, n) = \varepsilon_3^{n\varphi,-1} N(n, 0, 0) - \frac{1}{2}(\varepsilon_2^{n\varphi,0} - \varepsilon_2^{n\varphi,-2}) N(n, 1, 0)$$

$$- \left(\frac{1}{2}\varepsilon_1^{n\varphi,-1} + \frac{1}{4}\varepsilon_1^{n\varphi,1}\right) N(n, 2, 0) + \frac{3}{8} N(n, 3, 0),$$

$$\overset{(2)}{G}(3, 0, 1, 0, n) = \varepsilon_3^{n\varphi,1} N(n, 0, 0) + \frac{1}{2}(\varepsilon_2^{n\varphi,2} - \varepsilon_2^{n\varphi,0}) N(n, 1, 0)$$

$$- \left(\frac{1}{2}\varepsilon_1^{n\varphi,1} + \frac{1}{4}\varepsilon_1^{n\varphi,-1}\right) N(n, 2, 0) + \frac{3}{8} N(n, 3, 0),$$

$$\overset{(1)}{G}(3, 0, 0, 0, n) = -\varepsilon_3^{n\varphi,-3} N(n, 0, 0) + \frac{1}{2}\varepsilon_2^{n\varphi,-2} N(n, 1, 0)$$

$$- \frac{1}{4}\varepsilon_1^{n\varphi,-1} N(n, 2, 0) + \frac{1}{8} N(n, 3, 0),$$

$$\overset{(2)}{G}(3, 0, 0, 0, n) = -\varepsilon_3^{n\varphi,3} N(n, 0, 0) + \frac{1}{2}\varepsilon_2^{n\varphi,2} N(n, 1, 0) - \frac{1}{4}\varepsilon_1^{n\varphi,1} N(n, 2, 0)$$

$$+ \frac{1}{8} N(n, 3, 0),$$

$$\overset{(1)}{G}(2, 1, 1, 0, n) = -\xi_1^{n,-1}\varepsilon_2^{(n-1)\varphi,0} N(n, 0, 0)$$

$$- \frac{1}{2}\xi_1^{n,-1}(\varepsilon_1^{(n-1)\varphi,-1} + \varepsilon_1^{(n-1)\varphi,1}) N(n, 1, 0)$$

$$- \frac{1}{2}\varepsilon_2^{(n-1)\varphi,0} N(n, 0, 1) + \frac{1}{4}\xi_1^{n,-1} N(n, 2, 0)$$

$$- \frac{1}{4}(\varepsilon_1^{(n-1)\varphi,-1} + \varepsilon_1^{(n-1)\varphi,1}) N(n, 1, 1) + \frac{1}{4} N(n, 2, 1),$$

$$\overset{(3)}{G}(2, 1, 1, 0, n) = -\xi_1^{n,1}\varepsilon_2^{(n+1)\varphi,0} N(n, 0, 0)$$

$$- \frac{1}{2}\xi_1^{n,1}(\varepsilon_1^{(n+1)\varphi,-1} + \varepsilon_1^{(n+1)\varphi,1}) N(n, 1, 0)$$

$$- \frac{1}{2}\varepsilon_2^{(n+1)\varphi,0} N(n, 0, 1) + \frac{1}{4}\xi_1^{n,1} N(n, 2, 0)$$

$$- \frac{1}{4}(\varepsilon_1^{(n+1)\varphi,-1} + \varepsilon_1^{(n+1)\varphi,1}) N(n, 1, 1) + \frac{1}{4} N(n, 2, 1),$$

$$\overset{(1)}{G}(2,1,0,0,n) = \xi_1^{n,-1}\varepsilon_2^{(n-1)\varsigma,-2}N(n,0,0) - \frac{1}{2}\xi_1^{n,-1}\varepsilon_1^{(n-1)\varsigma,-1}N(n,1,0)$$
$$+\frac{1}{2}\varepsilon_2^{(n-1)\varsigma,-2}N(n,0,1) + \frac{1}{4}\xi_1^{n,-1}N(n,2,0)$$
$$-\frac{1}{4}\varepsilon_1^{(n-1)\varsigma,-1}N(n,1,1) + \frac{1}{8}N(n,2,1),$$

$$\overset{(2)}{G}(2,1,0,0,n) = \xi_1^{n,-1}\varepsilon_2^{(n-1)\varsigma,2}N(n,0,0) - \frac{1}{2}\xi_1^{n,-1}\varepsilon_1^{(n-1)\varsigma,1}N(n,1,0)$$
$$+\frac{1}{2}\varepsilon_2^{(n-1)\varsigma,2}N(n,0,1) + \frac{1}{4}\xi_1^{n,-1}N(n,2,0)$$
$$-\frac{1}{4}\varepsilon_1^{(n-1)\varsigma,1}N(n,1,1) + \frac{1}{8}N(n,2,1),$$

$$\overset{(3)}{G}(2,1,0,0,n) = \xi_1^{n,1}\varepsilon_2^{(n+1)\varsigma,-2}N(n,0,0) - \frac{1}{2}\xi_1^{n,1}\varepsilon_1^{(n+1)\varsigma,-1}N(n,1,0)$$
$$+\frac{1}{2}\varepsilon_2^{(n+1)\varsigma,-2}N(n,0,1) + \frac{1}{4}\xi_1^{n,1}N(n,2,0)$$
$$-\frac{1}{4}\varepsilon_1^{(n+1)\varsigma,-1}N(n,1,1) + \frac{1}{8}N(n,2,1),$$

$$\overset{(4)}{G}(2,1,0,0,n) = \xi_1^{n,1}\varepsilon_2^{(n+1)\varsigma,2}N(n,0,0) - \frac{1}{2}\xi_1^{n,1}\varepsilon_1^{(n+1)\varsigma,1}N(n,1,0)$$
$$+\frac{1}{2}\varepsilon_2^{(n+1)\varsigma,2}N(n,0,1) + \frac{1}{4}\xi_1^{n,1}N(n,2,0)$$
$$-\frac{1}{4}\varepsilon_1^{(n+1)\varsigma,1}N(n,1,1) + \frac{1}{8}N(n,2,1),$$

$$\overset{(1)}{G}(1,2,0,1,n) = \xi_2^{n,0}\varepsilon_1^{n\varsigma,-1}N(n,0,0) - \frac{1}{2}\xi_2^{n,0}N(n,1,0)$$
$$-\frac{1}{2}(\xi_1^{n-1,1} + \xi_1^{n+1,-1})\varepsilon_1^{n\varsigma,-1}N(n,0,1)$$
$$+\frac{1}{4}(\xi_1^{n-1,1} + \xi_1^{n+1,-1})N(n,1,1) - \frac{1}{2}\varepsilon_1^{n\varsigma,-1}N(n,0,2)$$
$$+\frac{1}{4}N(n,1,2),$$

$$\overset{(0)}{G}(1, 2, 0, 0, n) = \xi_2^{n,0}\varepsilon_1^{n\varsigma,1}N(n, 0, 0) - \frac{1}{2}\xi_2^{n,0}N(n, 1, 0)$$

$$-\frac{1}{2}(\xi_1^{n+1,-1} + \xi_1^{n-1,1})\varepsilon_1^{n\varsigma,1}N(n, 0, 1)$$

$$+\frac{1}{4}(\xi_1^{n-1,1} + \xi_1^{n+1,-1})N(n, 1, 1) - \frac{1}{2}\varepsilon_1^{n\varsigma,1}N(n, 0, 2)$$

$$+\frac{1}{4}N(n, 1, 2),$$

$$\overset{(1)}{G}(1, 2, 0, 0, n) = -\xi_2^{n,-2}\varepsilon_1^{(n-2)\varsigma,-1}N(n, 0, 0) + \frac{1}{2}\xi_2^{n,-2}N(n, 1, 0)$$

$$-\frac{1}{2}\xi_1^{n-1,-1}\varepsilon_1^{(n-2)\varsigma,-1}N(n, 0, 1) + \frac{1}{4}\xi_1^{n-1,-1}N(n, 1, 1)$$

$$-\frac{1}{4}\varepsilon_1^{(n-2)\varsigma,-1}N(n, 0, 2) + \frac{1}{8}N(n, 1, 2),$$

$$\overset{(2)}{G}(1, 2, 0, 0, n) = -\xi_2^{n,-2}\varepsilon_1^{(n-2)\varsigma,1}N(n, 0, 0) + \frac{1}{2}\xi_2^{n,-2}N(n, 1, 0)$$

$$-\frac{1}{2}\xi_1^{n-1,-1}\varepsilon_1^{(n-2)\varsigma,1}N(n, 0, 1) + \frac{1}{4}\xi_1^{n-1,-1}N(n, 1, 1)$$

$$-\frac{1}{4}\varepsilon_1^{(n-2)\varsigma,1}N(n, 0, 2) + \frac{1}{8}N(n, 1, 2),$$

$$\overset{(3)}{G}(1, 2, 0, 0, n) = -\xi_2^{n,2}\varepsilon_1^{(n+2)\varsigma,-1}N(n, 0, 0) + \frac{1}{2}\xi_2^{n,2}N(n, 1, 0)$$

$$-\frac{1}{2}\xi_1^{n+1,1}\varepsilon_1^{(n+2)\varsigma,-1}N(n, 0, 1) + \frac{1}{4}\xi_1^{n+1,1}N(n, 1, 1)$$

$$-\frac{1}{4}\varepsilon_1^{(n+2)\varsigma,-1}N(n, 0, 2) + \frac{1}{8}N(n, 1, 2),$$

$$\overset{(4)}{G}(1, 2, 0, 0, n) = -\xi_2^{n,2}\varepsilon_1^{(n+2)\varsigma,1}N(n, 0, 0) + \frac{1}{2}\xi_2^{n,2}N(n, 1, 0)$$

$$-\frac{1}{2}\xi_1^{n+1,1}\varepsilon_1^{(n+2)\varsigma,1}N(n, 0, 1) + \frac{1}{4}\xi_1^{n+1,1}N(n, 1, 1)$$

$$-\frac{1}{4}\varepsilon_1^{(n+2)\varsigma,1}N(n, 0, 2) + \frac{1}{8}N(n, 1, 2),$$

$$\overset{(1)}{G}(0\,,3\,,0\,,1\,,n) = \xi_3^{n,1} N(n\,,0\,,0) + \frac{1}{2}(\xi_2^{n+1,2} - \xi_2^{n-1,0}) N(n\,,0\,,1)$$

$$+ \left(\frac{1}{2}\xi_1^{n,1} + \frac{1}{4}\xi_1^{n-2,1}\right) N(n\,,0\,,2) + \frac{3}{8} N(n\,,0\,,3),$$

$$\overset{(3)}{G}(0\,,3\,,0\,,1\,,n) = -\xi_3^{n,1} N(n\,,0\,,0) + \frac{1}{2}(\xi_2^{n-1,2} - \xi_2^{n+1,0}) N(n\,,0\,,1)$$

$$+ \left(\frac{1}{2}\xi_1^{n,1} + \frac{1}{4}\xi_1^{n+2,1}\right) N(n\,,0\,,2) + \frac{3}{8} N(n\,,0\,,3),$$

$$\overset{(1)}{G}(0\,,3\,,0\,,0\,,n) = \xi_3^{n,3} N(n\,,0\,,0) + \frac{1}{2}\xi_2^{n-1,2} N(n\,,0\,,1)$$

$$+ \frac{1}{4}\xi_1^{n-2,1} N(n\,,0\,,2) + \frac{1}{8} N(n\,,0\,,3),$$

$$\overset{(3)}{G}(0\,,3\,,0\,,0\,,n) = \xi_3^{n,3} N(n\,,0\,,0) + \frac{1}{2}\xi_2^{n+1,2} N(n\,,0\,,1)$$

$$+ \frac{1}{4}\xi_1^{n+2,1} N(n\,,0\,,2) + \frac{1}{8} N(n\,,0\,,3).$$

Bien qu'on ait continué le développement général de pareilles formules des coefficients $\overset{(c)}{G}(p\,,p'\,,r\,,r'\,,n)$ jusqu'à $p + p' = 5$, je ne tiens pas convenable de les reproduire à cette place. Elles sont, en vérité, très compliquées et elles occuperaient, en conséquence, beaucoup de place sans qu'on eût l'occasion, sinon dans les cas exceptionnels, d'en faire usage. En revanche, je vais donner, dans une partie suivante de ce travail, les expressions de divers coefficients appartenant aux synechies les plus importantes, en étendant quelquefois le calcul même aux termes du sixième et du septième degré.

99. La forme diastématique du développement par laquelle sera représentée la fonction N, devient, après les transformations indiquées, la suivante:

$$(6)\quad N = \sum\sum\sum\sum \Big\{ \overset{(c)}{G}(p, p', r, r', 0)_{0,0}\eta^{p}\eta'^{p'} \frac{\cos}{\sin}\big[+ (p - 2r)(\pi - l)$$

$$\pm (p' - 2r')(\pi' - l') + (p - 2r)(v - \varpi) + (p' - 2r')V\big]\Big\}$$

$$- \sum\sum\sum\sum \Big\{ \overset{(c)}{G}(p, p', r, r', 0)_{1,0}\eta^{p+2}\eta'^{p'} \frac{\cos}{\sin}\big[+ (p - 2r)(\pi - l)$$

$$\pm (p' - 2r')(\pi' - l') + (p - 2r)(v - \varpi) + (p' - 2r')V\big]\Big\}$$

$$+ \ldots$$

$$+ 2\sum\sum\sum\sum\sum_{n=1}^{n=\infty} \Big\{ \overset{(c)}{G}(p, p', r, r', n)_{0,0}\eta^{p}\eta'^{p'} \frac{\cos}{\sin}\big[+ (p - 2r)(\pi - l)$$

$$\pm (p' - 2r')(\pi' - l') + (n + (p - 2r))(v - \varpi)$$

$$- (n + (p' - 2r'))V + n(\varpi - \varpi')\big]\Big\}$$

$$- 2\sum\sum\sum\sum\sum_{n=1}^{n=\infty} \Big\{ \overset{(c)}{G}(p, p', r, r', n)_{1,0}\eta^{p+2}\eta'^{p'} \frac{\cos}{\sin}\big[+ (p - 2r)(\pi - l)$$

$$+ (p' - 2r')(\pi' - l') + (n + (p - 2r))(v - \varpi)$$

$$- (n \pm (p' - 2r'))V + n(\varpi - \varpi')\big]\Big\}$$

$$+ \ldots.$$

Après avoir établi cette expression générale, je vais l'appliquer, ainsi que les formules du dernier numéro donnant les divers coefficients G, à la représentation des fonctions $\frac{\mu}{\mu}(1 - \eta^2)P^{(m)}$, $\frac{\mu}{\mu}Q^{(m)}$ et $\frac{\mu}{\mu}R^{(m)}$. Dans ce but, je vais désigner par $\overset{(c)}{A}(p, p', r, r', n)_{\nu,\nu'}$ ce que devient $2\overset{(c)}{G}(p, p', r, r', n)_{\nu,\nu'}$ lorsqu'on y met $-nQ^{m}(n, s, s')_{\nu,\nu'}$ à la place de $N(n, s, s')_{\nu,\nu'}$. Egalement, en changeant $N(n, s, s')_{\nu,\nu'}$ en $-P^{m}(n, s, s')_{\nu,\nu'}$, dans les expressions des G, je désignerai le résultat qui en découle par $\overset{(c)}{B}(p, p', r, r', n)_{\nu,\nu'}$. On doit toutefois excepter le cas où n est égal à zéro, cas dans lequel on doit prendre G au lieu de 2G. En introduisant, finalement, dans les formules mentionnées, $(m + 1)R^{m}(n, s, s')_{\nu,\nu'}$ au lieu de $N(n, s, s')_{\nu,\nu'}$, j'emploierai la notion $\overset{(c)}{C}(p, p', r, r', n)_{\nu,\nu'}$ pour exprimer le résultat qu'on ob-

tiendra ainsi relativement à G ou à 2G. Nous aurons, de la sorte, les trois développements

$$(7)\quad \frac{\mu_l}{\mu_k}(1-\eta^2)P^{(m)} = \sum^{(e)}\Big\{B(p, p', r, r', n)_{0,0}\eta^{p}\eta'^{p'}\cos[+(p-2r)(\pi-l) + (p'-2r')(\pi'-l') + (n+(p-2r))(v-\varpi) - (n\pm(p'-2r'))V + n(\varpi-\varpi')]\Big\} - \dots,$$

$$(8)\quad \frac{\mu_l}{\mu_k}Q^{(m)} = \sum^{(e)}\Big\{A(p, p', r, r', n)_{0,0}\eta^{p}\eta'^{p'}\sin[+(p-2r)(\pi-l) \pm (p'-2r')(\pi'-l') + (n+(p-2r))(v-\varpi) - (n+(p'-2r'))V + n(\varpi-\varpi')]\Big\} - \dots,$$

$$(9)\quad \frac{\mu_l}{\mu_k}R^{(m)} = \sum^{(e)}\Big\{C(p, p', r, r', n)_{0,0}\eta^{p}\eta'^{p'}\cos[+(p-2r)(\pi-l) + (p'-2r')(\pi'-l') + (n\mp(p-2r))(v-\varpi) - (n+(p'-2r'))V + n(\varpi-\varpi')]\Big\} - \dots,$$

De la même manière, on pourra représenter toute autre fonction de même nature que les $P^{(m)}$, $Q^{(m)}$ et $R^{(m)}$; par exemple les W_m, moyennant la forme indiquée. On pourrait même l'employer aux développements des fonctions $\frac{\mu_l}{\mu_k}(1-\eta'^2)P'^{(m)}$, $\frac{\mu_l}{\mu_k}Q'^{(m)}$ et $\frac{\mu_l}{\mu_k}R'^{(m)}$; mais il convient mieux de mettre en usage, pour représenter ces fonctions-là, les formules suivantes:

$$(7')\quad \frac{\mu_l}{\mu_k}(1-\eta'^2)P'^{(m)} = \sum^{(e)}\Big\{B(p, p', r, r', n)'_{0,0}\eta^{p}\eta'^{p'}\cos[+(p-2r)(\pi-l) \pm (p'-2r')(\pi'-l') + (n\mp(p-2r))V' - (n+(p'-2r'))(v'-\varpi') + n(\varpi-\varpi')]\Big\} - \dots,$$

$$(8') \qquad \frac{m_l}{m_\lambda} Q'^{(m)} = \sum \Big\{ \overset{(c)}{A}(\mathrm{p}, \mathrm{p}', \mathrm{r}, \mathrm{r}', n)'_{0,0} \eta^{\mathrm{p}} \eta'^{\mathrm{p}'} \sin\big[+ (\mathrm{p} - 2\mathrm{r})(\pi - \Gamma)$$

$$\pm (\mathrm{p}' - 2\mathrm{r}')(\pi' - \Gamma') + (n \mp (\mathrm{p} - 2\mathrm{r}))\mathrm{V}'$$

$$- (n \pm (\mathrm{p}' - 2\mathrm{r}'))(\mathrm{v}' - \bar{\varpi}') + n(\bar{\varpi} - \bar{\varpi}')\big] \Big\}$$

$$- \quad ,$$

$$(9') \qquad \frac{m_l}{m_\lambda} R'^{(m)} = \sum \Big\{ \overset{(c)}{C}(\mathrm{p}, \mathrm{p}', \mathrm{r}, \mathrm{r}', n)'_{0,0} \eta^{\mathrm{p}} \eta'^{\mathrm{p}'} \cos\big[\pm (\mathrm{p} - 2\mathrm{r})(\pi - \Gamma)$$

$$\pm (\mathrm{p}' - 2\mathrm{r}')(\pi' - \Gamma') + (n \mp (\mathrm{p} - 2\mathrm{r}))\mathrm{V}'$$

$$- (n \pm (\mathrm{p}' - 2\mathrm{r}'))(\mathrm{v}' - \bar{\varpi}') + n(\bar{\varpi} - \bar{\varpi}')\big] \Big\}$$

$$- \ldots .$$

100. En dénotant par $\overset{(c)}{G}(\mathrm{p}, \mathrm{p}', \mathrm{r}, \mathrm{r}', n)'_{\nu,\nu'}$ le type général des coefficients entrant dans les formules (7′), (8′) et (9′), il s'agit d'en établir les expressions analogues à celles que nous venons de donner dans le n° 98. Pour y arriver, il faut consulter les règles, indiquées, soit dans le n° 58, soit dans les numéros suivants, pour établir les développements des produits $\rho^{s} \rho'^{s'} e^{inw}$, les angles V′, (v′ — $\bar{\varpi}'$) et $\bar{\varpi} - \bar{\varpi}'$ étant pris pour arguments. D'après cela, on obtiendra aisément les expressions suivantes:

$$\overset{(0)}{G}(0, 0, 0, 0, n)' = N'(n, 0, 0),$$

$$\overset{(1)}{G}(1, 0, 0, 0, n)' = \xi_1^{n,1} N'(n, 0, 0) + \frac{1}{2} N'(n, 1, 0),$$

$$\overset{(2)}{G}(1, 0, 0, 0, n)' = \xi_1^{n,-1} N'(n, 0, 0) + \frac{1}{2} N'(n, 1, 0),$$

$$\overset{(1)}{G}(0, 1, 0, 0, n)' = - \varepsilon_1^{n\varsigma',1} N'(n, 0, 0) + \frac{1}{2} N'(n, 0, 1),$$

$$\overset{(3)}{G}(0, 1, 0, 0, n)' = - \varepsilon_1^{n\varsigma',-1} N'(n, 0, 0) + \frac{1}{2} N'(n, 0, 1),$$

$$\overset{(0)}{G}(2,0,1,0,n)' = -\xi_2^{n,0}N'(n,0,0) + \frac{1}{2}(\xi_1^{n+1,-1} + \xi_1^{n-1,1})N'(n,1,0)$$
$$+ \frac{1}{2}N'(n,2,0),$$

$$\overset{(1)}{G}(2,0,0,0,n)' = \quad \xi_2^{n,2}N'(n,0,0) + \frac{1}{2}\xi_1^{n+1,1}N'(n,1,0) + \frac{1}{4}N'(n,2,0),$$

$$\overset{(2)}{G}(2,0,0,0,n)' = \quad \xi_2^{n,-2}N'(n,0,0) + \frac{1}{2}\xi_1^{n-1,-1}N'(n,1,0) + \frac{1}{4}N'(n,2,0),$$

$$\overset{(1)}{G}(1,1,0,0,n)' = -\xi_1^{n,1}\varepsilon_1^{(n+1)\varphi',1}N'(n,0,0) - \frac{1}{2}\varepsilon_1^{(n+1)\varphi',1}N'(n,1,0)$$
$$+ \frac{1}{2}\xi_1^{n,1}N'(n,0,1) + \frac{1}{4}N'(n,1,1),$$

$$\overset{(2)}{G}(1,1,0,0,n)' = -\xi_1^{n,-1}\varepsilon_1^{(n-1)\varphi',1}N'(n,0,0) - \frac{1}{2}\varepsilon_1^{(n-1)\varphi',1}N'(n,1,0)$$
$$+ \frac{1}{2}\xi_1^{n,-1}N'(n,0,1) + \frac{1}{4}N'(n,1,1),$$

$$\overset{(3)}{G}(1,1,0,0,n)' = -\xi_1^{n,1}\varepsilon_1^{(n+1)\varphi',-1}N'(n,0,0) - \frac{1}{2}\varepsilon_1^{(n+1)\varphi',-1}N'(n,1,0)$$
$$+ \frac{1}{2}\xi_1^{n,1}N'(n,0,1) + \frac{1}{4}N'(n,1,1),$$

$$\overset{(4)}{G}(1,1,0,0,n)' = -\xi_1^{n,-1}\varepsilon_1^{(n-1)\varphi',-1}N'(n,0,0) - \frac{1}{2}\varepsilon_1^{(n-1)\varphi',-1}N'(n,1,0)$$
$$+ \frac{1}{2}\xi_1^{n,-1}N'(n,0,1) + \frac{1}{4}N'(n,1,1),$$

$$\overset{(0)}{G}(0,2,0,1,n)' = -\varepsilon_2^{n\varphi',0}N'(n,0,0) - \frac{1}{2}(\varepsilon_1^{n\varphi',-1} + \varepsilon_1^{n\varphi',1})N'(n,0,1)$$
$$+ \frac{1}{2}N'(n,0,2),$$

$$\overset{(1)}{G}(0,2,0,0,n)' = \quad \varepsilon_2^{n\varphi',2}N'(n,0,0) - \frac{1}{2}\varepsilon_1^{n\varphi',1}N'(n,0,1) + \frac{1}{4}N'(n,0,2),$$

$$\overset{(3)}{G}(0,2,0,0,n)' = \quad \varepsilon_2^{n\varphi',-2}N'(n,0,0) - \frac{1}{2}\varepsilon_1^{n\varphi',-1}N'(n,0,1) + \frac{1}{4}N'(n,0,2),$$

$$\overset{(1)}{G}(3, 0, 1, 0, n)' = -\xi_3^{n,1} N'(n, 0, 0) - \frac{1}{2}(\xi_2^{n+1,0} - \xi_2^{n-1,2}) N'(n, 1, 0)$$

$$+ \left(\frac{1}{2}\xi_1^{n,1} + \frac{1}{4}\xi_1^{n+2,-1}\right) N'(n, 2, 0) + \frac{3}{8} N'(n, 3, 0),$$

$$\overset{(2)}{G}(3, 0, 1, 0, n)' = -\xi_3^{n,-1} N'(n, 0, 0) - \frac{1}{2}(\xi_2^{n-1,0} - \xi_2^{n+1,-2}) N'(n, 1, 0)$$

$$+ \left(\frac{1}{2}\xi_1^{n,-1} + \frac{1}{4}\xi_1^{n-2,1}\right) N'(n, 2, 0) + \frac{3}{8} N'(n, 3, 0),$$

$$\overset{(1)}{G}(3, 0, 0, 0, n)' = \xi_3^{n,3} N'(n, 0, 0) + \frac{1}{2}\xi_2^{n+1,2} N'(n, 1, 0)$$

$$+ \frac{1}{4}\xi_1^{n+2,1} N'(n, 2, 0) + \frac{1}{8} N'(n, 3, 0),$$

$$\overset{(2)}{G}(3, 0, 0, 0, n)' = \xi_3^{n,-3} N'(n, 0, 0) + \frac{1}{2}\xi_2^{n-1,-2} N'(n, 1, 0)$$

$$+ \frac{1}{4}\xi_1^{n-2,-1} N'(n, 2, 0) + \frac{1}{8} N'(n, 3, 0),$$

$$\overset{(1)}{G}(2, 1, 1, 0, n)' = \xi_2^{n,0}\varepsilon_1^{n\varsigma',1} N'(n, 0, 0) - \frac{1}{2}(\xi_1^{n-1,1} + \xi_1^{n+1,-1})\varepsilon_1^{n\varsigma',1} N'(n, 1, 0)$$

$$- \frac{1}{2}\xi_2^{n,0} N'(n, 0, 1) - \frac{1}{2}\varepsilon_1^{n\varsigma',1} N'(n, 2, 0)$$

$$+ \frac{1}{4}(\xi_1^{n-1,1} + \xi_1^{n+1,-1}) N'(n, 1, 1) + \frac{1}{4} N'(n, 2, 1),$$

$$\overset{(3)}{G}(2, 1, 1, 0, n)' = \xi_2^{n,0}\varepsilon_1^{n\varsigma',-1} N'(n, 0, 0) - \frac{1}{2}(\xi_1^{n-1,1} + \xi_1^{n+1,-1})\varepsilon_1^{n\varsigma',-1} N'(n, 1, 0)$$

$$- \frac{1}{2}\xi_2^{n,0} N'(n, 0, 1) - \frac{1}{2}\varepsilon_1^{n\varsigma',-1} N'(n, 2, 0)$$

$$+ \frac{1}{4}(\xi_1^{n-1,1} + \xi_1^{n+1,-1}) N'(n, 1, 1) + \frac{1}{4} N'(n, 2, 1),$$

$$\overset{(1)}{G}(2, 1, 0, 0, n)' = -\xi_2^{n,2}\varepsilon_1^{(n+2)\varsigma',1} N'(n, 0, 0) - \frac{1}{2}\xi_1^{n+1,1}\varepsilon_1^{(n+2)\varsigma',1} N'(n, 1, 0)$$

$$+ \frac{1}{2}\xi_2^{n,2} N'(n, 0, 1) - \frac{1}{4}\varepsilon_1^{(n+2)\varsigma',1} N'(n, 2, 0)$$

$$+ \frac{1}{4}\xi_1^{n+1,1} N'(n, 1, 1) + \frac{1}{8} N'(n, 2, 1).$$

$$\overset{(2)}{G}(2,1,0,0,n)' = -\xi_2^{n,-2}\varepsilon_1^{(n-2)\varsigma,1}N'(n,0,0) - \frac{1}{2}\xi_1^{n-1,-1}\varepsilon_1^{(n-2)\varsigma,1}N'(n,1,0)$$
$$+\frac{1}{2}\xi_2^{n,-2}N'(n,0,1) - \frac{1}{4}\varepsilon_1^{(n-2)\varsigma,1}N'(n,2,0)$$
$$+\frac{1}{4}\xi_1^{n-1,-1}N'(n,1,1) + \frac{1}{8}N'(n,2,1),$$

$$\overset{(3)}{G}(2,1,0,0,n)' = -\xi_2^{n,2}\varepsilon_1^{(n+2)\varsigma,-1}N'(n,0,0) - \frac{1}{2}\xi_1^{n+1,1}\varepsilon_1^{(n+2)\varsigma,-1}N'(n,1,0)$$
$$+\frac{1}{2}\xi_2^{n,2}N'(n,0,1) - \frac{1}{4}\varepsilon_1^{(n+2)\varsigma,-1}N'(n,2,0)$$
$$+\frac{1}{4}\xi_1^{n+1,1}N'(n,1,1) + \frac{1}{8}N'(n,2,1),$$

$$\overset{(4)}{G}(2,1,0,0,n)' = -\xi_2^{n,-2}\varepsilon_1^{(n-2)\varsigma,-1}N'(n,0,0) - \frac{1}{2}\xi_1^{n-1,-1}\varepsilon_1^{(n-2)\varsigma,-1}N'(n,1,0)$$
$$+\frac{1}{2}\xi_2^{n,-2}N'(n,0,1) - \frac{1}{4}\varepsilon_1^{(n-2)\varsigma,-1}N'(n,2,0)$$
$$+\frac{1}{4}\xi_1^{n-1,-1}N'(n,1,1) + \frac{1}{8}N'(n,2,1),$$

$$\overset{(1)}{G}(1,2,0,1,n)' = -\xi_1^{n,1}\varepsilon_2^{(n+1)\varsigma,0}N'(n,0,0) - \frac{1}{2}\varepsilon_2^{(n+1)\varsigma,0}N'(n,1,0)$$
$$-\frac{1}{2}\xi_1^{n,1}(\varepsilon_1^{(n+1)\varsigma,1} + \varepsilon_1^{(n+1)\varsigma,-1})N'(n,0,1)$$
$$-\frac{1}{4}(\varepsilon_1^{(n+1)\varsigma,1} + \varepsilon_1^{(n+1)\varsigma,-1})N'(n,1,1) + \frac{1}{4}\xi_1^{n,1}N'(n,0,2)$$
$$+\frac{1}{4}N'(n,1,2),$$

$$\overset{(2)}{G}(1,2,0,1,n)' = -\xi_1^{n,-1}\varepsilon_2^{(n-1)\varsigma,0}N'(n,0,0) - \frac{1}{2}\varepsilon_2^{(n-1)\varsigma,0}N'(n,1,0)$$
$$-\frac{1}{2}\xi_1^{n,-1}(\varepsilon_1^{(n-1)\varsigma,1} + \varepsilon_1^{(n-1)\varsigma,-1})N'(n,0,1)$$
$$-\frac{1}{4}(\varepsilon_1^{(n-1)\varsigma,1} + \varepsilon_1^{(n-1)\varsigma,-1})N'(n,1,1) + \frac{1}{4}\xi_1^{n,-1}N'(n,0,2)$$
$$+\frac{1}{4}N'(n,1,2).$$

$$\overset{(1)}{G}(1,2,0,0,n)' = \xi_1^{n,1}\,\varepsilon_2^{(n+1)\varsigma',2}\,N'(n,0,0) + \frac{1}{2}\,\varepsilon_2^{(n+1)\varsigma',2}\,N'(n,1,0)$$

$$-\frac{1}{2}\,\xi_1^{n,1}\,\varepsilon_1^{(n+1)\varsigma',1}\,N'(n,0,1) - \frac{1}{4}\,\varepsilon_1^{(n+1)\varsigma',1}\,N'(n,1,1)$$

$$+\frac{1}{4}\,\xi_1^{n,1}\,N'(n,0,2) + \frac{1}{8}\,N'(n,1,2),$$

$$\overset{(2)}{G}(1,2,0,0,n)' = \xi_1^{n,-1}\,\varepsilon_2^{(n-1)\varsigma',2}\,N'(n,0,0) + \frac{1}{2}\,\varepsilon_2^{(n-1)\varsigma',2}\,N'(n,1,0)$$

$$-\frac{1}{2}\,\xi_1^{n,-1}\,\varepsilon_1^{(n-1)\varsigma',1}\,N'(n,0,1) - \frac{1}{4}\,\varepsilon_1^{(n-1)\varsigma',1}\,N'(n,1,1)$$

$$+\frac{1}{4}\,\xi_1^{n,-1}\,N'(n,0,2) + \frac{1}{8}\,N'(n,1,2),$$

$$\overset{(3)}{G}(1,2,0,0,n)' = \xi_1^{n,1}\,\varepsilon_2^{(n+1)\varsigma',-2}\,N'(n,0,0) + \frac{1}{2}\,\varepsilon_2^{(n+1)\varsigma',-2}\,N'(n,1,0)$$

$$-\frac{1}{2}\,\xi_1^{n,1}\,\varepsilon_1^{(n+1)\varsigma',-1}\,N'(n,0,1) - \frac{1}{4}\,\varepsilon_1^{(n+1)\varsigma',-1}\,N'(n,1,1)$$

$$+\frac{1}{4}\,\xi_1^{n,1}\,N'(n,0,2) + \frac{1}{8}\,N'(n,1,2),$$

$$\overset{(4)}{G}(1,2,0,0,n)' = \xi_1^{n,-1}\,\varepsilon_2^{(n-1)\varsigma',-2}\,N'(n,0,0) + \frac{1}{2}\,\varepsilon_2^{(n-1)\varsigma',-2}\,N'(n,1,0)$$

$$-\frac{1}{2}\,\xi_1^{n,-1}\,\varepsilon_1^{(n-1)\varsigma',-1}\,N'(n,0,1) - \frac{1}{4}\,\varepsilon_1^{(n-1)\varsigma',-1}\,N'(n,1,1)$$

$$+\frac{1}{4}\,\xi_1^{n,-1}\,N'(n,0,2) + \frac{1}{8}\,N'(n,1,2),$$

$$\overset{(1)}{G}(0,3,0,1,n)' = \varepsilon_3^{n\varsigma',1}\,N'(n,0,0) + \frac{1}{2}\left(\varepsilon_2^{n\varsigma',2} - \varepsilon_2^{n\varsigma',0}\right)N'(n,0,1)$$

$$-\left(\frac{1}{2}\,\varepsilon_1^{n\varsigma',1} + \frac{1}{4}\,\varepsilon_1^{n\varsigma',-1}\right)N'(n,0,2) + \frac{3}{8}\,N'(n,0,3),$$

$$\overset{(3)}{G}(0,3,0,1,n)' = \varepsilon_3^{n\varsigma',-1}\,N'(n,0,0) + \frac{1}{2}\left(\varepsilon_2^{n\varsigma',-2} - \varepsilon_2^{n\varsigma',0}\right)N'(n,0,1)$$

$$-\left(\frac{1}{2}\,\varepsilon_1^{n\varsigma',-1} + \frac{1}{4}\,\varepsilon_1^{n\varsigma',1}\right)N'(n,0,2) + \frac{3}{8}\,N'(n,0,3),$$

$$\overset{(1)}{G}(0, 3, 0, 0, n)' = \varepsilon_3^{ns+3} N'(n, 0, 0) + \frac{1}{2}\varepsilon_2^{ns+2} N'(n, 0, 1) - \frac{1}{4}\varepsilon_1^{ns+1} N'(n, 0, 2)$$
$$+ \frac{1}{8} N'(n, 0, 3),$$

$$\overset{(3)}{G}(0, 3, 0, 0, n)' = -\varepsilon_3^{ns-3} N'(n, 0, 0) + \frac{1}{2}\varepsilon_2^{ns-2} N'(n, 0, 1) - \frac{1}{4}\varepsilon_1^{ns-1} N'(n, 0, 2)$$
$$+ \frac{1}{8} N'(n, 0, 3)$$

L'argument d'un terme avec le coefficient $\overset{(c)}{G}(\mathrm{p}, \mathrm{p}', \mathrm{r}, \mathrm{r}', n)'$ est, d'après les équations (7′), (8′) et (9′), celui-ci:

$$\pm(\mathrm{p} - 2\mathrm{r})(\pi - I') \pm (\mathrm{p}' - 2\mathrm{r}')(\pi' - I'') + (n \mp (\mathrm{p} - 2\mathrm{r}))\mathrm{V}'$$
$$-(n \pm (\mathrm{p}' - 2\mathrm{r}'))(\mathrm{v}' - \varpi') + n(\varpi - \varpi'),$$

c'est à dire:

dans la comb (1): $-(\mathrm{p}-2\mathrm{r})(\pi-I')-(\mathrm{p}'-2\mathrm{r}')(\pi'-I'')+(n+(\mathrm{p}-2\mathrm{r}))\mathrm{V}'$
$-(n-(\mathrm{p}'-2\mathrm{r}'))(\mathrm{v}'-\varpi')+n(\varpi-\varpi')$.

» » » (2): $+(\mathrm{p}-2\mathrm{r})(\pi-I')-(\mathrm{p}'-2\mathrm{r}')(\pi'-I'')+(n-(\mathrm{p}-2\mathrm{r}))\mathrm{V}'$
$-(n-(\mathrm{p}'-2\mathrm{r}'))(\mathrm{v}'-\varpi')+n(\varpi-\varpi')$,

» » » (3): $-(\mathrm{p}-2\mathrm{r})(\pi-I')+(\mathrm{p}'-2\mathrm{r}')(\pi'-I'')+(n+(\mathrm{p}-2\mathrm{r}))\mathrm{V}'$
$-(n+(\mathrm{p}'-2\mathrm{r}'))(\mathrm{v}'-\varpi')+n(\varpi-\varpi')$,

» » » (4): $+(\mathrm{p}-2\mathrm{r})(\pi-I')+(\mathrm{p}'-2\mathrm{r}')(\pi'-I'')+(n-(\mathrm{p}-2\mathrm{r}))\mathrm{V}'$
$-(n+(\mathrm{p}'-2\mathrm{r}'))(\mathrm{v}'-\varpi')+n(\varpi-\varpi')$.

Mais au lieu de ces quatre expressions différentes, on peut utiliser celle-ci:

$$(n - s)(\pi - I') + (s' - n)(\pi' - I'') + s\mathrm{V} - s'(\mathrm{v}' - \varpi') + n(\varpi - \varpi'),$$

qui remplace seule, sans ambiguité, les quatre précédentes. Ayant adopté cette expression de l'argument, il convient de désigner le coefficient par le symbole $\mathrm{G}(\mathrm{p}, \mathrm{p}', s, s', n)'$, analogue à celui que nous avons introduit au n° 97.

Quant à ces arguments, il faut encore rappeler qu'on a écrit partout, pour abréger, V au lieu de V + U et, V′ au lieu de V′ + U′ (voir la remarque qui précède les formules (4, s, s′) du n° 56).

101. M. Masal, dans son mémoire: Formeln und Tafeln zur Berechnung der absoluten Störungen der Planeten, a exprimé les coefficients A( ) et B( ) d'une manière sensiblement différente de celle que nous venons de mettre en usage. Néanmoins, la forme employée par le savant nommé dérive directement des expressions que nous avons mises en évidence. Il suffit, en effet, pour établir la forme de M. Masal, d'introduire, dans nos expressions des coefficients G( ), les développements suivant les transcendantes $\gamma_i^{m,n}$, des fonctions $N(n, s, s')$, développements dont le type est donné par l'équation (24) du n° 78; et encore, de remplacer les coefficients $\varepsilon_s^{\lambda,\nu}$ et $\xi_s^{m,\mu}$ par leurs expressions dans les n°s 29 et 30.

Tant que la somme des indices p et p′ est un petit nombre, les substitutions indiquées s'opèrent avec une grande facilité, et on parvient de la sorte à des résultats assez simples; mais à mesure que ce nombre augmente, la déduction des formules demandées paraîtra plus laborieuse, sans que les résultats obtenus l'emportent essentiellement sur ceux que nous venons de donner dans les derniers numéros. M. Masal a étendu ses transformations jusqu'aux termes du troisième ordre par rapport aux fonctions diastématiques inclusivement: pour donner un échantillon de la forme employée par lui, j'emprunte à son mémoire, les expressions des coefficients appartenant aux termes du premier degré et du degré zéro.

Les voici:

$$\overset{(0)}{A}(0, 0, 0, 0, n) = -2n\gamma_0^{1,n},$$

$$\overset{(1)}{A}(1, 0, 0, 0, n) = [(n^2 + 2n) - 2n^2\varphi]\gamma_0^{1,n} + 2n\gamma_1^{1,n},$$

$$\overset{(2)}{A}(1, 0, 0, 0, n) = [(n^2 + 2n) + 2n^2\varphi]\gamma_0^{1,n} + 2n\gamma_1^{1,n},$$

$$\overset{(1)}{A}(0, 1, 0, 0, n) = n(n - 1)\gamma_0^{1,n} - 2n\gamma_1^{1,n},$$

$$\overset{(3)}{A}(0, 1, 0, 0, n) = n(3n + 1)\gamma_0^{1,n} - 2n\gamma_1^{1,n},$$

$$\overset{(0)}{\mathrm{B}}(0,0,0,0,n) = \quad 2n\gamma_0^{1,n} + 4\gamma_1^{1,n},$$

$$\overset{(1)}{\mathrm{B}}(1,0,0,0,n) = -[n^2 + n - 2n^2\varsigma]\gamma_0^{1,n} - [4n + 6 - 4n\varsigma]\gamma_1^{1,n} - 8\gamma_2^{1,n},$$

$$\overset{(2)}{\mathrm{B}}(1,0,0,0,n) = -[n^2 + n + 2n^2\varsigma]\gamma_0^{1,n} - [4n + 6 + 4n\varsigma]\gamma_1^{1,n} - 8\gamma_2^{1,n},$$

$$\overset{(1)}{\mathrm{B}}(0,1,0,0,n) = -n(n-1)\gamma_0^{1,n} + 6\gamma_1^{1,n} + 8\gamma_2^{1,n},$$

$$\overset{(3)}{\mathrm{B}}(0,1,0,0,n) = \quad (3n^2 + n)\gamma_0^{1,n} + (8n + 6)\gamma_1^{1,n} + 8\gamma_2^{1,n}$$

Pour avoir les formules se rapportant à la fonction perturbatrice complète, il faut mettre, dans les expressions signalées, $\gamma_0^{1,1} - \frac{1}{2}\alpha^2$ au lieu de $\gamma_0^{1,1}$

Si n est égal à zéro, il faut observer que seulement la moitié des valeurs obtenues au moyen de ces formules doit être mise en usage.

Mais il convient d'ajouter aux précédentes, les expressions analogues des coefficients $\overset{(e)}{\mathrm{C}}(\;)$, ce qui nous donnera occasion d'élucider, par un exemple, la manière d'obtenir les formules de M. Masal.

Nous avons d'abord:

$$\alpha\mathrm{R}(n,0,0) = \quad \gamma_0^{3,n},$$

$$\alpha\mathrm{R}(n,1,0) = -(n+3)\gamma_0^{3,n} - 2\gamma_1^{3,n},$$

$$\alpha\mathrm{R}(n,0,1) = \quad (n+2)\gamma_0^{3,n} + 2\gamma_1^{3,n}.$$ [1]

formules, où les deux indices ν, ν' sont partout égaux à zéro et par cette raison supprimés, et où l'on doit mettre $\gamma_0^{3,0} - \alpha^2$ au lieu de $\gamma_0^{3,0}$, afin que les R se rapportent à la fonction perturbatrice complète.

Ensuite, nous aurons, par les formules des numéros 29 et 30,

$$\varepsilon_1^{n\varsigma,-1} = -n\varsigma, \qquad \xi_1^{n,-1} = -n,$$

$$\varepsilon_1^{n\varsigma,1} = \quad n\varsigma, \qquad \xi_1^{n,1} = \quad n$$

---

[1] Les valeurs données dans le texte se trouvent déjà dans le mémoire de M. Harzer. On les déduit aisément, en faisant usage des règles que nous venons d'établir dans les deux

Maintenant, si nous introduisons, dans les cinq premières formules du n° 98, les valeurs signalées, après y avoir remplacé $N(n, s, s')$ par $2R(n, s, s')$, il en résultera:

$$\alpha \overset{(0)}{C}(0, 0, 0, 0, n) = 2\gamma_0^{3,n},$$

---

chapitres précédents: je vais en reproduire le calcul pour donner un spécimen de l'application de ces règles.

On aura d'abord, par la règle donnée vers la fin du n° 79,

$$\Omega^1(n, 0, 0) = \gamma_0^{3,n}, \qquad \Omega^1(n, 2, 0) = \frac{n(n+1)}{1.2}\gamma_0^{3,n} + (2n+3)\gamma_1^{3,n} + 4\gamma_2^{3,n},$$

$$\Omega^1(n, 1, 0) = -n\gamma_0^{3,n} - 2\gamma_1^{3,n}, \qquad \Omega^1(n, 1, 1) = -n(n+3)\gamma_0^{3,n} - 2(2n+5)\gamma_1^{3,n} - 8\gamma_2^{3,n},$$

$$\Omega^1(n, 0, 1) = (n+3)\gamma_0^{3,n} + 2\gamma_1^{3,n}, \qquad \Omega^1(n, 0, 2) = \frac{n^2+5n+6}{1.2}\gamma_0^{3,n} + (2n+7)\gamma_1^{3,n} + 4\gamma_2^{3,n}.$$

Puis, en utilisant la formule (20) du n° 86, on parvient aux valeurs

$$\alpha\Upsilon^1(n, 0, 0) = \gamma_0^{3,n},$$

$$\alpha\Upsilon^1(n, 1, 0) = -(n+1)\gamma_0^{3,n} - 2\gamma_1^{3,n},$$

$$\alpha\Upsilon^1(n, 0, 1) = (n+2)\gamma_0^{3,n} + 2\gamma_1^{3,n},$$

$$\alpha\Upsilon^1(n, 2, 0) = \frac{n^2+3n+2}{1.2}\gamma_0^{3,n} + (2n+5)\gamma_1^{3,n} + 4\gamma_2^{3,n},$$

$$\alpha\Upsilon^1(n, 1, 1) = -(n^2+3n+2)\gamma_0^{3,n} - 2(2n+5)\gamma_1^{3,n} - 8\gamma_2^{3,n},$$

$$\alpha\Upsilon^1(n, 0, 2) = \frac{n^2+3n+2}{1.2}\gamma_0^{3,n} + (2n+5)\gamma_1^{3,n} + 4\gamma_2^{3,n},$$

au moyen desquelles on obtient, par l'équation (26) du n° 87, les résultats signalés dans le texte et encore les suivants

$$\alpha R(n, 2, 0) = \frac{n^2+7n+12}{1.2}\gamma_0^{3,n} + (2n+9)\gamma_1^{3,n} + 4\gamma_2^{3,n},$$

$$\alpha R(n, 1, 1) = -(n^2+5n+6)\gamma_0^{3,n} - 2(2n+7)\gamma_1^{3,n} - 8\gamma_2^{3,n},$$

$$\alpha R(n, 0, 2) = \frac{n^2+3n+2}{1.2}\gamma_0^{3,n} + (2n+5)\gamma_1^{3,n} + 4\gamma_2^{3,n},$$

qui ne diffèrent de ceux de M. HARZER que par la notation des transcendantes $\gamma_i^{3,n}$; en effet, il a écrit $\alpha\gamma_i^{3,n}$ au lieu de $\gamma_i^{3,n}$.

$$\alpha \overset{(1)}{C}(1, 0, 0, 0, n) = -[n + 3 - 2n\varsigma]\gamma_0^{3,n} - 2\gamma_1^{3,n},$$

$$\alpha \overset{(2)}{C}(1, 0, 0, 0, n) = -[n + 3 + 2n\varsigma]\gamma_0^{3,n} - 2\gamma_1^{3,n},$$

$$\alpha \overset{(1)}{C}(0, 1, 0, 0, n) = [-n + 2]\gamma_0^{3,n} + 2\gamma_1^{3,n},$$

$$\alpha \overset{(3)}{C}(0, 1, 0, 0, n) = [3n + 2]\gamma_0^{3,n} + 2\gamma_1^{3,n}.$$

Lorsque n est égal à zéro, la transcendante $\gamma_0^{3,n}$ doit être changée en $\gamma_0^{3,n} - \alpha^2$, et les formules indiquées divisées par 2.

102. Les différentes synechies étant des agrégats périodiques, on peut les représenter moyennant des produits de deux facteurs dont l'un reste toujours, sauf dans les cas exceptionnels, positif et plus grand que zéro, et l'autre est une fonction trigonométrique ayant pour argument initial un nouvel agrégat périodique.

Pour y parvenir, supposons qu'on ait exprimé les huit fonctions $\eta \cos(\pi - \Gamma)$, $\eta \sin(\pi - \Gamma)$, $\eta' \cos(\pi' - \Gamma')$, $\eta' \sin(\pi' - \Gamma')$, $I \cos(\Omega - \Theta)$, $I \sin(\Omega - \Theta)$, $I' \cos(\Omega' - \Theta')$ et $I' \sin(\Omega' - \Theta')$, dont les quatre dernières apparaissent dans les expressions des fonctions Φ_0, Φ_1, Φ_2 et Φ_3 que nous avons introduites dans le n° 93, moyennant les formules (19) du n° 9 et (48) du n° 23.

Rappelons-nous ensuite que l'angle V est donné par la formule

$$\begin{aligned} V &= \varsigma(v - \omega) + L \\ &= \varsigma(\mathrm{v} - \varpi) + L, \end{aligned}$$

et l'angle ω par celle-ci:

$$\omega = \varsigma(v - A) + \Gamma;$$

nous aurons, par conséquent, en admettant la notation

$$\frac{\lambda}{1 - \varsigma} = s - s'\varsigma$$

d'où

$$(10) \qquad \lambda = s(1 - \varsigma) - s'\mu(1 - \varsigma'),$$

la relation

$$(11)\qquad s(v - \varpi) - s'V = \frac{\lambda}{1-\varsigma}(v - \omega) - s'L$$

$$= \lambda v + \frac{\lambda\varsigma}{1-\varsigma}\Lambda - \frac{\lambda}{1-\varsigma}\Gamma - s'L.$$

Après avoir ainsi déterminé la partie principale de l'argument, on parviendra à représenter la synechie des indices s et s' par un résultat de la forme

$$(12)\qquad \sum^{s,s'}\nu = \begin{matrix}C\\S\end{matrix}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots \\ \lambda + \sigma_1 & \lambda + \sigma_2 & \dots \\ b_1 & b_2 & \dots \end{bmatrix}(v),$$

les $a_1, a_2, \dots$ ainsi que les $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ étant de petites quantités constantes de l'ordre des forces perturbatrices, dont les premières sont encore multipliées par certaines puissances des coefficients diastématiques et anastématiques, et les $b_1, b_2, \dots,$ des angles constants dépendant de $\Lambda, \Lambda', \Gamma, \Gamma'$, Θ et Θ'.

Mais l'expression (12) se réduit en un seul terme, en appliquant la méthode de transformation indiquée dans le n° 6. Soient en effet:

$$(13)\qquad \left|\begin{aligned} \varepsilon\cos\theta &= C\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots \\ \sigma_1 - \sigma & \sigma_2 - \sigma & \dots \\ b_1 - b & b_2 - b & \dots \end{bmatrix}(v), \\ \varepsilon\sin\theta &= S\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots \\ \sigma_1 - \sigma & \sigma_2 - \sigma & \dots \\ b_1 - b & b_2 - b & \dots \end{bmatrix}(v), \end{aligned}\right.$$

nous arrivons facilement aux résultats

$$(14)\qquad \sum^{s,s'}\nu = \varepsilon\cos((\lambda + \sigma)v + b + \theta),$$

ou bien

$$(14')\qquad \sum^{s,s'}\nu = \varepsilon\sin((\lambda + \sigma)v + b + \theta);$$

et nous supposons que les dérivées $\frac{d(\varepsilon\cos\theta)}{dv}$ et $\frac{d(\varepsilon\sin\theta)}{dv}$ soient de petites quantités du deuxième ordre par rapport aux forces troublantes, vu qu'autrement la transformation serait sans succès. Evidemment, les constantes σ et b, dont nous supposons la première du même ordre que les $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ pourront être choisies de manière que θ devienne exempt, soit du terme constant, soit du terme séculaire.

Par ces suppositions, on comprend aisément que le premier terme du second membre de la formule

$$(15)\quad \int \varepsilon\cos((\lambda+\sigma)v+b+\theta)dv = \frac{\varepsilon}{\lambda+\sigma}\sin((\lambda+\sigma)v+b+\theta)$$
$$-\frac{1}{\lambda+\sigma}\int\sin((\lambda+\sigma)v+b)\frac{d(\varepsilon\cos\theta)}{dv}dv$$
$$-\frac{1}{\lambda+\sigma}\int\cos((\lambda+\sigma)v+b)\frac{d(\varepsilon\sin\theta)}{dv}dv$$

l'emporte beaucoup sur la somme des deux derniers, tant que λ est une quantité de l'ordre zéro; c'est-à-dire notablement plus grande que σ, en sorte que ce terme donne une valeur approchée de l'intégrale proposée. Les deux derniers termes sont en effet, on l'entend facilement, des quantités du deuxième ordre. Mais si au contraire, λ était aussi une petite quantité, comparable à $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$, le premier terme du second membre ne donnerait plus la valeur approchée de l'intégrale. Pour parvenir à une vraie approximation dans un tel cas, il faut d'autres méthodes d'intégration; et avant tout, il ne faut pas alors oublier que l'argument renferme le terme $-s'U$.

Ce que nous venons de dire s'applique aussi à la formule

$$(15')\quad \int\varepsilon\sin((\lambda+\sigma)v+b+\theta)dv = -\frac{\varepsilon}{\lambda+\sigma}\cos((\lambda+\sigma)v+b+\theta)$$
$$+\frac{1}{\lambda+\sigma}\int\cos((\lambda+\sigma)v+b)\frac{d(\varepsilon\cos\theta)}{dv}dv$$
$$-\frac{1}{\lambda+\sigma}\int\sin((\lambda+\sigma)v+b)\frac{d(\varepsilon\sin\theta)}{dv}dv.$$

Le premier terme du second membre donne encore la valeur approchée de

l'intégrale formant le premier membre, toutes les fois que λ est notablement plus grand que les $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$

On aura également:

(10, a)
$$\int dv \int \varepsilon \cos((\lambda + \sigma)v + b + \theta) dv$$
$$= -\frac{\varepsilon}{(\lambda + \sigma)^2} \cos((\lambda + \sigma)v + b + \theta)$$
$$+ \frac{1}{(\lambda + \sigma)^2} \int \cos((\lambda + \sigma)v + b) \frac{d(\varepsilon \cos \theta)}{dv} dv$$
$$- \frac{1}{(\lambda + \sigma)^2} \int \sin((\lambda + \sigma)v + b) \frac{d(\varepsilon \sin \theta)}{dv} dv$$
$$- \frac{1}{\lambda + \sigma} \int dv \int \sin((\lambda + \sigma)v + b) \frac{d(\varepsilon \cos \theta)}{dv} dv$$
$$- \frac{1}{\lambda + \sigma} \int dv \int \cos((\lambda + \sigma)v + b) \frac{d(\varepsilon \sin \theta)}{dv} dv,$$

ainsi qu'une formule analogue exprimant la double intégrale sur la fonction $\varepsilon \sin((\lambda + \sigma)v + b + \theta)$, savoir

(10, b)
$$\int dv \int \varepsilon \sin((\lambda + \sigma)v + b + \theta)$$
$$= -\frac{\varepsilon}{(\lambda + \sigma)^2} \sin((\lambda + \sigma)v + b + \theta)$$
$$+ \frac{1}{(\lambda + \sigma)^2} \int \sin((\lambda + \sigma)v + b + \theta) \frac{d(\varepsilon \cos \theta)}{dv} dv$$
$$+ \frac{1}{(\lambda + \sigma)^2} \int \cos((\lambda + \sigma)v + b + \theta) \frac{d(\varepsilon \sin \theta)}{dv} dv$$
$$+ \frac{1}{\lambda + \sigma} \int dv \int \cos((\lambda + \sigma)v + b + \theta) \frac{d(\varepsilon \cos \theta)}{dv} dv$$
$$- \frac{1}{\lambda + \sigma} \int dv \int \sin((\lambda + \sigma)v + b + \theta) \frac{d(\varepsilon \sin \theta)}{dv} dv$$

Dans les seconds membres de ces formules, les termes affectés de la signe $\int$ sont évidemment des quantités du second ordre, supposé toujours que λ soit une quantité de l'ordre zéro.

De ces résultats, nous allons tirer une conséquence importante.

En multipliant l'équation (15) par la quantité qui apparaît, dans son premier membre, sous le signe $\int$, il viendra:

$$(17, \mathrm{a}) \qquad \varepsilon \cos((\lambda+\sigma)v + b + \theta) \int \varepsilon \cos((\lambda+\sigma)v + b + \theta)\,dv = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{\lambda+\sigma} \sin 2((\lambda+\sigma)v + b + \theta) + \ldots,$$

les termes qui ne sont pas mis en évidence étant du troisième ordre.

Nous aurons de même:

$$(17, \mathrm{b}) \qquad \varepsilon \sin((\lambda+\sigma)v + b + \theta) \int \varepsilon \sin((\lambda+\sigma)v + b + \theta)\,dv = -\frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{\lambda+\sigma} \sin 2((\lambda+\sigma)v + b + \theta) + \ldots,$$

et encore:

$$(18, \mathrm{a}) \qquad \varepsilon \sin((\lambda+\sigma)v + b + \theta) \int dv \int \varepsilon \cos((\lambda+\sigma)v + b + \theta)\,dv = -\frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{(\lambda+\sigma)^2} \sin 2((\lambda+\sigma)v + b + \theta) + \ldots,$$

$$(18, \mathrm{b}) \qquad \varepsilon \cos((\lambda+\sigma)v + b + \theta) \int dv \int \varepsilon \sin((\lambda+\sigma)v + b + \theta)\,dv = -\frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{(\lambda+\sigma)^2} \sin 2((\lambda+\sigma)v + b + \theta) + \ldots.$$

Puisque les premiers termes de droite, dans les quatre formules (17, a), (17, b), (18, a) et (18, b), ont pour argument le double de $(\lambda+\sigma)v + b + \theta$, et que les termes supprimés sont toujours du troisième ordre, on conclut

que les termes sousélémentaires qui peuvent se produire dans les seconds membres sont tout au moins du troisième ordre.

On parvient à un résultat analogue en examinant la question suivante.

Supposons d'abord qu'il s'agisse de déterminer une quantité R par l'intégration de l'équation

$$(19) \qquad \frac{d^2R}{dv^2} + (1 - \beta_1) R = \varepsilon \cos((\lambda + \sigma)v + b + \theta),$$

ε, λ, σ, b et θ ayant la même signification qu'auparavant, et β_1, celle d'une constante du premier ordre. On en tire, après avoir posé:

$$(20) \qquad R = \frac{\varepsilon}{1 - \beta_1 - (\lambda + \sigma)^2} \cos((\lambda + \sigma)v + b + \theta) + \varphi,$$

l'équation que voici:

$$(21) \qquad \frac{d^2\varphi}{dv^2} + (1 - \beta_1)\varphi = \frac{2(\lambda + \sigma)}{1 - \beta_1 - (\lambda + \sigma)^2} \sin((\lambda + \sigma)v + b) \frac{d(\varepsilon \cos \theta)}{dv}$$
$$+ \frac{2(\lambda + \sigma)}{1 - \beta_1 - (\lambda + \sigma)^2} \cos((\lambda + \sigma)v + b) \frac{d(\varepsilon \sin \theta)}{dv}$$
$$- \frac{1}{1 - \beta_1 - (\lambda + \sigma)^2} \cos((\lambda + \sigma)v + b) \frac{d^2(\varepsilon \cos \theta)}{dv^2}$$
$$+ \frac{1}{1 - \beta_1 - (\lambda + \sigma)^2} \sin((\lambda + \sigma)v + b) \frac{d^2(\varepsilon \sin \theta)}{dv^2}$$

En intégrant cette équation, il viendra, relativement à φ, si λ n'est pas trop près de l'unité, de sorte que $1 - \beta_1 - (\lambda + \sigma)^2$ puisse être considéré comme une petite quantité du premier ordre, un résultat du deuxième ordre.

Admettons ensuite qu'on soit obligé de former le produit de la fonction R par le facteur

$$Q = \zeta \sin((\lambda + \sigma)v + b_1 + \theta_1),$$

ζ étant un coefficient variable de la même nature que ε, et b_1 ainsi que θ_1, des quantités peu différentes de b et de θ, de sorte que la différence

$$b_1 - b + \theta_1 - \theta,$$

qui est exempte de terme séculaire, puisse être considérée comme une quantité du premier ordre.

En effectuant la multiplication, il viendra:

$$RQ = \frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon\zeta}{1 - \beta_1 - (\lambda + \sigma)^2}\left[\sin\left(2(\lambda + \sigma)v + b_1 + b + \theta_1 + \theta_1\right) + \sin(b_1 - b + \theta_1 - \theta)\right] + \varsigma\zeta \sin\left((\lambda + \sigma)v + b_1 + \theta_1\right),$$

résultat qui montre que les termes sousélémentaires, se produisant dans l'expression de RQ, sont tout au moins du troisième ordre.

103. Il convient de considérer en particulier la synechie $\overset{1,0}{\Sigma}\nu$, et de la réduire à la forme fondamentale.

Prenons d'abord l'équation (6), et introduisons-y:

$$\pm(\mathrm{p} - 2\mathrm{r}) = n - 1\,; \qquad \mp(\mathrm{p}' - 2\mathrm{r}') = n,$$

ce qui revient à mettre:

$$s = 1\,; \qquad s' = 0.$$

Il s'ensuit la condition

$$\mp(\mathrm{p} - 2\mathrm{r}) \mp (\mathrm{p}' - 2\mathrm{r}') = 1,$$

à laquelle sont assujettis les quatre indices p, r, p′ et r′.

Evidemment, en attribuant à n les valeurs 0, 1, 2, ..., on aura:

pour	$n = 0$:	$\mathrm{p} = 2\mathrm{r} + 1$;	$\mathrm{p}' = 2\mathrm{r}'$,
»	$n = 1$:	$\mathrm{p} = 2\mathrm{r}$;	$\mathrm{p}' = 2\mathrm{r}' + 1$,
»	$n = 2$:	$\mathrm{p} = 2\mathrm{r} + 1$;	$\mathrm{p}' = 2\mathrm{r}' + 2$,
»	$n = 3$:	$\mathrm{p} = 2\mathrm{r} + 2$;	$\mathrm{p}' = 2\mathrm{r}' + 3$

etc.,

et l'équation (6) prend maintenant la forme suivante:

$$(22)\qquad N = \sum\sum\sum\sum(-1)^{\nu}\overset{(1)}{G}(2r+1\,,\,2r',\,r\,,\,r',\,0)_{\nu,\nu}\,\eta^{2r+1+2\nu}\eta'^{2r'+2\nu}$$

$$\times\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\{-(\pi-\Gamma)+v-\varpi\}$$

$$+\,2\sum\sum\sum\sum(-1)^{\nu}\overset{(2)}{G}(2r\,,\,2r'+1\,,\,r\,,\,r',\,1)_{\nu,\nu'}\,\eta^{2r+2\nu}\eta'^{2r'+1+2\nu}$$

$$\times\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\{-(\pi'-\Gamma')+v-\varpi+\varpi-\varpi'\}$$

$$+\,2\sum\sum\sum\sum(-1)^{\nu}\overset{(2)}{G}(2r+1\,,\,2r'+2\,,\,r\,,\,r',\,2)_{\nu,\nu}\,\eta^{2r+1+2\nu}\eta'^{2r'+2+2\nu}$$

$$\times\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\{\pi-\Gamma-2(\pi'-\Gamma')+v-\varpi+2(\varpi-\varpi')\}$$

$$+\,2\sum\sum\sum\sum(-1)^{\nu}\overset{(2)}{G}(2r+2\,,\,2r'+3\,,\,r\,,\,r',\,3)_{\nu,\nu}\,\eta^{2r+2+2\nu}\eta'^{2r'+3+2\nu}$$

$$\times\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\{2(\pi-\Gamma)-3(\pi'-\Gamma')+v-\varpi+3(\varpi-\varpi')\}$$

$$+\ \ldots\ldots$$

Cela étant, nous allons mettre en évidence les termes, jusqu'au troisième degré inclusivement, faisant partie des fonctions $\frac{\mu}{\mu}(1-\eta^2)P^{(0)}$ et $\frac{\mu}{\mu}Q^{(0)}$. J'écris ces termes de la manière suivante:

$$(23)\qquad \frac{\mu}{\mu}(1-\eta^2)\overset{1,0}{\sum}\nu(P^{(0)})$$

$$=\Big\{\overset{(1)}{B}(1,0,0,0,0)_{0,0}\,\eta+\Big(\overset{(1)}{B}(3,0,1,0,0)_{0,0}-\overset{(1)}{B}(1,0,0,0,0)_{1,0}\Big)\eta^3$$

$$+\Big(\overset{(1)}{B}(1,2,0,1,0)_{0,0}+\overset{(1)}{B}(1,0,0,0,0)_{0,1}\Big)\eta\eta'^2\Big\}\cos F$$

$$+\Big\{\overset{(2)}{B}(0,1,0,0,1)_{0,0}\,\eta'+\Big(\overset{(2)}{B}(2,1,1,0,1)_{0,0}-\overset{(2)}{B}(0,1,0,0,1)_{1,0}\Big)\eta^2\eta'$$

$$+\Big(\overset{(2)}{B}(0,3,0,1,1)_{0,0}+\overset{(2)}{B}(0,1,0,0,1)_{0,1}\Big)\eta'^3\Big\}\cos(F'+v-v')$$

$$+\,\overset{(2)}{B}(1,2,0,0,2)_{0,0}\,\eta\eta'^2\cos(2F'-F+2(v-v'))$$

$$(24)\quad {}^{''}_{''}\overset{1,0}{\Sigma}\nu(Q^{(0)}) = \Big\{\overset{(1)}{A}(1,0,0,0,0)_{0,0}\eta$$

$$+\Big(\overset{(1)}{A}(3,0,1,0,0)_{0,0} - \overset{(1)}{A}(1,0,0,0,0)_{1,0}\Big)\eta^3$$

$$+\Big(\overset{(1)}{A}(1,2,0,1,0)_{0,0} + \overset{(1)}{A}(1,0,0,0,0)_{0,1}\Big)\eta\eta'^2\Big\}\sin F$$

$$+\Big\{\overset{(2)}{A}(0,1,0,0,1)_{0,0}\eta'$$

$$+\Big(\overset{(2)}{A}(2,1,1,0,1)_{0,0} - \overset{(2)}{A}(0,1,0,0,1)_{1,0}\Big)\eta^2\eta'$$

$$+\Big(\overset{(2)}{A}(0,3,0,1,1)_{0,0} + \overset{(2)}{A}(0,1,0,0,1)_{0,1}\Big)\eta'^3\Big\}\sin(F'+v-v')$$

$$+\overset{(2)}{A}(1,2,0,0,2)_{0,0}\eta\eta'^2\sin(2F'-F+2(v-v')).$$

Dans ces formules, F et F′ désignent toujours les arguments diastématiques des deux planètes.

Mais les termes que nous venons de trouver, soit dans l'expression (22), soit dans les formules (23) et (24), ne sont pas encore au nombre complet; c'est-à-dire: outre les termes mis en évidence, il y a encore des termes du même genre appartenant à la synechie $\overset{-1,0}{\Sigma}\nu$. En ne considérant que les termes de cette synechie, nous aurons:

$$(22-)\quad X = \Sigma\Sigma\Sigma\Sigma(-1)^{\nu}\overset{(2)}{G}(2r+1,2r',r,r',0)_{\nu,\nu}\eta^{2r+1+2\nu}\eta'^{2r'+2\nu}$$

$$\times\frac{\cos}{\sin}[\pi - \Gamma - (v-\varpi)]$$

$$+2\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma(-1)^{\nu}\overset{(2)}{G}(2r+2,2r'+1,r,r',1)_{\nu,\nu}\eta^{2r+2+2\nu}\eta'^{2r'+1+2\nu}$$

$$\times\frac{\cos}{\sin}[2(\pi-\Gamma)-(\pi'-\Gamma')-(v-\varpi)+\varpi-\varpi']$$

$$+2\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma(-1)^{\nu}\overset{(2)}{G}(2r+3,2r'+2,r,r',2)_{\nu,\nu}\eta^{2r+3+2\nu}\eta'^{2r'+2+2\nu}$$

$$\times\frac{\cos}{\sin}[3(\pi-\Gamma)-2(\pi'-\Gamma')-(v-\varpi)+2(\varpi-\varpi')]$$

$$+\ldots,$$

d'où l'on tire, comme auparavant,

$$(23-)\quad \frac{\mu}{\mu'}(1-\eta^2)\overset{-1,0}{\Sigma}\nu(P^{(0)}) = \Big\{\overset{(2)}{B}(1,0,0,0,0)_{0,0}\eta$$

$$+\Big(\overset{(2)}{B}(3,0,1,0,0)_{0,0}-\overset{(2)}{B}(1,0,0,0,0)_{1,0}\Big)\eta^3$$

$$+\Big(\overset{(2)}{B}(1,2,0,1,0)_{0,0}+\overset{(2)}{B}(1,0,0,0,0)_{0,1}\Big)\eta\eta'^2\Big\}\cos F$$

$$+\overset{(2)}{B}(2,1,0,0,1)_{0,0}\eta^2\eta'\cos(2F-F'-(v-v')),$$

$$(24-)\quad \frac{\mu}{\mu'}\overset{-1,0}{\Sigma}\nu(Q^{(0)}) = -\Big\{\overset{(2)}{A}(1,0,0,0,0)_{0,0}\eta$$

$$+\Big(\overset{(2)}{A}(3,0,1,0,0)_{0,0}-\overset{(2)}{A}(1,0,0,0,0)_{1,0}\Big)\eta^3$$

$$+\Big(\overset{(2)}{A}(1,2,0,1,0)_{0,0}+\overset{(2)}{A}(1,0,0,0,0)_{0,1}\Big)\eta\eta'^2\Big\}\sin F$$

$$-\overset{(2)}{A}(2,1,0,0,1)_{0,0}\eta^2\eta'\sin(2F-F'-(v-v')).$$

En opérant de la manière que je vais indiquer, les quatre formules (23), (24), (23 —), (24 —) se réduisent à la forme fondamentale, ou plutôt à une forme qu'on peut appeler forme fondamentale généralisée.

Nous connaissons déjà les valeurs

$$(\alpha)\qquad \eta\cos F = \rho;\qquad \eta\sin F = -\frac{d\rho}{dv}-(\lambda),^{1}$$

ρ étant placé au lieu de (ρ); il s'ensuit immédiatement un résultat de la forme

$$(\beta)\qquad \eta^2 = \rho^2+\left(\frac{d\rho}{dv}\right)^2+(\mu).$$

L'expression de (μ) étant celle-ci:

$$(\mu) = 2\frac{d\rho}{dv}(\lambda)+(\lambda)^2,$$

---

[1] Voir le n° 70.

on en conclut que (μ) est une quantité du premier ordre et du deuxième degré.

Mais puisqu'on a:

$$\eta^2 + \eta^2 \cos 2\mathrm{F} = 2\rho^2,$$

on obtient ensuite:

$$(\gamma) \qquad \eta^2 \cos 2\mathrm{F} = \rho^2 - \left(\frac{d\rho}{d\mathrm{v}}\right)^2 - (\mu).$$

Aux relations (α), (β), (γ), se joignent les suivantes qui ne sont, toutefois, que des simples conséquences des premières:

$$(\delta) \qquad \eta^2 \sin 2\mathrm{F} = -2\rho\frac{d\rho}{d\mathrm{v}} - 2\rho(\lambda),$$

$$(\varepsilon) \qquad \eta^3 \cos \mathrm{F} = \eta^2\rho = \rho^3 + \rho\left(\frac{d\rho}{d\mathrm{v}}\right)^2 + \rho(\mu),$$

$$(\zeta) \qquad \eta^3 \sin \mathrm{F} = -\eta^2\left(\frac{d\rho}{d\mathrm{v}} + (\lambda)\right)$$

$$= -\left(\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\mathrm{v}}\right)^2\right)\frac{d\rho}{d\mathrm{v}}$$

$$-\left(\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\mathrm{v}}\right)^2\right)(\lambda) - \frac{d\rho}{d\mathrm{v}}(\mu) - (\lambda)(\mu).$$

On comprend sur-le-champ que les formules mises en évidence restent en vigueur, si l'on y change: ρ en ρ', v en v', F en F', η en η', (λ) en (λ') et (μ) en (μ'). Par cette remarque, on déduit les expressions que voici:

$$(\eta) \begin{cases} \eta\eta'^2 \cos \mathrm{F} = \rho\left(\rho'^2 + \left(\frac{d\rho}{d\mathrm{v}}\right)^2\right) + \rho(\mu'), \\ \eta\eta'^2 \sin \mathrm{F} = -\frac{d\rho}{d\mathrm{v}}\left(\rho'^2 + \left(\frac{d\rho}{d\mathrm{v}}\right)^2\right) - (\lambda)\left(\rho'^2 + \left(\frac{d\rho}{d\mathrm{v}}\right)^2\right) - \frac{d\rho}{d\mathrm{v}}(\mu') - (\lambda)(\mu'), \end{cases}$$

$$
(\vartheta)\quad
\begin{cases}
\eta\eta'^2\cos(2F'-F) = \rho\left(\rho'^2-\left(\frac{d\rho'}{dv}\right)^2\right)+2\rho'\frac{d\rho}{dv}\frac{d\rho'}{dv} \\
\qquad -\rho(\mu')+2\rho'\frac{d\rho'}{dv}(\lambda)+2\rho'\frac{d\rho}{dv}(\lambda')+2\rho'(\lambda)(\lambda'), \\
\eta\eta'^2\sin(2F'-F) = -2\rho\rho'\frac{d\rho'}{dv}+\frac{d\rho}{dv}\left(\rho'^2-\left(\frac{d\rho'}{dv}\right)^2\right) \\
\qquad -2\rho\rho'(\lambda')+\left(\rho'^2-\left(\frac{d\rho'}{dv}\right)^2\right)(\lambda)-\frac{d\rho}{dv}(\mu')-(\lambda)(\mu'),
\end{cases}
$$

dans lesquelles on peut changer, simultanément, ρ en ρ', ρ' en ρ, v en v′, v′ en v, etc.

Après avoir établi ces formules, nous allons d'abord réunir les termes appartenant aux deux synechies considérées. Nous aurons de la sorte les résultats que voici:

$$
(25)\qquad \frac{\mu'}{\mu}(1-\eta^2)\left|\sum^{1,0}\nu(P^{(0)})+\sum^{1,0}\nu(P^{(0)})\right|
$$

$$
[b_{1,0}^{(0)}\eta+b_{3,0}^{(0)}\eta^3+b_{1,2}^{(0)}\eta\eta'^2]\cos F
$$

$$
+[b_{0,1}^{(1)}\eta'+b_{2,0}^{(1)}\eta^2\eta'+b_{0,3}^{(1)}\eta'^3][\cos F'\cos(v-v')-\sin F'\sin(v-v')]
$$

$$
+b_{2,1}^{(-1)}\eta^2\eta'[\cos(2F-F')\cos(v-v')+\sin(2F-F')\sin(v-v')]
$$

$$
+b_{1,2}^{(2)}\eta\eta'^2[\cos(2F'-F)\cos 2(v-v')-\sin(2F'-F)\sin 2(v-v')],
$$

$$
(26)\qquad \frac{\mu'}{\mu}\left|\sum^{1,0}\nu(Q^{(0)})+\sum^{1,0}\nu(Q^{(0)})\right|
$$

$$
=\quad [a_{0,1}^{(1)}\eta'+a_{2,1}^{(1)}\eta^2\eta'+a_{0,3}^{(1)}\eta'^3][\sin F'\cos(v-v')+\cos F'\sin(v-v')]
$$

$$
-a_{2,1}^{(-1)}\eta^2\eta'[\sin(2F-F')\cos(v-v')-\cos(2F-F')\sin(v-v')]
$$

$$
+a_{1,2}^{(2)}\eta\eta'^2[\sin(2F'-F)\cos 2(v-v')+\cos(2F'-F)\sin 2(v-v')],
$$

où les notations suivantes sont mises en usage:

$$b_{1,0}^{(0)} = \overset{(1)}{\mathrm{B}}(1,0,0,0,0)_{0,0} + \overset{(2)}{\mathrm{B}}(1,0,0,0,0)_{0,0},$$

$$b_{3,0}^{(0)} = \overset{(1)}{\mathrm{B}}(3,0,1,0,0)_{0,0} - \overset{(1)}{\mathrm{B}}(1,0,0,0,0)_{1,0} + \overset{(2)}{\mathrm{B}}(3,0,1,0,0)_{0,0} - \overset{(2)}{\mathrm{B}}(1,0,0,0,0)_{1,0},$$

$$b_{1,2}^{(0)} = \overset{(1)}{\mathrm{B}}(1,2,0,1,0)_{0,0} + \overset{(1)}{\mathrm{B}}(1,0,0,0,0)_{0,1} + \overset{(2)}{\mathrm{B}}(1,2,0,1,0)_{0,0} - \overset{(2)}{\mathrm{B}}(1,0,0,0,0)_{0,1},$$

$$b_{0,1}^{(1)} = \overset{(2)}{\mathrm{B}}(0,1,0,0,1)_{0,0},$$

$$b_{2,1}^{(1)} = \overset{(2)}{\mathrm{B}}(2,1,1,0,1)_{0,0} - \overset{(2)}{\mathrm{B}}(0,1,0,0,1)_{1,0},$$

$$b_{0,3}^{(1)} = \overset{(2)}{\mathrm{B}}(0,3,0,1,1)_{0,0} + \overset{(2)}{\mathrm{B}}(0,1,0,0,1)_{0,1},$$

$$b_{2,1}^{(-1)} = \overset{(2)}{\mathrm{B}}(2,1,0,0,1)_{0,0},$$

$$b_{1,2}^{(2)} = \overset{(2)}{\mathrm{B}}(1,2,0,0,2)_{0,0},$$

$$a_{0,1}^{(1)} = \overset{(2)}{\mathrm{A}}(0,1,0,0,1)_{0,0},$$

$$a_{2,1}^{(1)} = \overset{(2)}{\mathrm{A}}(2,1,1,0,1)_{0,0} - \overset{(2)}{\mathrm{A}}(0,1,0,0,1)_{1,0},$$

$$a_{0,3}^{(1)} = \overset{(2)}{\mathrm{A}}(0,3,0,1,1)_{0,0} + \overset{(2)}{\mathrm{A}}(0,1,0,0,1)_{0,1},$$

$$a_{2,1}^{(-1)} = \overset{(2)}{\mathrm{A}}(2,1,0,0,1)_{0,0},$$

$$a_{1,2}^{(2)} = \overset{(2)}{\mathrm{A}}(1,2,0,0,2)_{0,0}$$

Maintenant, si nous introduisons, dans les formules (25) et (26), les expressions de $\eta \cos \mathrm{F}$, $\eta' \cos \mathrm{F}'$, etc., données par les formules (α), (β), ..., nous parviendrons aux résultats se trouvant ci-dessous, où les termes dépendant de (λ) et de (μ) sont supprimés.

$$(27)\qquad \frac{\mu'}{\mu}(1-\eta^2)\left\{\sum^{1,0}\nu(\mathrm{P}^{(0)})+\sum^{-1,0}\nu(\mathrm{P}^{(0)})\right\}$$

$$= [b_{1,0}^{(0)} + b_{3,0}^{(0)}\eta^2 + b_{1,2}^{(0)}\eta'^2]\rho$$

$$+ [b_{0,1}^{(1)} + b_{2,1}^{(1)}\eta^2 + b_{0,3}^{(1)}\eta'^2]\rho' \cos(\mathrm{v}-\mathrm{v}')$$

$$+ [b_{0,1}^{(1)} + b_{2,1}^{(1)}\eta^2 + b_{0,3}^{(1)}\eta'^2]\frac{d\rho'}{d\mathrm{v}} \sin(\mathrm{v}-\mathrm{v}')$$

$$+ b_{2,1}^{(-1)}\left[\left(\rho^2-\left(\frac{d\rho}{d\mathrm{v}}\right)^2\right)\rho' + 2\rho\frac{d\rho}{d\mathrm{v}}\frac{d\rho'}{d\mathrm{v}}\right]\cos(\mathrm{v}-\mathrm{v}')$$

$$+ b_{2,1}^{(-1)}\left[\left(\rho^2-\left(\frac{d\rho}{d\mathrm{v}}\right)^2\right)\frac{d\rho'}{d\mathrm{v}} - 2\rho\rho'\frac{d\rho}{d\mathrm{v}}\right]\sin(\mathrm{v}-\mathrm{v}')$$

$$+ b_{1,2}^{(2)}\left[\rho\left(\rho'^2-\left(\frac{d\rho'}{d\mathrm{v}}\right)^2\right) + 2\rho'\frac{d\rho}{d\mathrm{v}}\frac{d\rho'}{d\mathrm{v}}\right]\cos 2(\mathrm{v}-\mathrm{v}')$$

$$- b_{1,2}^{(2)}\left[\frac{d\rho}{d\mathrm{v}}\left(\rho'^2-\left(\frac{d\rho'}{d\mathrm{v}}\right)^2\right) - 2\rho\rho'\frac{d\rho'}{d\mathrm{v}}\right]\sin 2(\mathrm{v}-\mathrm{v}'),$$

$$(28)\qquad \frac{\mu'}{\mu}\left\{\sum^{1,0}\nu(\mathrm{Q}^{(0)})+\sum^{-1,0}\nu(\mathrm{Q}^{(0)})\right\}$$

$$= [a_{0,1}^{(1)} + a_{2,1}^{(1)}\eta^2 + a_{0,3}^{(1)}\eta'^2]\rho' \sin(\mathrm{v}-\mathrm{v}')$$

$$- [a_{0,1}^{(1)} + a_{2,1}^{(1)}\eta^2 + a_{0,3}^{(1)}\eta'^2]\frac{d\rho'}{d\mathrm{v}} \cos(\mathrm{v}-\mathrm{v}')$$

$$- a_{2,1}^{(-1)}\left[\left(\rho^2-\left(\frac{d\rho}{d\mathrm{v}}\right)^2\right)\frac{d\rho'}{d\mathrm{v}} - 2\rho\rho'\frac{d\rho}{d\mathrm{v}}\right]\cos(\mathrm{v}-\mathrm{v}')$$

$$+ a_{2,1}^{(-1)}\left[\left(\rho^2-\left(\frac{d\rho}{d\mathrm{v}}\right)^2\right)\rho' + 2\rho\frac{d\rho}{d\mathrm{v}}\frac{d\rho'}{d\mathrm{v}}\right]\sin(\mathrm{v}-\mathrm{v}')$$

$$+ a_{1,2}^{(2)}\left[\frac{d\rho}{d\mathrm{v}}\left(\rho'^2-\left(\frac{d\rho'}{d\mathrm{v}}\right)^2\right) - 2\rho\rho'\frac{d\rho'}{d\mathrm{v}}\right]\cos 2(\mathrm{v}-\mathrm{v}')$$

$$+ a_{1,2}^{(2)}\left[\rho\left(\rho'^2-\left(\frac{d\rho}{d\mathrm{v}}\right)^2\right) + 2\rho'\frac{d\rho}{d\mathrm{v}}\frac{d\rho}{d\mathrm{v}}\right]\sin 2(\mathrm{v}-\mathrm{v}').$$

Dans ces formules, on peut, n'importe quand, remplacer η^2 par $\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{dv}\right)^2$ et η'^2 par $\rho'^2 + \left(\frac{d\rho'}{dv}\right)^2$, et on restituera ainsi la forme appelée forme généralisée, parce qu'elle renferme, outre ρ et ρ', encore les premières dérivées de ces fonctions.

104. De la même manière que nous venons d'opérer dans le numéro précédent, on arrive aux résultats tout à fait semblables aux formules (27) et (28), exprimant les synechies $\overset{0,1}{\Sigma}\nu$ et $\overset{0,-1}{\Sigma}\nu$ tirées des fonctions $P'^{(0)}$ et $Q'^{(0)}$. On aura en effet, par les équations (7′) et (8′), les termes

(23′)
$$\frac{m'_l}{m'_k}(1-\eta'^2)\overset{0,1}{\Sigma}\nu(P'^{(0)})$$
$$\begin{aligned}
&= \Big\{\overset{(3)}{B}(0,1,0,0,0)'_{0,0}\eta' + \Big(\overset{(3)}{B}(0,3,0,1,0)'_{0,0} + \overset{(3)}{B}(0,1,0,0,0)'_{0,1}\Big)\eta'^3 \\
&\qquad + \Big(\overset{(3)}{B}(2,1,1,0,0)'_{0,0} - \overset{(3)}{B}(0,1,0,0,0)'_{1,0}\Big)\eta^2\eta'\Big\}\cos(-F') \\
&+ \Big\{\overset{(2)}{B}(1,0,0,0,1)'_{0,0}\eta + \Big(\overset{(2)}{B}(3,0,1,0,1)'_{0,0} - \overset{(2)}{B}(1,0,0,0,1)'_{1,0}\Big)\eta^3 \\
&\qquad + \Big(\overset{(2)}{B}(1,2,0,1,1)'_{0,0} + \overset{(2)}{B}(1,0,0,0,1)'_{0,1}\Big)\eta\eta'^2\Big\}\cos(-F+v-v') \\
&+ \overset{(2)}{B}(2,1,0,0,2)'_{0,0}\eta^2\eta'\cos(-2F+F'+2(v-v')),
\end{aligned}$$

(24′)
$$\frac{m'_l}{m'_k}\overset{0,1}{\Sigma}\nu(Q'^{(0)})$$
$$\begin{aligned}
&= \Big\{\overset{(3)}{A}(0,1,0,0,0)'_{0,0}\eta' + \Big(\overset{(3)}{A}(0,3,0,1,0)'_{0,0} + \overset{(3)}{A}(0,1,0,0,0)'_{0,1}\Big)\eta'^3 \\
&\qquad + \Big(\overset{(3)}{A}(2,1,1,0,0)'_{0,0} - \overset{(3)}{A}(0,1,0,0,0)'_{1,0}\Big)\eta^2\eta'\Big\}\sin(-F') \\
&+ \ldots,
\end{aligned}$$

(23′ —)
$$\frac{m'_l}{m'_k}(1-\eta'^2)\overset{0,-1}{\Sigma}\nu(P'^{(0)})$$
$$\begin{aligned}
&= \Big\{\overset{(2)}{B}(0,1,0,0,0)'_{0,0}\eta' + \Big(\overset{(2)}{B}(2,1,1,0,0)'_{0,0} - \overset{(2)}{B}(0,1,0,0,0)'_{1,0}\Big)\eta^2\eta' \\
&\qquad + \Big(\overset{(2)}{B}(0,3,0,1,0)'_{0,0} + \overset{(2)}{B}(0,1,0,0,0)'_{0,1}\Big)\eta'^3\Big\}\cos F' \\
&+ \overset{(2)}{B}(1,2,0,0,1)'_{0,0}\eta\eta'^2\cos(2F'-F+v-v').
\end{aligned}$$

$$(24'—) \qquad \frac{\mu_l}{\mu_k} \overset{0,-1}{\Sigma}\nu(Q'^{(0)})$$

$$= \Big\{ \overset{(2)}{A}(0,1,0,0,0)'_{0,0}\eta' + \Big(\overset{(2)}{A}(2,1,1,0,0)'_{0,0} - \overset{(2)}{A}(0,1,0,0,0)'_{1,0}\Big)\eta^2\eta'$$

$$+ \ldots \Big\} \sin F'$$

$$+ \ldots .$$

Maintenant, si l'on forme les sommes des synechies $\overset{0,1}{\Sigma}\nu$ et $\overset{0,-1}{\Sigma}\nu$, que l'on y introduise les expressions de $\eta \cos F$, $\eta' \cos F'$, etc., données par les équations (α), (β), . . . , et qu'on établisse finalement les notations que voici:

$$b'^{(0)}_{0,1} = \overset{(3)}{B}(0,1,0,0,0)'_{0,0} + \overset{(2)}{B}(0,1,0,0,0)'_{0,0},$$

$$b'^{(0)}_{2,1} = \overset{(3)}{B}(2,1,1,0,0)'_{0,0} - \overset{(3)}{B}(0,1,0,0,0)'_{1,0} + \overset{(2)}{B}(2,1,1,0,0)'_{0,0} - \overset{(2)}{B}(0,1,0,0,0)'_{1,0},$$

$$b'^{(0)}_{0,3} = \overset{(3)}{B}(0,3,0,1,0)'_{0,0} + \overset{(3)}{B}(0,1,0,0,0)'_{0,1} + \overset{(2)}{B}(0,3,0,1,0)'_{0,0} + \overset{(2)}{B}(0,1,0,0,0)'_{0,1},$$

$$b'^{(1)}_{1,0} = \overset{(2)}{B}(1,0,0,0,1)'_{0,0},$$

$$b'^{(1)}_{3,0} = \overset{(2)}{B}(3,0,1,0,1)'_{0,0} - \overset{(2)}{B}(1,0,0,0,1)'_{1,0},$$

$$b'^{(1)}_{1,2} = \overset{(2)}{B}(1,2,0,1,1)'_{0,0} + \overset{(2)}{B}(1,0,0,0,1)'_{0,1},$$

$$b'^{(-1)}_{1,2} = \overset{(2)}{B}(1,2,0,0,1)'_{0,0},$$

$$b'^{(2)}_{2,1} = \overset{(2)}{B}(2,1,0,0,2)'_{0,0},$$

$$a'^{(1)}_{1,0} = \overset{(2)}{A}(1,0,0,0,1)'_{0,0},$$

etc.,

il résultera:

(27′) $$\frac{m_l}{m_k}(1 - \gamma'^2)\left\{\sum^{0,1}\nu(\mathrm{P}'^{(0)}) + \sum^{0,\ 1}\nu(\mathrm{P}'^{(0)})\right\}$$

$$- [b'^{(0)}_{0,1} + b'^{(0)}_{2,1}\gamma^2 + b'^{(0)}_{0,3}\gamma'^2]\rho'$$

$$+ [b'^{(1)}_{1,0} + b'^{(1)}_{3,0}\gamma^2 + b'^{(1)}_{1,2}\gamma'^2]\rho \cos(\mathrm{v} - \mathrm{v}')$$

$$- [b'^{(1)}_{1,0} + b'^{(1)}_{3,0}\gamma^2 + b'^{(1)}_{1,2}\gamma'^2]\frac{d\rho}{d\mathrm{v}}\sin(\mathrm{v} - \mathrm{v}')$$

$$+ b'^{(\ 1)}_{1,2}\left[\rho\left(\rho'^2 - \left(\frac{d\rho'}{d\mathrm{v}}\right)^2\right) + 2\rho'\frac{d\rho}{d\mathrm{v}}\frac{d\rho'}{d\mathrm{v}}\right]\cos(\mathrm{v} - \mathrm{v}')$$

$$- b'^{(-1)}_{1,2}\left[\frac{d\rho}{d\mathrm{v}}\left(\rho'^2 - \left(\frac{d\rho'}{d\mathrm{v}}\right)^2\right) - 2\rho\rho'\frac{d\rho'}{d\mathrm{v}}\right]\sin(\mathrm{v} - \mathrm{v}')$$

$$+ b'^{(2)}_{2,1}\left[\rho'\left(\rho^2 - \left(\frac{d\rho}{d\mathrm{v}}\right)^2\right) + 2\rho\frac{d\rho}{d\mathrm{v}}\frac{d\rho'}{d\mathrm{v}}\right]\cos 2(\mathrm{v} - \mathrm{v}')$$

$$+ b'^{(2)}_{2,1}\left[\frac{d\rho'}{d\mathrm{v}}\left(\rho^2 - \left(\frac{d\rho}{d\mathrm{v}}\right)^2\right) - 2\rho\rho'\frac{d\rho}{d\mathrm{v}}\right]\sin 2(\mathrm{v} - \mathrm{v}'),$$

(28′) $$\frac{m_l}{m_k}\left\{\sum^{0,1}\nu(\mathrm{Q}'^{(0)}) + \sum^{0,\ 1}\nu(\mathrm{Q}'^{(0)})\right\}$$

$$- [a'^{(1)}_{1,0} + a'^{(1)}_{3,0}\gamma^2 + a'^{(1)}_{1,2}\gamma'^2]\rho \sin(\mathrm{v} - \mathrm{v}')$$

$$+ [a'^{(1)}_{1,0} + a'^{(1)}_{3,0}\gamma^2 + a'^{(1)}_{1,2}\gamma'^2]\frac{d\rho}{d\mathrm{v}}\cos(\mathrm{v} - \mathrm{v}')$$

$$+ a'^{(-1)}_{1,2}\left[\frac{d\rho}{d\mathrm{v}}\left(\rho'^2 - \left(\frac{d\rho'}{d\mathrm{v}}\right)^2\right) - 2\rho\rho'\frac{d\rho'}{d\mathrm{v}}\right]\cos(\mathrm{v} - \mathrm{v}')$$

$$+ a'^{(\ 1)}_{1,2}\left[\rho\left(\rho'^2 - \left(\frac{d\rho'}{d\mathrm{v}}\right)^2\right) + 2\rho'\frac{d\rho}{d\mathrm{v}}\frac{d\rho'}{d\mathrm{v}}\right]\sin(\mathrm{v} - \mathrm{v}')$$

$$- a'^{(2)}_{2,1}\left[\frac{d\rho'}{d\mathrm{v}}\left(\rho^2 - \left(\frac{d\rho}{d\mathrm{v}}\right)^2\right) - 2\rho\rho'\frac{d\rho}{d\mathrm{v}}\right]\cos 2(\mathrm{v} - \mathrm{v}')$$

$$+ a'^{(2)}_{2,1}\left[\rho'\left(\rho^2 - \left(\frac{d\rho}{d\mathrm{v}}\right)^2\right) + 2\rho\frac{d\rho}{d\mathrm{v}}\frac{d\rho'}{d\mathrm{v}}\right]\sin 2(\mathrm{v} - \mathrm{v}').$$

Par les formules (27), (28), (27′) et (28′), on a donné tous les termes à caractère diastématique jusqu'à ceux du troisième degré inclusivement, ces termes étant toutefois indépendants des fonctions anastématiques et appartenants aux synechies que nous venons de considérer. Mais il y a encore des termes du même genre qui sont du premier degré par rapport aux fonctions diastématiques et du second, par rapport aux fonctions anastématiques, et qui sont coordonnés avec ceux que nous avons déjà mis en évidence. Nous allons les chercher.

105. En ne considérant que les termes du premier ordre par rapport aux fonctions diastématiques et du second, par rapport aux fonctions anastématiques, nous aurons, en vertu des équations (21) et (29) du n° 87, l'expression

$$(29) \qquad {}^{\prime\prime}_{\prime\prime}(1-\eta^2)\,P^{(1)}h$$

$$= -h\{P^1(0,0,0)+P^1(0,1,0)\rho+P^1(0,0,1)\rho'\}$$

$$-2h\sum_1^{\infty}\{P^1(n,0,0)+P^1(n,1,0)\rho+P^1(n,0,1)\rho'\}\cos n(v-v'),$$

où nous avons omis les indices ν et ν', vu qu'ils sont inutiles lorsqu'il ne s'agit que des premières puissances de η et de η'.

On parvient à transformer l'équation (29) dans la forme diastématique de deux manières différentes: d'abord en substituant l'expression (10) du n° 51 au lieu de la fonction h, et ensuite, en remplaçant cette fonction par la valeur que donne l'équation (59) du n° 93.

En utilisant la première des expressions mentionnées, nous obtiendrons

$$(30) \qquad {}^{\prime\prime}_{\prime\prime}(1-\eta^2)\,P^{(1)}h$$

$$-\frac{1}{2}(\mathfrak{z}^2+\mathfrak{z}'^2)\{P^1(0,0,0)+P^1(0,1,0)\rho+P^1(0,0,1)\rho'\}\cos(v-v')$$

$$-\frac{1}{2}\left(\mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{z}'}{dv}-\mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)\{P^1(0,0,0)+P^1(0,1,0)\rho+P^1(0,0,1)\rho'\}\sin(v-v')$$

$$-\mathfrak{z}\mathfrak{z}'\{P^1(0,0,0)+P^1(0,1,0)\rho+P^1(0,0,1)\rho'\}$$

$$+\frac{1}{2}(\mathfrak{z}^2+\mathfrak{z}'^2)\sum\{\mathrm{P}^1(n,0,0)+\mathrm{P}^1(n,1,0)\rho+\mathrm{P}^1(n,0,1)\rho'\}$$
$$\times\{\cos(n-1)(\mathrm{v}-\mathrm{v}')+\cos(n+1)(\mathrm{v}-\mathrm{v}')\}$$
$$+\frac{1}{2}\left(\mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{z}'}{d\mathrm{v}}-\mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}}{d\mathrm{v}}\right)\sum\{\mathrm{P}^1(n,0,0)+\mathrm{P}^1(n,1,0)\rho+\mathrm{P}^1(n,0,1)\rho'\}$$
$$\times\{\sin(n-1)(\mathrm{v}-\mathrm{v}')-\sin(n+1)(\mathrm{v}-\mathrm{v}')\}$$
$$-2\mathfrak{z}\mathfrak{z}'\sum\{\mathrm{P}^1(n,0,0)+\mathrm{P}^1(n,1,0)\rho+\mathrm{P}^1(n,0,1)\rho'\}\cos n(\mathrm{v}-\mathrm{v}').$$

Dans cette formule, il faut maintenant introduire les expressions de $\mathfrak{z}^2$, $\mathfrak{z}'^2$, $\mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{z}}{d\mathrm{v}}$, etc., que nous avons données par les équations (20)—(26) du n° 61 ; mais puisqu'il ne s'agit de trouver, finalement, que les termes, appartenant aux synechies $\overset{1,0}{\Sigma}\nu$ et $\overset{1,0}{\Sigma}\nu$, qui sont multipliés par η ou par η', nous cherchons à exclure, dès l'abord, les termes non-coordonnés, en opérant cette substitution simultanément avec les multiplications par les fonctions trigonométriques de $\mathrm{v}-\mathrm{v}'$; ce qui nous permettra de choisir, d'abord, les valeurs utiles de l'indice n.

En multipliant les équations mentionnées tout à l'heure par $e^{in(\mathrm{v}-\mathrm{v}')}$, il viendra immédiatement des résultats dont les différents termes se mettent sous la forme générale

$$\varphi e^{i(\mathrm{nv}-(\mathrm{n}\pm2)\mathrm{v}')}\quad\text{ou}\quad\varphi e^{i\mathrm{n}(\mathrm{v}-\mathrm{v}')},$$

n étant un entier positif ou négatif, et les φ, des fonctions dépendant d'arguments à longues périodes, arguments qui ne peuvent pas déranger les indices des synechies qu'on obtient en effectuant la transformation à la forme diastématique.

Or, il s'agit d'établir la forme mentionnée, ce qui s'effectuera très facilement, lorsqu'on ne demande que les termes multipliés par η ou η'. Dans ce cas, il suffit de remplacer les facteurs $e^{i(\mathrm{nv}-(\mathrm{n}\pm2)\mathrm{v}')}$ et $e^{i\mathrm{n}(\mathrm{v}-\mathrm{v}')}$ par les expressions que nous avons données dans les équations (39, a)—(39, n) du n° 63. Mais en inspectant ces expressions, il se montre que seulement les équations (39, b) et (39, c) renferment des termes appartenant aux synechies dont il s'agit; c'est-à-dire qu'on n'aura des termes de ce genre que si l'on attribue à n les valeurs 1 et — 1. Pour mettre en évidence ces termes, il faut donc, en supprimant les termes inutiles, partir des expressions

$$\mathfrak{z}^2 e^{i(\mathrm{v}-\mathrm{v}')} = \frac{1}{2} I^2 e^{i(\mathrm{v}-\mathrm{v}')} - \frac{1}{4} I^2 e^{2i(\Omega-\theta)+2i\bar{\vartheta}-i(\mathrm{v}+\mathrm{v}')},$$

$$\mathfrak{z}'^2 e^{i(\mathrm{v}-\mathrm{v}')} = \frac{1}{2} I'^2 e^{i(\mathrm{v}-\mathrm{v}')} - \frac{1}{4} I'^2 e^{-2i(\Omega'-\theta')-2i\bar{\vartheta}'+i(\mathrm{v}+\mathrm{v}')},$$

$$\mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{z}}{d\mathrm{v}} e^{i(\mathrm{v}-\mathrm{v}')} = \frac{1}{4} i I^2 e^{2i(\Omega-\theta)+2i\bar{\vartheta}-i(\mathrm{v}+\mathrm{v}')},$$

$$\mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}'}{d\mathrm{v}'} e^{i(\mathrm{v}-\mathrm{v}')} = -\frac{1}{4} i I'^2 e^{-2i(\Omega'-\theta')-2i\bar{\vartheta}'+i(\mathrm{v}+\mathrm{v}')},$$

$$\left(\frac{d\mathfrak{z}}{d\mathrm{v}}\right)^2 e^{i(\mathrm{v}-\mathrm{v}')} = \frac{1}{2} I^2 e^{i(\mathrm{v}-\mathrm{v}')} + \frac{1}{4} I^2 e^{2i(\Omega-\theta)+2i\bar{\vartheta}-i(\mathrm{v}+\mathrm{v}')},$$

$$\mathfrak{z}\mathfrak{z}' e^{2i(\mathrm{v}-\mathrm{v}')} = \frac{1}{4} II' e^{i(\Omega-\theta)-i(\Omega'-\theta')+i(\bar{\vartheta}-\bar{\vartheta}')+i(\mathrm{v}-\mathrm{v}')},$$

$$\mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}}{d\mathrm{v}} e^{2i(\mathrm{v}-\mathrm{v}')} = \frac{1}{4} i II' e^{i(\Omega-\theta)-i(\Omega'-\theta')+i(\bar{\vartheta}-\bar{\vartheta}')+i(\mathrm{v}-\mathrm{v}')},$$

auxquelles il faut ajouter les formules (22) et (25) du n° 61, qui sont dès le début mises sous la forme que demande l'application des équations (39, b) et (39, c).

Considérons encore les quatres fonctions

$$\varphi\rho e^{i(n\mathrm{v}-(n\pm2)\mathrm{v}')}; \qquad \varphi\rho' e^{i(n\mathrm{v}-(n\pm2)\mathrm{v}')}; \qquad \varphi\rho e^{in(\mathrm{v}-\mathrm{v}')}; \qquad \varphi\rho' e^{in(\mathrm{v}-\mathrm{v}')},$$

φ étant toujours une fonction dépendant d'arguments à longue période.

Par les équations (40, a)—(40, n) et (41, a)—(41, n) du n° 63, il est visible que seulement les expressions ρ, $\rho e^{\pm 2i\mathrm{v}}$, $\rho' e^{\pm i(\mathrm{v}-\mathrm{v}')}$ et $\rho' e^{\pm i(\mathrm{v}+\mathrm{v}')}$ donnent naissance à des termes appartenant aux synechies indiquées. Voici les termes de cette forme se produisant par la multiplication des facteurs mis en évidence dans les premiers membres:

$$\rho\mathfrak{z}^2 = \frac{1}{2}\rho I^2 - \frac{1}{4} I^2 e^{-2i(\Omega-\theta)-2i\bar{\vartheta}} \rho e^{2i\mathrm{v}} - \frac{1}{4} I^2 e^{2i(\Omega-\theta)+2i\bar{\vartheta}} \rho e^{-2i\mathrm{v}},$$

$$\rho\mathfrak{z}'^2 = \frac{1}{2}\rho I'^2,$$

$$\rho\mathfrak{z}'^2 e^{2i(\mathrm{v}-\mathrm{v}')} = -\frac{1}{4} I'^2 e^{-2i(\Omega'-\theta')-2i\bar{\vartheta}'} \rho e^{2i\mathrm{v}},$$

$$\rho\mathfrak{z}\mathfrak{z}' e^{i(\mathrm{v}-\mathrm{v}')} = \frac{1}{4}\rho II' e^{i(\Omega-\theta)-i(\Omega'-\theta')+i(\bar{\vartheta}-\bar{\vartheta}')} - \frac{1}{4} II' e^{-i(\Omega-\theta)-i(\Omega'-\theta')-i(\bar{\vartheta}+\bar{\vartheta}')} \rho e^{2i\mathrm{v}},$$

$$\rho\mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{z}}{d\mathrm{v}} = -\frac{1}{4} i I^2 e^{-2i(\Omega-\theta)-2i\bar{\vartheta}} \rho e^{2i\mathrm{v}} + \frac{1}{4} i I^2 e^{2i(\Omega-\theta)+2i\bar{\vartheta}} \rho e^{-2i\mathrm{v}},$$

$$\rho\left(\frac{d\mathfrak{z}}{d\mathrm{v}}\right)^2 = \frac{1}{2}\rho I^2 + \frac{1}{4} I^2 e^{-2i(\Omega-\theta)-2i\bar{\vartheta}} \rho e^{2i\mathrm{v}} + \frac{1}{4} I^2 e^{2i(\Omega-\theta)+2i\bar{\vartheta}} \rho e^{-2i\mathrm{v}},$$

$$\rho\mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}}{dv}e^{i(v-v')} = -\frac{1}{4}iII'e^{-i(\Omega-\theta)-i(\Omega'-\theta')-i(\varpi+\varpi')}\rho e^{2iv} - \frac{1}{4}i\rho II'e^{i(\Omega-\theta)-i(\Omega'-\theta')+i(\varpi-\varpi')},$$

$$\rho\mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}'}{dv}e^{2i(v-v')} = -\frac{1}{4}iI'^2e^{-2i(\Omega'-\theta')-2i\varpi'}\rho e^{2iv},$$

$$\rho'\mathfrak{z}^2e^{i(v-v')} = \frac{1}{2}I^2\rho'e^{i(v-v')} - \frac{1}{4}I^2e^{2i(\Omega-\theta)+2i\varpi}\rho'e^{-i(v+v')},$$

$$\rho'\mathfrak{z}'^2e^{i(v-v')} = \frac{1}{2}I'^2\rho'e^{i(v-v')} - \frac{1}{4}I'^2e^{-2i(\Omega'-\theta')-2i\varpi'}\rho'e^{i(v+v')},$$

$$\begin{aligned}\rho'\mathfrak{z}\mathfrak{z}' = &-\frac{1}{4}II'e^{-i(\Omega-\theta)-i(\Omega'-\theta')-i(\varpi+\varpi')}\rho'e^{i(v+v')}\\ &+\frac{1}{4}II'e^{i(\Omega-\theta)-i(\Omega'-\theta')+i(\varpi-\varpi')}\rho'e^{-i(v-v')}\\ &+\frac{1}{4}II'e^{-i(\Omega-\theta)+i(\Omega'-\theta')-i(\varpi-\varpi')}\rho'e^{i(v-v')}\\ &-\frac{1}{4}II'e^{i(\Omega-\theta)+i(\Omega'-\theta')+i(\varpi+\varpi')}\rho'e^{-i(v+v')},\end{aligned}$$

$$\rho'\mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{z}}{dv}e^{i(v-v')} = \frac{1}{4}iI^2e^{2i(\Omega-\theta)+2i\varpi}\rho'e^{-i(v+v')},$$

$$\rho'\mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}'}{dv}e^{i(v-v')} = -\frac{1}{4}iI'^2e^{-2i(\Omega'-\theta')-2i\varpi'}\rho'e^{i(v+v')},$$

$$\rho'\mathfrak{z}\mathfrak{z}'e^{2i(v-v')} = \frac{1}{4}II'e^{i(\Omega-\theta)-i(\Omega'-\theta')+i(\varpi-\varpi')}\rho'e^{i(v-v')},$$

$$\rho'\left(\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)^2e^{i(v-v')} = \frac{1}{2}I^2\rho'e^{i(v-v')} + \frac{1}{4}I^2e^{2i(\Omega-\theta)+2i\varpi}\rho'e^{-i(v+v')},$$

$$\begin{aligned}\rho'\mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}}{dv} = &-\frac{1}{4}iII'e^{-i(\Omega-\theta)-i(\Omega'-\theta')-i(\varpi+\varpi')}\rho'e^{i(v+v')}\\ &-\frac{1}{4}iII'e^{i(\Omega-\theta)-i(\Omega'-\theta')+i(\varpi-\varpi')}\rho'e^{-i(v-v')}\\ &+\frac{1}{4}iII'e^{-i(\Omega-\theta)+i(\Omega'-\theta')-i(\varpi-\varpi')}\rho'e^{i(v-v')}\\ &+\frac{1}{4}iII'e^{i(\Omega-\theta)+i(\Omega'-\theta')+i(\varpi+\varpi')}\rho'e^{-i(v+v')},\end{aligned}$$

$$\rho'\mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}}{dv}e^{2i(v-v')} = -\frac{1}{4}iII'e^{i(\Omega-\theta)-i(\Omega'-\theta')+i(\varpi-\varpi')}\rho'e^{i(v-v')}.$$

Par les équations (39), (40) et (41) du n° 63, il est maintenant facile d'établir les termes suivants qui appartiennent à la forme diastématique et aux synechies mentionnées

$$\mathfrak{z}^2 e^{i(\mathrm{v}-\mathrm{v}')} = -\frac{1}{2}\eta' I^2 e^{-i(\pi-\Gamma')+i(\mathrm{v}-\omega')} + \frac{1}{4}\eta' I^2 e^{2i(\Omega-\Theta)-i(\pi-\Gamma')+2i\bar{\vartheta}-i(\mathrm{v}+\omega)},$$

$$\mathfrak{z}'^2 e^{i(\mathrm{v}-\mathrm{v}')} = -\frac{1}{2}\eta' I'^2 e^{-i(\pi-\Gamma')+i(\mathrm{v}-\omega)} + \frac{1}{4}\eta' I'^2 e^{-2i(\Omega-\Theta')+i(\pi'-\Gamma')-2i\bar{\vartheta}+i(\mathrm{v}+\omega')},$$

$$\mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{z}}{d\mathrm{v}} e^{i(\mathrm{v}-\mathrm{v}')} = -\frac{1}{4} i\eta' I^2 e^{2i(\Omega-\Theta)-i(\pi-\Gamma')+2i\bar{\vartheta}-i(\mathrm{v}+\omega')},$$

$$\mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}'}{d\mathrm{v}'} e^{i(\mathrm{v}-\mathrm{v}')} = \frac{1}{4} i\eta' I'^2 e^{-2i(\Omega-\Theta')+i(\pi-\Gamma')-2i\bar{\vartheta}'+i(\mathrm{v}+\omega)},$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{z}\mathfrak{z}' = {} & \frac{1}{4}\eta' II' e^{-i(\Omega-\Theta)-i(\Omega-\Theta')+i(\pi-\Gamma')-i(\bar{\vartheta}+\bar{\vartheta}')+i(\mathrm{v}+\omega')} \\
& -\frac{1}{4}\eta' II' e^{i(\Omega-\Theta)-i(\Omega-\Theta')+i(\pi'-\Gamma')+i(\bar{\vartheta}-\bar{\vartheta}')-i(\mathrm{v}-\omega')} \\
& -\frac{1}{4}\eta' II' e^{-i(\Omega-\Theta)+i(\Omega-\Theta)-i(\pi-\Gamma')-i(\bar{\vartheta}-\bar{\vartheta})+i(\mathrm{v}-\omega)} \\
& +\frac{1}{4}\eta' II' e^{i(\Omega-\Theta)+i(\Omega'-\Theta')-i(\pi'-\Gamma')+i(\bar{\vartheta}+\bar{\vartheta})-i(\mathrm{v}+\omega')},
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{d\mathfrak{z}}{d\mathrm{v}}\right)^2 e^{i(\mathrm{v}-\mathrm{v}')} = -\frac{1}{2}\eta' I^2 e^{-i(\pi'-\Gamma')+i(\mathrm{v}-\omega)} - \frac{1}{4}\eta' I^2 e^{2i(\Omega-\Theta)-i(\pi-\Gamma')+2i\bar{\vartheta}-i(\mathrm{v}+\omega)},$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}}{d\mathrm{v}} = {} & \frac{1}{4} i\eta' II' e^{-i(\Omega-\Theta)-i(\Omega-\Theta)+i(\pi-\Gamma')-i(\bar{\vartheta}+\bar{\vartheta})+i(\mathrm{v}+\dot{\omega})} \\
& +\frac{1}{4} i\eta' II' e^{i(\Omega-\Theta)-i(\Omega'-\Theta)+i(\pi'-\Gamma')+i(\bar{\vartheta}-\bar{\vartheta})-i(\mathrm{v}-\dot{\omega})} \\
& -\frac{1}{4} i\eta' II' e^{-i(\Omega-\Theta)+i(\Omega'-\Theta')-i(\pi'-\Gamma')-i(\bar{\vartheta}-\bar{\vartheta}')+i(\mathrm{v}-\omega)} \\
& -\frac{1}{4} i\eta' II' e^{i(\Omega-\Theta)+i(\Omega-\Theta)-i(\pi'-\Gamma')+i(\bar{\vartheta}+\bar{\vartheta}')-i(\mathrm{v}+\omega)},
\end{aligned}$$

$$\mathfrak{z}\mathfrak{z}' e^{2i(\mathrm{v}-\mathrm{v}')} = -\frac{1}{4}\eta' II' e^{i(\Omega-\Theta)-i(\Omega'-\Theta')-i(\pi-\Gamma')+i(\bar{\vartheta}-\bar{\vartheta}')+i(\mathrm{v}-\omega')},$$

$$\mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}}{d\mathrm{v}} e^{2i(\mathrm{v}-\mathrm{v}')} = \frac{1}{4} i\eta' II' e^{i(\Omega-\Theta)-i(\Omega-\Theta)-i(\pi'-\Gamma')+i(\bar{\vartheta}-\bar{\vartheta})+i(\mathrm{v}-\dot{\omega}')}.$$

Dans toutes ces formules, on a mis la valeur -1 au lieu du symbole $\xi_1^{1,-1}$, retenu dans le n° 63 pour permettre au lecteur de retrouver l'origine des différents termes.

On aura encore:

$$\rho\mathfrak{z}^2 = \frac{1}{2}\rho I^2 - \frac{1}{8}\eta I^2 e^{-2i(\Omega-\Theta)+i(\pi-\Gamma)-2i\bar{\vartheta}+i(v+\bar{\omega})} - \frac{1}{8}\eta I^2 e^{2i(\Omega-\Theta)-i(\pi-\Gamma)+2i\bar{\vartheta}-i(v+\omega)},$$

$$\rho\mathfrak{z}'^2 = \frac{1}{2}\rho I'^2,$$

$$\rho\mathfrak{z}'^2 e^{2i(v-v')} = -\frac{1}{8}\eta I'^2 e^{-2i(\Omega'-\Theta')+i(\pi-\Gamma)-2i\bar{\vartheta}'+i(v+\bar{\omega})},$$

$$\rho\mathfrak{z}\mathfrak{z}' e^{i(v-v')} = -\frac{1}{8}\eta II' e^{-i(\Omega-\Theta)-i(\Omega'-\Theta')+i(\pi-\Gamma)-i(\bar{\vartheta}+\bar{\vartheta}')+i(v+\omega)} + \frac{1}{4}\rho II' e^{i(\Omega-\Theta)-i(\Omega'-\Theta')+i(\bar{\vartheta}-\bar{\vartheta}')},$$

$$\rho\mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{z}}{dv} = -\frac{1}{8}i\eta I^2 e^{-2i(\Omega-\Theta)+i(\pi-\Gamma)-2i\bar{\vartheta}+i(v+\bar{\omega})} + \frac{1}{8}i\eta I^2 e^{2i(\Omega-\Theta)-i(\pi-\Gamma)+2i\bar{\vartheta}-i(v+\bar{\omega})},$$

$$\rho\left(\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)^2 = \frac{1}{2}\rho I^2 + \frac{1}{8}\eta I^2 e^{-2i(\Omega-\Theta)+i(\pi-\Gamma)-2i\bar{\vartheta}+i(v+\bar{\omega})} + \frac{1}{8}\eta I^2 e^{2i(\Omega-\Theta)-i(\pi-\Gamma)+2i\bar{\vartheta}-i(v+\bar{\omega})},$$

$$\rho\mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}}{dv} e^{i(v-v')} = -\frac{1}{8}i\eta II' e^{-i(\Omega-\Theta)-i(\Omega'-\Theta')+i(\pi-\Gamma)-i(\bar{\vartheta}+\bar{\vartheta}')+i(v+\bar{\omega})} - \frac{1}{4}i\rho II'^{(\Omega-\Theta)-i(\Omega'-\Theta')+i(\bar{\vartheta}-\bar{\vartheta}')},$$

$$\rho\mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}'}{dv} e^{2i(v-v')} = -\frac{1}{8}i\eta I'^2 e^{-2i(\Omega'-\Theta')+i(\pi-\Gamma)-2i\bar{\vartheta}'+i(v+\bar{\omega})},$$

$$\rho'\mathfrak{z}^2 e^{i(v-v')} = \frac{1}{4}\eta' I^2 e^{-i(\pi'-\Gamma')+i(v-\bar{\omega})} - \frac{1}{8}\eta' I^2 e^{2i(\Omega-\Theta)-i(\pi'-\Gamma')+2i\bar{\vartheta}-i(v+\bar{\omega})},$$

$$\rho'\mathfrak{z}'^2 e^{i(v-v')} = \frac{1}{4}\eta' I'^2 e^{-i(\pi'-\Gamma')+i(v-\bar{\omega})} - \frac{1}{8}\eta' I'^2 e^{-2i(\Omega'-\Theta')+i(\pi-\Gamma')-2i\bar{\vartheta}'+i(v+\bar{\omega}')},$$

$$\begin{aligned}\rho'\mathfrak{z}\mathfrak{z}' = &-\frac{1}{8}\eta' II' e^{-i(\Omega-\Theta)-i(\Omega'-\Theta')+i(\pi-\Gamma')-i(\bar{\vartheta}+\bar{\vartheta}')+i(v+\bar{\omega})}\\ &+\frac{1}{8}\eta' II' e^{i(\Omega-\Theta)-i(\Omega'-\Theta')+i(\pi-\Gamma')+i(\bar{\vartheta}-\bar{\vartheta}')-i(v-\omega)}\\ &+\frac{1}{8}\eta' II' e^{-i(\Omega-\Theta)+i(\Omega'-\Theta')-i(\pi-\Gamma')-i(\bar{\vartheta}-\bar{\vartheta}')+i(v-\bar{\omega})}\\ &-\frac{1}{8}\eta' II' e^{i(\Omega-\Theta)+i(\Omega'-\Theta')-i(\pi-\Gamma')+i(\bar{\vartheta}+\bar{\vartheta}')-i(v+\omega)},\end{aligned}$$

$$\rho'\mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{z}}{dv} e^{i(v-v')} = \frac{1}{8}i\eta' I^2 e^{2i(\Omega-\Theta)-i(\pi-\Gamma')+2i\bar{\vartheta}-i(v+\bar{\omega})},$$

$$\rho'\mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}}{dv} e^{i(v-v')} = -\frac{1}{8}i\eta' I'^2 e^{-2i(\Omega'-\Theta')+i(\pi-\Gamma')-2i\bar{\vartheta}'+i(v+\bar{\omega})},$$

$$\rho'\mathfrak{z}\mathfrak{z}' e^{2i(v-v')} = \frac{1}{8}\eta' II' e^{i(\Omega-\Theta)-i(\Omega'-\Theta')-i(\pi-\Gamma')+i(\bar{\vartheta}-\bar{\vartheta}')+i(v-\bar{\omega})},$$

$$\rho'\left(\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)^2 e^{i(v-v')} = \frac{1}{4}\eta' I^2 e^{-i(\pi'-\Gamma')+i(v-\omega)} + \frac{1}{8}\eta' I^2 e^{2i(\Omega-\Theta)-i(\pi-\Gamma')+2i\bar{\vartheta}-i(v+\bar{\omega})},$$

$$\rho'\mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}}{dv} = -\frac{1}{8}i\eta' II' e^{-i(\Omega-\Theta)-i(\Omega'-\Theta')+i(\pi'-\Gamma')-i(\bar{\vartheta}+\bar{\vartheta}')+i(v+\tilde{\omega})}$$

$$-\frac{1}{8}i\eta' II' e^{i(\Omega-\Theta)-i(\Omega'-\Theta')+i(\pi'-\Gamma')+i(\bar{\vartheta}-\bar{\vartheta}')-i(v-\tilde{\omega}')}$$

$$+\frac{1}{8}i\eta' II' e^{-i(\Omega-\Theta)+i(\Omega'-\Theta')-i(\pi'-\Gamma')-i(\bar{\vartheta}-\bar{\vartheta}')+i(v-\tilde{\omega})}$$

$$+\frac{1}{8}i\eta' II' e^{i(\Omega-\Theta)+i(\Omega'-\Theta')-i(\pi'-\Gamma')+i(\bar{\vartheta}+\bar{\vartheta}')-i(v+\tilde{\omega}')},$$

$$\rho'\mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}}{dv}e^{2i(v-v')} = -\frac{1}{8}i\eta' II' e^{i(\Omega-\Theta)-i(\Omega'-\Theta')-i(\pi'-\Gamma')+i(\bar{\vartheta}-\bar{\vartheta}')+i(v-\tilde{\omega})}.$$

Ayant obtenu ces formules, nous allons les introduire dans l'expression (30). Il en faut, toutefois, considérer seulement la partie suivante, vu que les autres termes ne contribuent rien aux synechies demandées,

$$\frac{\mu}{\mu'}(1-\eta^2)P^{(1)}h$$

$$= \frac{1}{2}(\mathfrak{z}^2+\mathfrak{z}'^2)\{P^1(0,0,0)+P^1(0,1,0)\rho+P^1(0,0,1)\rho'\}\cos(v-v')$$

$$-\frac{1}{2}\left(\mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{z}}{dv}-\mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}'}{dv}\right)\{P^1(0,0,0)+P^1(0,1,0)\rho+P^1(0,0,1)\rho'\}\sin(v-v')$$

$$-\mathfrak{z}\mathfrak{z}'\{P^1(0,0,0)+P^1(0,1,0)\rho+P^1(0,0,1)\rho'\}$$

$$+\frac{1}{2}(\mathfrak{z}^2+\mathfrak{z}'^2)\{P^1(1,0,0)+P^1(1,1,0)\rho+P^1(1,0,1)\rho'\}$$

$$+\frac{1}{2}(\mathfrak{z}^2+\mathfrak{z}'^2)\{P^1(2,0,0)+P^1(2,1,0)\rho+P^1(2,0,1)\rho'\}\cos(v-v')$$

$$+\frac{1}{2}\left(\mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{z}}{dv}-\mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}'}{dv}\right)\{P^1(2,0,0)+P^1(2,1,0)\rho+P^1(2,0,1)\rho'\}\sin(v-v')$$

$$-2\mathfrak{z}\mathfrak{z}'\{P^1(1,0,0)+P^1(1,1,0)\rho+P^1(1,0,1)\rho'\}\cos(v-v')$$

$$+\frac{1}{2}\mathfrak{z}'^2P^1(1,1,0)\rho\cos 2(v-v')$$

$$+\frac{1}{2}\mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}'}{dv}P^1(1,1,0)\rho\sin 2(v-v')$$

$$-2\mathfrak{z}\mathfrak{z}'P^1(2,0,1)\rho'\cos 2(v-v').$$

Par les substitutions dont nous venons de parler, nous parviendrons finalement au résultat cherché. En y réunissant les termes dépendant des mêmes arguments, ce résultat prendra la forme

$$(31) \qquad \frac{a}{a'}(1-\eta^2)\left\{\sum^{1,0}\nu(\mathrm{P}^{(1)}\mathrm{h}) + \sum^{-1,0}\nu(\mathrm{P}^{(1)}\mathrm{h})\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\mathrm{P}^1(1,1,0)\rho(I^2+I'^2) - \frac{1}{2}\mathrm{P}^1(1,1,0)\rho II'\cos(\bar\vartheta-\vartheta'+\Omega-\Theta-(\Omega'-\Theta'))$$

$$-\frac{1}{8}\mathrm{P}^1(1,1,0)\eta I^2\cos(\mathrm{F}-2\mathrm{v}+2\vartheta+2(\Omega-\Theta))$$

$$+\frac{1}{4}\mathrm{P}^1(1,1,0)\eta II'\cos(\mathrm{F}-2\mathrm{v}+\bar\vartheta+\vartheta'+\Omega-\Theta+\Omega'-\Theta')$$

$$-\frac{1}{8}\mathrm{P}^1(1,1,0)\eta I'^2\cos(\mathrm{F}-2\mathrm{v}+2\vartheta'+2(\Omega'-\Theta'))$$

$$-(b+b_2)\eta'(I^2+I'^2)\cos(\mathrm{F}'+\mathrm{v}-\mathrm{v}')$$

$$+b\eta' I^2\cos(\mathrm{F}'-(\mathrm{v}+\mathrm{v}')+2\vartheta+2(\Omega-\Theta))$$

$$+b\eta' I'^2\cos(\mathrm{F}'-(\mathrm{v}+\mathrm{v}')+2\bar\vartheta'+2(\Omega'-\Theta'))$$

$$-2b\eta' II'\cos(\mathrm{F}'-(\mathrm{v}+\mathrm{v}')+\vartheta+\vartheta'+\Omega-\Theta+\Omega'-\Theta')$$

$$+2b\eta' II'\cos(\mathrm{F}'+(\mathrm{v}-\mathrm{v}')-(\vartheta-\bar\vartheta')-(\Omega-\Theta)+\Omega'-\Theta')$$

$$+2b_2\eta' II'\cos(\mathrm{F}'+(\mathrm{v}-\mathrm{v}')+\vartheta-\vartheta'+\Omega-\Theta-(\Omega'-\Theta')),$$

où l'on a employé, pour abréger, les notations

$$b = \frac{1}{4}\mathrm{P}^1(0,0,0) - \frac{1}{8}\mathrm{P}'(0,0,1),$$

$$b_2 = \frac{1}{4}\mathrm{P}^1(2,0,0) - \frac{1}{8}\mathrm{P}'(2,0,1).$$

L'expression analogue relativement à la fonction $\mathrm{Q}^{(1)}$ est un peu plus simple: la raison en est que les termes dépendant de l'indice $n=0$ n'y existent pas. Nous aurons en effet, par un calcul semblable avec celui que nous venons d'exposer, la formule

$$(32)\qquad {}^{\prime\prime}_{\prime\prime}\left|\sum^{1,0}\nu(Q^{(1)}h) + \sum^{1,0}\nu(Q^{(1)}h)\right| =$$

$$-\frac{1}{2}Q^1(1,1,0)\rho II'\sin(\vartheta - \bar\vartheta' + \Omega - \Theta - (\Omega' - \Theta'))$$

$$+\frac{1}{8}Q^1(1,1,0)\eta I^2\sin(F - 2v + 2\bar\vartheta + 2(\Omega - \Theta))$$

$$+\frac{1}{8}Q^1(1,1,0)\eta I'^2\sin(F - 2v + 2\vartheta' + 2(\Omega' - \Theta'))$$

$$-\frac{1}{4}Q^1(1,1,0)\eta II'\sin(F - 2v + \bar\vartheta + \bar\vartheta' + \Omega - \Theta + \Omega' - \Theta')$$

$$-\left(\frac{1}{2}Q^1(2,0,0) - \frac{1}{4}Q^1(2,0,1)\right)\eta'(I^2 + I'^2)\sin(F' + v - v')$$

$$+\left(Q^1(2,0,0) - \frac{1}{2}Q^1(2,0,1)\right)\eta' II'\sin(F' + v - v' + \vartheta - \bar\vartheta' + \Omega - \Theta - (\Omega' - \Theta')).$$

Cherchons encore les synechies des indices $1,0$ et $-1,0$, détachées du produit $R^{(0)}\frac{\partial h}{\partial v}$, ou plutôt la somme de ces synechies. Les termes y contenus, étant de la même nature que ceux que nous venons de considérer précédemment, doivent être réunis, ce qu'on voit facilement par la deuxième des équations (11) du n° 85, avec ceux-là.

Dans le but proposé, considérons l'équation

$$\begin{aligned} {}^{\prime\prime}_{\prime\prime} R^{(0)}\frac{\partial h}{\partial v} = \frac{\partial h}{\partial v}\{R^0(0,0,0) + R^0(0,1,0)\rho + R^0(0,0,1)\rho'\} \\ + 2\frac{\partial h}{\partial v}\{R^0(1,0,0) + R^0(1,1,0)\rho + R^0(1,0,1)\rho'\}\cos(v - v') \\ + 2\frac{\partial h}{\partial v}\{R^0(2,0,0) + R^0(2,1,0)\rho + R^0(2,0,1)\rho'\}\cos 2(v - v'), \end{aligned}$$

et introduisons-y la valeur de $\frac{\partial h}{\partial v}$ donnée par l'équation (31) du n° 67, c'est-à-dire la valeur

$$\frac{\partial h}{\partial v} = -\frac{1}{2}\left(\mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{z}}{dv} + \mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}'}{dv}\right)\cos(v - v') + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)^2 + \mathfrak{z}'^2\right)\sin(v - v') + \mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\cdot$$

Après avoir remplacé les produits dépendant de $\mathfrak{z}$ et $\mathfrak{z}'$, ainsi que de leurs dérivées, nous aurons de la sorte, par les expressions que nous venons de déduire, la formule que voici:

$$(33)\qquad \left|\begin{matrix}\mu\\ \mu\end{matrix}\right. \sum^{1,0} \nu\left(R^{0}\frac{\partial h}{\partial v}\right) + \sum^{1,0} \nu\left(R^{(0)}\frac{\partial h}{\partial v}\right)\Bigg|$$

$$= \frac{1}{2}\rho R^{0}(1,1,0)\, II' \cos(\vartheta - \vartheta' + \Omega - \Theta - (\Omega' - \Theta'))$$

$$+ \frac{1}{8} R^{0}(1,1,0)\,\eta I^{2} \sin(F - 2v + 2\vartheta + 2(\Omega - \Theta))$$

$$+ \frac{1}{8} R^{0}(1,1,0)\,\eta I'^{2} \sin(F - 2v + 2\vartheta' + 2(\Omega' - \Theta'))$$

$$- \frac{1}{4} R^{0}(1,1,0)\,\eta II' \sin(F - 2v + \vartheta + \vartheta' + \Omega - \Theta + \Omega' - \Theta')$$

$$- (A - A_{2})\,\eta'(I^{2} + I'^{2}) \sin(F' + v - v')$$

$$- A\eta' I^{2} \sin(F' - (v + v') + 2\vartheta + 2(\Omega - \Theta))$$

$$- A\eta' I'^{2} \sin(F' - (v + v') + 2\vartheta' + 2(\Omega' - \Theta'))$$

$$+ 2A\eta' II' \sin(F' - (v + v') + \vartheta + \vartheta' + \Omega - \Theta + \Omega' - \Theta')$$

$$+ 2A\eta' II' \sin(F' + v - v' - (\vartheta - \vartheta') - (\Omega - \Theta) + (\Omega' - \Theta'))$$

$$- 2A_{2}\eta' II' \sin(F' + v - v' + \vartheta - \vartheta' + \Omega - \Theta - (\Omega' - \Theta')),$$

les A étant donnés moyennant les formules

$$A = \frac{1}{4} R^{0}(0,0,0) - \frac{1}{8} R^{0}(0,0,1),$$

$$A_{2} = \frac{1}{4} R^{0}(2,0,0) - \frac{1}{8} R^{0}(2,0,1).$$

Les trois expressions (31), (32) et (33) se mettent, on le voit facilement, sous la forme fondamentale généralisée ; nous y arriverons prochainement.

106. Les résultats auxquels nous sommes parvenus dans le numéro précédent, s'obtiennent plus rapidement en utilisant l'expression de h donnée par l'équation (59) du n° 93. La circonstance que, néanmoins, j'ai poursuivi aussi le chemin plus long, s'explique par le désir d'atteindre le but de deux manières différentes, chose utile, lorsqu'il s'agit de résultats d'une certaine complication.

En abordant les opérations qu'entraîne l'emploi de la valeur mentionnée de h, je remarque avant tout que les quatre fonctions $\Phi_0, .., \Phi_3$ sont composées de termes appartenant partout à la synechie des indices 0,0; la multiplication par l'une ou l'autre de ces fonctions ne peut donc pas altérer les indices d'une synechie donnée. Par cette remarque, on se procure, en considérant les expressions (61, a) et (61, b) du n° 93, des formules générales que voici:

$$(34)\qquad \overset{s,s'}{\Sigma}\nu\big(\rho^s\rho'^{s'}\,\mathrm{h}\cos n(\mathrm{v}-\mathrm{v}')\big)$$

$$\begin{aligned}
&= \tfrac{1}{2}\Phi_0\Big\{\overset{s,s'}{\Sigma}\nu\big(\rho^s\rho'^{s'}\cos(n-1)(\mathrm{v}-\mathrm{v}')\big) + \overset{s,s'}{\Sigma}\nu\big(\rho^s\rho'^{s'}\cos(n+1)(\mathrm{v}-\mathrm{v}')\big)\Big\}\\
&+ \tfrac{1}{2}\Phi_1\Big\{\overset{s,s'}{\Sigma}\nu\big(\rho^s\rho'^{s'}\cos((n-1)\mathrm{v}-(n+1)\mathrm{v}')\big)\\
&\qquad\qquad + \overset{s,s'}{\Sigma}\nu\big(\rho^s\rho'^{s'}\cos((n+1)\mathrm{v}-(n-1)\mathrm{v}')\big)\Big\}\\
&- \tfrac{1}{2}\Phi_2\Big\{\overset{s,s'}{\Sigma}\nu\big(\rho^s\rho'^{s'}\sin(n-1)(\mathrm{v}-\mathrm{v}')\big) - \overset{s,s'}{\Sigma}\nu\big(\rho^s\rho'^{s'}\sin(n+1)(\mathrm{v}-\mathrm{v}')\big)\Big\}\\
&- \tfrac{1}{2}\Phi_3\Big\{\overset{s,s'}{\Sigma}\nu\big(\rho^s\rho'^{s'}\sin((n-1)\mathrm{v}-(n+1)\mathrm{v}')\big)\\
&\qquad\qquad - \overset{s,s'}{\Sigma}\nu\big(\rho^s\rho'^{s'}\sin((n+1)\mathrm{v}-(n-1)\mathrm{v}')\big)\Big\},
\end{aligned}$$

$$(35)\qquad \overset{s,s'}{\Sigma}\nu\big(\rho^s\rho'^{s'}\,\mathrm{h}\sin n(\mathrm{v}-\mathrm{v}')\big)$$

$$\begin{aligned}
&= \tfrac{1}{2}\Phi_0\Big\{\overset{s,s'}{\Sigma}\nu\big(\rho^s\rho'^{s'}\sin(n-1)(\mathrm{v}-\mathrm{v}')\big) + \overset{s,s'}{\Sigma}\nu\big(\rho^s\rho'^{s'}\sin(n+1)(\mathrm{v}-\mathrm{v}')\big)\Big\}\\
&+ \tfrac{1}{2}\Phi_1\Big\{\overset{s,s'}{\Sigma}\nu\big(\rho^s\rho'^{s'}\sin((n-1)\mathrm{v}-(n+1)\mathrm{v}')\big)\\
&\qquad\qquad + \overset{s,s'}{\Sigma}\nu\big(\rho^s\rho'^{s'}\sin((n+1)\mathrm{v}-(n-1)\mathrm{v}')\big)\Big\}\\
&+ \tfrac{1}{2}\Phi_2\Big\{\overset{s,s'}{\Sigma}\nu\big(\rho^s\rho'^{s'}\cos(n-1)(\mathrm{v}-\mathrm{v}')\big) - \overset{s,s'}{\Sigma}\nu\big(\rho^s\rho'^{s'}\cos(n+1)(\mathrm{v}-\mathrm{v}')\big)\Big\}\\
&+ \tfrac{1}{2}\Phi_3\Big\{\overset{s,s'}{\Sigma}\nu\big(\rho^s\rho'^{s'}\cos((n-1)\mathrm{v}-(n+1)\mathrm{v}')\big)\\
&\qquad\qquad - \overset{s,s'}{\Sigma}\nu\big(\rho^s\rho'^{s'}\cos((n+1)\mathrm{v}-(n-1)\mathrm{v}')\big)\Big\}.
\end{aligned}$$

Ensuite, si l'on forme les dérivées partielles de l'expression de h dont il s'agit, il viendra

$$(36)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial v} = -\Phi_0 \sin(v-v') - \Phi_1 \sin(v+v') + \Phi_2 \cos(v-v') + \Phi_3 \cos(v+v'), \\[2ex] \dfrac{\partial h}{\partial v} = \quad \Phi_0 \sin(v-v') - \Phi_1 \sin(v+v') - \Phi_2 \cos(v-v') + \Phi_3 \cos(v+v'), \end{cases}$$

résultats, en vertu desquels il est facile de voir que la synechie

$$\sum^{s,s'} \nu\left(\rho^{\mathrm{s}}\rho'^{\mathrm{s}'} \frac{\partial h}{\partial v} \cos(v-v')\right)$$

se met immédiatement en évidence, si, dans la formule (34), on change Φ_0 en Φ_2, Φ_1 en Φ_3, Φ_2 en $-\Phi_0$, et Φ_3 en $-\Phi_1$. Egalement, on obtient la synechie $\sum^{s,s'} \nu\left(\rho^{\mathrm{s}}\rho'^{\mathrm{s}'} \frac{\partial h}{\partial v} \sin(v-v')\right)$, en faisant dans l'équation (35) les changements indiqués. Pour obtenir les synechies appartenant aux fonctions où la dérivée de h par rapport à v' entre comme facteur au lieu de celle par rapport à v, il suffit de remplacer, dans les équations (34) et (35), Φ_0 par $-\Phi_2$, Φ_1 par Φ_3, Φ_2 par Φ_0, et finalement Φ_3 par $-\Phi_1$.

Ayant ramené, de la manière exposée, les synechies qui appartiennent aux produits renfermant un des facteurs h, $\frac{\partial h}{\partial v}$ ou $\frac{\partial h}{\partial v'}$, aux synechies ne dépendant d'aucune fonction anastématique, il sera facile de mettre en évidence les termes coordonnés du deuxième degré par rapport aux fonctions anastématiques.

Considérons un exemple spécial, en supposant:

$$s = 2, \qquad s' = 5, \qquad \mathrm{s} = 1, \qquad \mathrm{s}' = 2, \qquad n = 2;$$

et ne cherchons que les termes ayant pour coefficient le produit $\eta\eta'^2$ multiplié par une des fonctions $\Phi_0, \ldots, \Phi_3$.

L'équation (12, 1, 2, 3) du n° 59 nous fournit les valeurs

$$\sum^{2,5} \nu\left(\rho\rho'^2 {\cos \atop \sin} 3(v-v')\right) = \frac{1}{8}\eta\eta'^2 {\cos \atop \sin}\left(2v - 5V + \varpi - 3\varpi' + \pi - \Gamma' + 2(\pi' - \Gamma'')\right),$$

$$\sum^{2,5} \nu\left(\rho\rho'^2 {\cos \atop \sin} (v-3v')\right) = \frac{1}{8}\eta\eta'^2 {\cos \atop \sin}\left(2v - 5V - \varpi - 3\varpi' - (\pi - \Gamma') + 2(\pi' - \Gamma'')\right),$$

avec lesquelles, faisant usage de l'équation (34), on déduit ensuite,

$$\sum^{2,5}\nu(\rho\rho'^2 \mathrm{h} \cos 2(\mathrm{v}-\mathrm{v}'))$$

$$= \frac{1}{16}\eta\eta'^2 \Phi_0 \cos(2\mathrm{v}-5\mathrm{V}+\varpi-3\varpi'+\pi-\Gamma+2(\pi'-\Gamma'))$$

$$+ \frac{1}{16}\eta\eta'^2 \Phi_1 \cos(2\mathrm{v}-5\mathrm{V}-\varpi-3\varpi'-(\pi-\Gamma)+2(\pi'-\Gamma'))$$

$$+ \frac{1}{16}\eta\eta'^2 \Phi_2 \sin(2\mathrm{v}-5\mathrm{V}+\varpi-3\varpi'+\pi-\Gamma+2(\pi'-\Gamma'))$$

$$- \frac{1}{16}\eta\eta'^2 \Phi_3 \sin(2\mathrm{v}-5\mathrm{V}-\varpi-3\varpi'-(\pi-\Gamma)+2(\pi'-\Gamma')),$$

ou bien, en considérant les valeurs des fonctions $\Phi_0, \ldots, \Phi_3$ données par les équations (60), (60'), (60'') et (60''') du n° 93,

$$\sum^{2,5}\nu(\rho\rho'^2 \mathrm{h} \cos 2(\mathrm{v}-\mathrm{v}')) =$$

$$- \frac{1}{64}\eta\eta'^2(I^2+I'^2) \cos(2\mathrm{v}-5\mathrm{V}+\varpi-3\varpi'+\pi-\Gamma+2(\pi'-\Gamma'))$$

$$+ \frac{1}{32}\eta\eta'^2 II' \cos(2\mathrm{v}-5\mathrm{V}+\varpi-3\varpi'-(\vartheta-\vartheta')+\pi-\Gamma+2(\pi'-\Gamma')-(\Omega-\Theta)$$
$$+\Omega'-\Theta')$$

$$+ \frac{1}{64}\eta\eta'^2 I^2 \cos(2\mathrm{v}-5\mathrm{V}-\varpi-3\varpi'+2\vartheta-(\pi-\Gamma)+2(\pi'-\Gamma')+2(\Omega-\Theta))$$

$$+ \frac{1}{64}\eta\eta'^2 I'^2 \cos(2\mathrm{v}-5\mathrm{V}-\varpi-3\varpi'+2\vartheta'-(\pi-\Gamma)+2(\pi'-\Gamma')+2(\Omega'-\Theta'))$$

$$- \frac{1}{32}\eta\eta'^2 II' \cos(2\mathrm{v}-5\mathrm{V}-\varpi-3\varpi'+\vartheta+\vartheta'-(\pi-\Gamma)+2(\pi'-\Gamma')+\Omega-\Theta$$
$$+\Omega'-\Theta').$$

Venons maintenant aux cas qui en particulier nous intéressent, savoir aux synechies des indices 1,0 et −1,0, synechies qu'on peut traiter ensemble en formant immédiatement leur somme. Mais il nous faut aussi les synechies des indices 0,1 et 0,−1, dont les différents termes coordonnés s'obtiennent simultanément, et dont seulement la somme nous sera utile. Quant aux premières synechies, il suffit d'en donner un spécimen du calcul, vu que nous les avons déjà mises en évidence par les

équations (31), (32) et (33); mais quant aux deux dernières, j'en vais donner les expressions complètes.

Admettons les valeurs

$$s = 1, \qquad s = 0, \qquad \mathrm{s} = 1, \qquad \mathrm{s} = 0, \qquad n = 1;$$

les équations (34) et (35) nous donnent immédiatement, en supprimant dès le début les termes qui ne contribuent pas à la synechie demandée,

$$\overset{1,0}{\sum}\nu(\rho \mathrm{h} \cos(\mathrm{v} - \mathrm{v}')) = \frac{1}{2}\,\Phi_0\rho + \frac{1}{2}\,\Phi_1 \overset{1,0}{\sum}\nu(\rho\cos 2\mathrm{v}) + \frac{1}{2}\,\Phi_3 \overset{1,0}{\sum}\nu(\rho \sin 2\mathrm{v}),$$

$$\overset{1,0}{\sum}\nu(\rho \mathrm{h} \sin(\mathrm{v} - \mathrm{v}')) = \frac{1}{2}\,\Phi_1 \overset{1,0}{\sum}\nu(\rho\sin 2\mathrm{v}) + \frac{1}{2}\,\Phi_2\rho - \frac{1}{2}\,\Phi_3 \overset{1,0}{\sum}\nu(\rho \cos 2\mathrm{v}).$$ [1]

On en tire ensuite, par la remarque relativement aux changements simultanés de h en $\frac{\partial \mathrm{h}}{\partial \mathrm{v}}$, Φ_0 en Φ_2, etc., les expressions

$$\overset{1,0}{\sum}\nu\left(\rho\frac{\partial \mathrm{h}}{\partial \mathrm{v}} \cos(\mathrm{v} - \mathrm{v}')\right) = \frac{1}{2}\,\Phi_2\rho + \frac{1}{2}\,\Phi_3 \overset{1,0}{\sum}\nu(\rho\cos 2\mathrm{v}) - \frac{1}{2}\,\Phi_1 \overset{1,0}{\sum}\nu(\rho \sin 2\mathrm{v}),$$

$$\overset{1,0}{\sum}\nu\left(\rho\frac{\partial \mathrm{h}}{\partial \mathrm{v}} \sin(\mathrm{v} - \mathrm{v}')\right) = \frac{1}{2}\,\Phi_3\rho \overset{1,0}{\sum}\nu(\rho\sin 2\mathrm{v}) - \frac{1}{2}\,\Phi_0\rho + \frac{1}{2}\,\Phi_1 \overset{1,0}{\sum}\nu(\rho \cos 2\mathrm{v}).$$

Mais les synechies entrant dans les seconds membres sont données moyennant l'équation (40, f) du n° 63, si l'on ne demande que les termes du premier ordre par rapport aux fonctions diastématiques. On en tire les expressions très simples

$$\overset{1,0}{\sum}\nu(\rho\cos 2\mathrm{v}) = \frac{1}{2}\,\eta\cos(\mathrm{v} + \varpi + \pi - \Gamma),$$

$$\overset{1,0}{\sum}\nu(\rho\sin 2\mathrm{v}) = \frac{1}{2}\,\eta\sin(\mathrm{v} + \varpi + \pi - \Gamma).$$

---

[1] Ces formules renferment déjà les sommes des synechies $\overset{1,0}{\sum}\nu$ et $\overset{-1,0}{\sum}\nu$, ce qui est facile à comprendre.

En vertu de ces valeurs, ainsi que de celles des fonctions $\Phi_0, \ldots, \Phi_3$, on déduit, des équations précédentes, les expressions que voici:

$$(a)\quad \sum^{1,0}\nu(\rho \mathrm{h}\cos(\mathrm{v}-\mathrm{v}')) = -\frac{1}{8}\rho(I^2+I'^2)+\frac{1}{4}\rho I I'\cos(\bar{\vartheta}-\bar{\vartheta}'+\Omega-\Theta-(\Omega'-\Theta'))$$

$$+\frac{1}{16}\eta I^2\cos(\mathrm{v}+\bar{\varpi}+\pi-\Gamma-2\bar{\vartheta}-2(\Omega-\Theta))$$

$$+\frac{1}{16}\eta I'^2\cos(\mathrm{v}+\bar{\varpi}+\pi-\Gamma-2\bar{\vartheta}'-2(\Omega'-\Theta'))$$

$$-\frac{1}{8}\eta I I'\cos(\mathrm{v}+\bar{\varpi}+\pi-\Gamma-(\bar{\vartheta}+\bar{\vartheta}')-(\Omega-\Theta)-(\Omega'-\Theta')),$$

$$(b)\quad \sum^{1,0}\nu(\rho \mathrm{h}\sin(\mathrm{v}-\mathrm{v}')) = \frac{1}{4}\rho I I'\sin(\vartheta-\vartheta'+\Omega-\Theta-(\Omega'-\Theta'))$$

$$+\frac{1}{16}\eta I^2\sin(\mathrm{v}+\bar{\varpi}+\pi-\Gamma-2\bar{\vartheta}-2(\Omega-\Theta))$$

$$+\frac{1}{16}\eta I'^2\sin(\mathrm{v}+\bar{\varpi}+\pi-\Gamma-2\vartheta'-2(\Omega'-\Theta'))$$

$$-\frac{1}{8}\eta I I'\sin(\mathrm{v}+\bar{\varpi}+\pi-\Gamma-(\bar{\vartheta}+\bar{\vartheta}')-(\Omega-\Theta)-(\Omega'-\Theta')),$$

$$(c)\quad \sum^{1,0}\nu\left(\rho\frac{\partial \mathrm{h}}{\partial \mathrm{v}}\cos(\mathrm{v}-\mathrm{v}')\right) = \frac{1}{4}\rho I I'\sin(\bar{\vartheta}-\vartheta'+\Omega-\Theta-(\Omega'-\Theta'))$$

$$-\frac{1}{16}\eta I^2\sin(\mathrm{v}+\bar{\varpi}+\pi-\Gamma-2\vartheta-2(\Omega-\Theta))$$

$$-\frac{1}{16}\eta I'^2\sin(\mathrm{v}+\bar{\varpi}+\pi-\Gamma-2\bar{\vartheta}'-2(\Omega'-\Theta'))$$

$$+\frac{1}{8}\eta I I'\sin(\mathrm{v}+\bar{\varpi}+\pi-\Gamma-(\bar{\vartheta}+\bar{\vartheta}')-(\Omega-\Theta)-(\Omega'-\Theta')),$$

$$(d)\quad \sum^{1,0}\nu\left(\rho\frac{\partial \mathrm{h}}{\partial \mathrm{v}}\sin(\mathrm{v}-\mathrm{v}')\right) = \frac{1}{8}\rho(I^2+I'^2)-\frac{1}{4}\rho I I'\cos(\vartheta-\bar{\vartheta}'+\Omega-\Theta-(\Omega'-\Theta'))$$

$$+\frac{1}{16}\eta I^2\cos(\mathrm{v}+\bar{\varpi}+\pi-\Gamma-2\vartheta-2(\Omega-\Theta))$$

$$+\frac{1}{16}\eta I'^2\cos(\mathrm{v}+\bar{\varpi}+\pi-\Gamma-2\bar{\vartheta}'-2(\Omega'-\Theta'))$$

$$-\frac{1}{8}\eta I I'\cos(\mathrm{v}+\bar{\varpi}+\pi-\Gamma-(\vartheta+\vartheta')-(\Omega-\Theta)-(\Omega'-\Theta')).$$

Pour obtenir, en vertu de ces formules, les termes dépendant de la fonction η qui entrent dans les expressions (31), (32) et (33), il ne faut que multiplier l'expression (a) par $-2P^1(1,1,0)$, l'expression (b) par $-2Q^1(1,1,0)$ et l'expression (c) par $2R^0(1,1,0)$.

Je passe maintenant au calcul des termes appartenant aux synechies des indices $0, 1$ et $0, -1$, dont je cherche la somme; dans ces termes, j'introduis d'abord l'argument v′ au lieu de V.

Cela arrêté, on déduit facilement, par les équations (34) et (35), les expressions suivantes

$$\overset{0,1}{\sum}\nu(\mathrm{h}) = \eta\Phi_0\cos(\mathrm{F}+\mathrm{v}'-\mathrm{v})-\eta\Phi_1\cos(\mathrm{F}-(\mathrm{v}'+\mathrm{v})) + \eta\Phi_2\sin(\mathrm{F}+\mathrm{v}'-\mathrm{v})+\eta\Phi_3\sin(\mathrm{F}-(\mathrm{v}'+\mathrm{v})),$$

$$\overset{0,1}{\sum}\nu(\rho\mathrm{h}) = \frac{1}{2}\eta\Phi_0\cos(\mathrm{F}+\mathrm{v}'-\mathrm{v})+\frac{1}{2}\eta\Phi_1\cos(\mathrm{F}-(\mathrm{v}'+\mathrm{v})) - \frac{1}{2}\eta\Phi_2\sin(\mathrm{F}+\mathrm{v}'-\mathrm{v})-\frac{1}{2}\eta\Phi_3\sin(\mathrm{F}-(\mathrm{v}'+\mathrm{v})),$$

$$\overset{0,1}{\sum}\nu(\rho'\mathrm{h}) = 0,$$

$$\overset{0,1}{\sum}\nu(\mathrm{h}\cos(\mathrm{v}-\mathrm{v}')) = \overset{0,1}{\sum}\nu(\rho\mathrm{h}\cos(\mathrm{v}-\mathrm{v}')) = 0,$$

$$\overset{0,1}{\sum}\nu(\rho'\mathrm{h}\cos(\mathrm{v}-\mathrm{v}')) = \frac{1}{2}\rho'\Phi_0+\frac{1}{4}\eta'\Phi_1\cos(\mathrm{F}'-2\mathrm{v}')-\frac{1}{4}\eta'\Phi_3\sin(\mathrm{F}'-2\mathrm{v}'),$$

$$\overset{0,1}{\sum}\nu(\mathrm{h}\sin(\mathrm{v}-\mathrm{v}')) = \overset{0,1}{\sum}\nu(\rho\mathrm{h}\sin(\mathrm{v}-\mathrm{v}')) = 0,$$

$$\overset{0,1}{\sum}\nu(\rho'\mathrm{h}\sin(\mathrm{v}-\mathrm{v}')) = \frac{1}{4}\eta'\Phi_1\sin(\mathrm{F}'-2\mathrm{v}')+\frac{1}{2}\rho'\Phi_2+\frac{1}{4}\eta'\Phi_3\cos(\mathrm{F}'-2\mathrm{v}'),$$

$$\overset{0,1}{\sum}\nu(\mathrm{h}\cos 2(\mathrm{v}-\mathrm{v}')) = \frac{1}{2}\eta\Phi_0\cos(\mathrm{F}+\mathrm{v}'-\mathrm{v})-\frac{1}{2}\eta\Phi_2\sin(\mathrm{F}+\mathrm{v}'-\mathrm{v}),$$

$$\overset{0,1}{\sum}\nu(\rho\mathrm{h}\cos 2(\mathrm{v}-\mathrm{v}')) = \frac{1}{4}\eta\Phi_0\cos(\mathrm{F}+\mathrm{v}'-\mathrm{v})+\frac{1}{4}\eta\Phi_2\sin(\mathrm{F}+\mathrm{v}'-\mathrm{v}),$$

$$\overset{0,1}{\sum}\nu(\rho'\mathrm{h}\cos 2(\mathrm{v}-\mathrm{v}')) = 0,$$

$$\overset{0,1}{\sum}\nu(\mathrm{h}\sin 2(\mathrm{v}-\mathrm{v}')) = \frac{1}{2}\eta\Phi_0\sin(\mathrm{F}+\mathrm{v}'-\mathrm{v})+\frac{1}{2}\eta\Phi_2\cos(\mathrm{F}+\mathrm{v}'-\mathrm{v}),$$

$$\overset{0,1}{\Sigma}\nu(\rho\mathrm{h}\sin 2(\mathrm{v}-\mathrm{v}')) = -\frac{1}{4}\eta\Phi_0\sin(\mathrm{F}+\mathrm{v}'-\mathrm{v}) + \frac{1}{4}\eta\Phi_2\cos(\mathrm{F}+\mathrm{v}'-\mathrm{v}),$$

$$\overset{0,1}{\Sigma}\nu(\rho'\mathrm{h}\sin 2(\mathrm{v}-\mathrm{v}')) = \quad 0.$$

Maintenant, si nous établissons les formules

$$\frac{\mu_l}{\mu_k}(1-\eta'^2)\overset{0,1}{\Sigma}\nu(\mathrm{P}'^{(1)}\mathrm{h})$$
$$= - \overset{0,1}{\Sigma}\nu\big(\mathrm{h}(\mathrm{P}'^1(0,0,0) + \mathrm{P}'^1(0,1,0)\rho + \mathrm{P}'^1(0,0,1)\rho')\big)$$
$$- 2\overset{0,1}{\Sigma}\nu\big(\mathrm{h}(\mathrm{P}'^1(1,0,0) + \mathrm{P}'^1(1,1,0)\rho + \mathrm{P}'^1(1,0,1)\rho')\cos(\mathrm{v}-\mathrm{v}')\big)$$
$$- 2\overset{0,1}{\Sigma}\nu\big(\mathrm{h}(\mathrm{P}'^1(2,0,0) + \mathrm{P}'^1(2,1,0)\rho + \mathrm{P}'^1(2,0,1)\rho')\cos 2(\mathrm{v}-\mathrm{v}')\big)$$

etc.,

qui sont de simples conséquences des équations (44), (46) et (47) du n° 91, et que nous y introduisions les valeurs données précédemment des synechies $\overset{0,1}{\Sigma}\nu(\mathrm{h})$, $\overset{0,1}{\Sigma}\nu(\rho\mathrm{h})$, etc., nous nous arrêterons à des résultats de la forme

$$(37') \qquad \frac{\mu_l}{\mu_k}(1-\eta'^2)\overset{0,1}{\Sigma}\nu(\mathrm{P}'^{(1)}\mathrm{h}) = \eta[A_0'\Phi_0 + A_1'\Phi_1 + A_2'\Phi_2 + A_3'\Phi_3] + \eta'[B_0'\Phi_0 + B_1'\Phi_1 + B_2'\Phi_2 + B_3'\Phi_3],$$

$$(38') \qquad \frac{\mu_l}{\mu_k}\overset{0,1}{\Sigma}\nu(\mathrm{Q}'^{(1)}\mathrm{h}) = \eta[C_0'\Phi_0 + C_1'\Phi_1 + C_2'\Phi_2 + C_3'\Phi_3] + \eta'[D_0'\Phi_0 + D_1'\Phi_1 + D_2'\Phi_2 + D_3'\Phi_3],$$

$$(39') \qquad \frac{\mu_l}{\mu_k}\overset{0,1}{\Sigma}\nu\left(\mathrm{R}'^{(0)}\frac{\partial\mathrm{h}}{\partial\mathrm{v}}\right) = \eta[E_0'\Phi_0 + E_1'\Phi_1 + E_2'\Phi_2 + E_3'\Phi_3] + \eta'[F_0'\Phi_0 + F_1'\Phi_1 + F_2'\Phi_2 + F_3'\Phi_3].$$

Les fonctions A_0', A_1', ..., B_0', ... s'obtiennent au premier coup d'oeil en vertu des expressions que nous venons de donner. Ainsi on a par exemple:

$$A_0' = \left|\mathrm{P}'^1(0,0,0) + \mathrm{P}'^1(2,0,0) - \frac{1}{2}(\mathrm{P}'^1(0,1,0) + \mathrm{P}'^1(2,1,0))\right|\cos(\mathrm{F}+\mathrm{v}-\mathrm{v}'),$$

$$A_1' = \left|\mathrm{P}'^1(0,0,0) - \frac{1}{2}\mathrm{P}'^1(0,1,0)\right|\cos(\mathrm{F}-(\mathrm{v}+\mathrm{v}')),$$

etc.

$$B'_0 = -P''^1(1,0,1)\cos F',$$

$$B'_1 = -\frac{1}{2}P''^1(1,0,1)\cos(F'-2v'),$$

$$B'_2 = 0,$$

$$B'_3 = \frac{1}{2}P''^1(1,0,1)\sin(F'-2v'),$$

etc.

Il ne paraît donc pas nécessaire de citer, à cette occasion, les formules s'y rapportant. Mais en revanche, il ne faut pas passer sous silence la remarque que les synechies des indices 1,0 et −1,0 se mettent sous une forme parfaitement analogue à celle des équations (37′), (38′) et (39′). On déduira en effet facilement les formules

$$(37)\qquad \frac{''}{''}(1-\eta^2)\overset{1,0}{\sum}\nu(P^{(1)}h) = \eta[A_0\Phi_0 + A_1\Phi_1 + A_2\Phi_2 + A_3\Phi_3] + \eta'[B_0\Phi_0 + B_1\Phi_1 + B_2\Phi_2 + B_3\Phi_3],$$

$$(38)\qquad \frac{''}{''}\overset{1,0}{\sum}\nu(Q^{(1)}h) = \eta[C_0\Phi_0 + C_1\Phi_1 + C_2\Phi_2 + C_3\Phi_3] + \eta'[D_0\Phi_0 + D_1\Phi_1 + D_2\Phi_2 + D_3\Phi_3],$$

$$(39)\qquad \frac{''}{''}\overset{1,0}{\sum}\nu\left(R^{(0)}\frac{\partial h}{\partial v}\right) = \eta[E_0\Phi_0 + E_1\Phi_1 + E_2\Phi_2 + E_3\Phi_3] + \eta'[F_0\Phi_0 + F_1\Phi_1 + F_2\Phi_2 + F_3\Phi_3],$$

où l'on a employé, en analogie avec la manière d'écrire les équations (37′), (38′) et (39′), la notation abrégée $\overset{1,0}{\sum}\nu(X)$ au lieu de la notation complète $\overset{1,0}{\sum}\nu(X) + \overset{1,0}{\sum}\nu(X)$.

En substituant, dans les expressions signalées, les valeurs des quatre fonctions $\Phi_0, \ldots, \Phi_3$, on retombera sur la forme des équations (31), (32) et (33).

Quant aux fonctions A_0, A_1, etc., on les déduit facilement d'une manière directe, ayant dressé un tableau des valeurs de $\overset{1,0}{\sum}\nu(h)$, $\overset{1,0}{\sum}\nu(\rho)$, etc., tel que nous avons donné précédemment des valeurs de $\overset{0,1}{\sum}\nu(h)$, etc., ce

qui s'effectuera presqu'immédiatement en vertu des équations (34) et (35). Mais on pourra aussi, les équations (31), (32) et (33) étant données, en tirer non seulement les fonctions A_0, A_1, ..., mais encore les quatre fonctions Φ_0, .., Φ_3. Nous ne nous y arrêtons pas à cette occasion.

107. Les expressions (37)—(39) et (37′)—(39′) se ramènent facilement à la forme fondamentale généralisée: on y parvient en effet par la simple remarque que nous allons signaler.

Nous n'avons pas, il est vrai, mis en évidence la structure analytique de toutes les fonctions A_0, etc., mais nous nous convainquons, par une inspection rapide des formules servant à les établir que leur type général est donné par l'une ou l'autre des formules

$$(\mathrm{I})\qquad \begin{cases} \mathrm{A} = l_0 \cos(\mathrm{F} + \varepsilon \mathrm{v} + \varepsilon' \mathrm{v}'), \\ \mathrm{B} = l_1 \cos(\mathrm{F}' + \varepsilon \mathrm{v} + \varepsilon' \mathrm{v}'), \\ \mathrm{C} = l_2 \sin(\mathrm{F} + \varepsilon \mathrm{v} + \varepsilon' \mathrm{v}'), \\ \mathrm{D} = l_3 \sin(\mathrm{F}' + \varepsilon \mathrm{v} + \varepsilon' \mathrm{v}'), \end{cases}$$

les l_0, .., l_3 étant des coefficients numériques, et ε et ε', aussi de pareils coefficients, mais n'acquérant que les valeurs -2, -1, 0 et $+1$. Il convient d'ajouter que les A et les C sont toujours multipliés par η, les B et les D, par η'.

Cela étant, si nous rappelons les équations (α) du n° 103, et que nous négligions les parties dépendant de (λ), nous aurons:

$$(\mathrm{II})\qquad \begin{cases} \eta \mathrm{A} = l_0 \cos(\varepsilon \mathrm{v} + \varepsilon' \mathrm{v}')\rho + l_0 \sin(\varepsilon \mathrm{v} + \varepsilon' \mathrm{v}') \dfrac{d\rho}{d\mathrm{v}}, \\ \eta' \mathrm{B} = l_1 \cos(\varepsilon \mathrm{v} + \varepsilon' \mathrm{v}')\rho' + l_1 \sin(\varepsilon \mathrm{v} + \varepsilon' \mathrm{v}') \dfrac{d\rho'}{d\mathrm{v}}, \\ \eta \mathrm{C} = l_2 \sin(\varepsilon \mathrm{v} + \varepsilon' \mathrm{v}')\rho - l_2 \cos(\varepsilon \mathrm{v} + \varepsilon' \mathrm{v}') \dfrac{d\rho}{d\mathrm{v}}, \\ \eta' \mathrm{D} = l_3 \sin(\varepsilon \mathrm{v} + \varepsilon' \mathrm{v}')\rho' - l_3 \cos(\varepsilon \mathrm{v} + \varepsilon' \mathrm{v}') \dfrac{d\rho'}{d\mathrm{v}}. \end{cases}$$

Ensuite, si nous introduisons les valeurs ayant ces types dans les équations (37)—(39) et (37′)—(39′), il résultera des expressions de la forme générale

$$(40) \qquad \sum^{s,s'} \nu(X) = \mathrm{L}\rho + \mathrm{L}'\rho' + \mathrm{K}\frac{d\rho}{dv} + \mathrm{K}'\frac{d\rho'}{dv},$$

où X est mis à la place des fonctions P, Q et R; s et s' signifient les indices 1, 0 ou 0, 1, et L, L′, K, K′, des quadrinômes, dont les différents termes sont des produits d'une des fonctions $\Phi_0, \ldots, \Phi_3$ par un cosinus ou un sinus de l'argument $\varepsilon v + \varepsilon' v'$, ce produit multiplié encore par un coefficient constant.

Dans certaines occasions, surtout quand il s'agit de réduire la fonction perturbatrice à la forme fondamentale généralisée, il sera utile d'avoir exprimé les $\Phi_0, \ldots, \Phi_3$ moyennant les fonctions $\mathfrak{z}, \mathfrak{z}', \frac{d\mathfrak{z}}{dv}$ et $\frac{d\mathfrak{z}'}{dv}$.

Pour y parvenir, je rappelle les relations

$$\mathfrak{z} = I \sin(v - \vartheta - (\Omega - \Theta)) = I \sin(v - \vartheta_1),$$

$$\frac{d\mathfrak{z}}{dv} = I \cos(v - \vartheta_1) + (\zeta),$$

la fonction (ζ) n'étant pas tout à fait identique avec celle que nous avons désignée par le même symbole dans le n° 23; mais la différence entre ces deux fonctions est toujours une très petite quantité, d'ailleurs facile à mettre en évidence.

Des équations signalées, on tire facilement les suivantes

$$\mathfrak{z} \sin v + \frac{d\mathfrak{z}}{dv} \cos v = I \cos(\vartheta_1 - G) + (\zeta) \cos v,$$

$$-\mathfrak{z} \cos v + \frac{d\mathfrak{z}}{dv} \sin v = I \sin(\vartheta_1 - G) + (\zeta) \sin v;$$

et on obtiendra également:

$$\mathfrak{z}' \sin v' + \frac{d\mathfrak{z}'}{dv} \cos v' = I' \cos(\vartheta_1' - G') + (\zeta') \cos v',$$

$$-\mathfrak{z}' \cos v' + \frac{d\mathfrak{z}'}{dv} \sin v' = I' \sin(\vartheta_1' - G') + (\zeta') \sin v'.$$

Par un calcul assez simple, on déduit de ces relations en négligeant tout terme multiplié par l'un ou l'autre des fonctions (ζ) et (ζ'), les formules que voici:

$$I^2 = \mathfrak{z}^2 + \left(\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)^2, \qquad I'^2 = \mathfrak{z}'^2 + \left(\frac{d\mathfrak{z}'}{dv'}\right)^2,$$

$$II' \cos(\vartheta_1 - \vartheta_1' - (G - G')) = \left(\mathfrak{z}\mathfrak{z}' + \frac{d\mathfrak{z}}{dv}\frac{d\mathfrak{z}'}{dv'}\right)\cos(v - v') + \left(\mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{z}'}{dv'} - \mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)\sin(v - v'),$$

$$II' \sin(\vartheta_1 - \vartheta_1' - (G - G')) = \left(\mathfrak{z}\mathfrak{z}' + \frac{d\mathfrak{z}}{dv}\frac{d\mathfrak{z}'}{dv'}\right)\sin(v - v') - \left(\mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{z}'}{dv'} - \mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)\cos(v - v'),$$

$$II' \cos(\vartheta_1 + \vartheta_1' - G - G') = -\left(\mathfrak{z}\mathfrak{z}' - \frac{d\mathfrak{z}}{dv}\frac{d\mathfrak{z}'}{dv'}\right)\cos(v + v') + \left(\mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{z}'}{dv'} + \mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)\sin(v + v'),$$

$$II' \sin(\vartheta_1 + \vartheta_1' - G - G') = -\left(\mathfrak{z}\mathfrak{z}' - \frac{d\mathfrak{z}}{dv}\frac{d\mathfrak{z}'}{dv'}\right)\sin(v + v') - \left(\mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{z}'}{dv'} + \mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)\cos(v + v'),$$

$$I^2 \cos 2(\vartheta_1 - G) = 2\mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\sin 2v - \left(\mathfrak{z}^2 - \left(\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)^2\right)\cos 2v,$$

$$I^2 \sin 2(\vartheta_1 - G) = -2\mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\cos 2v - \left(\mathfrak{z}^2 - \left(\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)^2\right)\sin 2v,$$

$$I'^2 \cos 2(\vartheta_1' - G') = 2\mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}'}{dv'}\sin 2v' - \left(\mathfrak{z}'^2 - \left(\frac{d\mathfrak{z}'}{dv'}\right)^2\right)\cos 2v',$$

$$I'^2 \sin 2(\vartheta_1' - G') = -2\mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}'}{dv'}\cos 2v' - \left(\mathfrak{z}'^2 - \left(\frac{d\mathfrak{z}'}{dv'}\right)^2\right)\sin 2v',$$

formules qui entraînent ensuite les suivantes

$$(41) \qquad \Phi_0 = -\frac{1}{4}\left(\mathfrak{z}^2 + \mathfrak{z}'^2 + \left(\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)^2 + \left(\frac{d\mathfrak{z}'}{dv'}\right)^2\right) + \frac{1}{2}\left(\mathfrak{z}\mathfrak{z}' + \frac{d\mathfrak{z}}{dv}\frac{d\mathfrak{z}'}{dv'}\right)\cos(v - v') + \left(\mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{z}'}{dv'} - \mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)\sin(v - v'),$$

$$(41')\qquad \Phi_1 = \frac{1}{2}\mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\sin 2v - \frac{1}{4}\left(\mathfrak{z}^2 - \left(\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)^2\right)\cos 2v + \frac{1}{2}\mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}'}{dv'}\sin 2v'$$

$$- \frac{1}{4}\left(\mathfrak{z}'^2 - \left(\frac{d\mathfrak{z}'}{dv'}\right)^2\right)\cos 2v'$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\mathfrak{z}\mathfrak{z}' - \frac{d\mathfrak{z}}{dv}\frac{d\mathfrak{z}'}{dv'}\right)\cos(v+v') - \frac{1}{2}\left(\mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{z}'}{dv'} + \mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)\sin(v+v'),$$

$$(41'')\qquad \Phi_2 = \frac{1}{2}\left(\mathfrak{z}\mathfrak{z}' + \frac{d\mathfrak{z}}{dv}\frac{d\mathfrak{z}'}{dv'}\right)\sin(v-v') - \frac{1}{2}\left(\mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{z}'}{dv'} - \mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)\cos(v-v'),$$

$$(41''')\qquad \Phi_3 = -\frac{1}{2}\mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\cos 2v - \frac{1}{4}\left(\mathfrak{z}^2 - \left(\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)^2\right)\sin 2v$$

$$- \frac{1}{2}\mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}'}{dv'}\cos 2v' - \frac{1}{4}\left(\mathfrak{z}'^2 - \left(\frac{d\mathfrak{z}'}{dv'}\right)^2\right)\sin 2v'$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\mathfrak{z}\mathfrak{z}' - \frac{d\mathfrak{z}}{dv}\frac{d\mathfrak{z}'}{dv'}\right)\sin(v+v') + \frac{1}{2}\left(\mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{z}'}{dv'} + \mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)\cos(v+v').$$

En substituant ces valeurs dans les quadrinômes K, K', L et L', on exprimera comme fonctions des quantités ρ, ρ', $\mathfrak{z}$ et $\mathfrak{z}'$, les synechies données par l'équation (40); en d'autres mots, on mettra ces synechies sous une forme analogue à celle que nous avons employée dans les équations (27), (28), (27') et (28').[1] Cette forme, bien qu'elle renferme les fonctions $\mathfrak{z}$ et $\mathfrak{z}'$ ainsi que leurs dérivées, sera toujours appelée forme fondamentale généralisée.

Mais les synechies que nous venons de considérer renferment les termes sousélémentaires du type (*B*), c'est à dire, les termes devant entrer dans les équations différentielles destinées à déterminer les fonctions ρ, ρ', $\mathfrak{z}$ et $\mathfrak{z}'$, bien attendu, les parties de ces fonctions que nous avons désignées par (ρ), (ρ'), $(\mathfrak{z})$ et $(\mathfrak{z}')$.

On exprimera de la sorte, moyennant les inconnues mêmes et leurs premières dérivées, les termes faisant parties des équations nommées.

108. Outre les termes nouvellement considérés, il y en a qui sont coordonnés avec eux. D'abord les termes du cinquième degré qu'il ne faut pas, généralement, négliger, mais desquels on pourra tenir compte dans

[1] J'emploie toujours les notations abrégées ρ, ρ', $\mathfrak{z}$ et $\mathfrak{z}'$ au lieu de (ρ), (ρ'), $(\mathfrak{z})$ et $(\mathfrak{z}')$.

une seconde approximation; puis des termes d'un degré impair et plus élevé. Il y a ensuite des termes sousélémentaires du second ordre, dans certains cas acquérant des valeurs assez considérables.

Quant à ces derniers, on les déduira, après avoir établi, sous la forme appelée diastématique, les inégalités diastématiques du premier ordre, ainsi que les inégalités anastématiques du même ordre, ce qui, dans la plupart des cas, s'effectuera, en procédant d'une manière analogue à celle que nous avons employée dans le n° 102. Or, en multipliant deux séries de la forme diastématique, ce qui est demandé par l'équation (β) du n° 94, il se produira, entre autres, des termes appartenant aux synechies que nous venons de considérer, termes qu'il faut détacher des autres et réunir, du moins tant qu'ils sont du troisième degré, avec les termes du même genre qui sont donnés par les équations (27), (28), etc.

De pareils termes se produisent encore par des opérations destinées à déterminer les inégalités du premier ordre. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de la fonction W donnée par l'équation

$$\frac{dW}{dv} = \alpha \sin(\lambda v + b + \theta),$$

α étant une constante du premier ordre et θ, un agrégat périodique renfermant entre autres le terme

$$\theta = \gamma \sin((1-\lambda)v + B),$$

le seul duquel nous nous occuperons maintenant. On y a désigné par γ une constante du premier ordre.

Cela étant, nous supposons que W soit exprimé par la formule

$$W = -\frac{\alpha}{\lambda}\cos(\lambda v + b + \theta) + \psi.$$

Alors, pour déterminer la fonction ψ, nous aurons facilement l'équation

$$\frac{d\psi}{dv} = -\frac{\alpha}{\lambda}\sin(\lambda v + b + \theta)\frac{d\theta}{dv}.$$

Il s'ensuit, si l'on considère la valeur de θ,

$$\frac{d\psi}{dv} = -\frac{\gamma\alpha(1-\lambda)}{\lambda}\sin(\lambda v + b + \theta)\cos((1-\lambda)v + B),$$

d'où l'on conclut, immédiatement, que Φ contient un terme sousélémentaire du second ordre et du type (B), terme qui devra être réuni aux autres de même espèce.

Mais à cette place, il me faut reproduire une remarque que j'ai faite déjà dans mon mémoire »nouvelles recherches etc.», § 5. La voici:

En abordant les approximations successives (pour obtenir les intégrales des équations semblables à celles que nous allons établir dans le livre suivant) par l'intégration d'une équation linéaire ou bien, ce qui revient au même, d'un système d'équations linéaires, on n'arrivera pas toujours à des résultats satisfaisants. Et même, si en partant d'un résultat obtenu par l'intégration d'un tel système, on continue, d'une manière conséquente, les approximations successives, on tombera tôt ou tard sur des développements divergents. Il en est autrement quand on commence par l'intégration d'un système d'équations, chacune du troisième degré: on pourra alors, sauf dans des cas exceptionnels, réduire de telles équations à des équations linéaires et horistiques, après quoi on arrivera, en les intégrant, à de véritables approximations. Ayant obtenu des résultats de cette qualité, on déduira de proche en proche les expressions des quantités cherchées avec une exactitude aussi grande qu'on voudra.

Voilà la raison pourquoi j'ai donné beaucoup de soins à mettre en évidence les termes du troisième degré: ils devront dès l'abord entrer dans les équations différentielles, et il importe de les avoir mis sous la forme la plus convenable.

Mais jusqu'à présent, je n'ai traité que les termes faisant partie des équations qui serviront à déterminer les fonctions (ρ) et (ρ'), termes que j'ai appelés, au n° 62, termes à caractère diastématique. Quant aux termes à caractère anastématique, c'est à dire les termes qui entreront dans les équations déstinées à la détermination des fonctions (ζ) et (ζ'), on les déduira, en temps et lieu, très facilement des développements donnés dans le numéro cité.

109. Il convient d'ajouter quelques remarques relativement au nombre des arguments fondamentaux entrant dans le développement de la fonction perturbatrice, ce développement supposé mis sous la forme diastématique.

En exprimant les fonctions (ρ) et (ρ') moyennant les arguments diastématiques, et $\cos H$ par la formule (15) du n° 53, les arguments entrant

dans la fonction perturbatrice seront, sauf ceux qui pourront se trouver dans les expressions de η, η' et $\sin\frac{1}{2}J^2$, au nombre de quatre, savoir: F, F', $v - \Sigma$ et $v' - \Sigma'$, ou bien: F, F', x et y, si l'on veut remplacer les angles $v - \Sigma$ et $v' - \Sigma'$ par leur différence et leur somme. Mais ces arguments fondamentaux, étant transformés et combinés les uns avec les autres, de manières très différentes, on n'a pas toujours eu soin de relever la propriété des inégalités planétaires d'être liées aux arguments se composant de quatre éléments. Mais à cette omission contribuent encore d'autres motifs.

Ayant remplacé les arguments F, F', v et v' par les longitudes moyennes des planètes et des périhélies, on a en effet mis en évidence six arguments distincts, qui se réduisent, toutefois, sur-le-champ à cinq, et qui doivent être calculés séparément. C'est seulement M. Lindstedt qui, dans un mémoire renommé,[1] a tenté d'exprimer, moyennant quatre arguments étant des fonctions linéaires du temps, sans intermédiaire des longitudes astronomiques, les distances mutuelles des trois corps, c'est à dire les quantités d'où dépend la fonction perturbatrice. Mais M. Poincaré, à diverses reprises, a montré que les séries résultant des procédés de M. Lindstedt ne sont pas convergentes dans le sens rigoureux du mot. Pour une solution absolue du problème des trois corps appliqué aux théories des planètes, la seule dont nous nous occupons dans l'ouvrage présent, la méthode de M. Lindstedt ne paraît donc pas convenir. Il semble au contraire presque prudent de ne pas sortir des notations usuelles, où sont mis en évidence les arguments astronomiques, notations qui d'ailleurs n'augmentent pas d'un seul le nombre des inégalités.

C'est M. Weiler qui, le premier je crois, a prononcé expressément la nature des arguments, entrant dans le développement envisagé, d'être composés de quatre éléments ou arguments fondamentaux.[2]

Si l'on passe à la forme diastématique, et que l'on compte les longitudes des noeuds sur un plan fixe dans l'espace, le nombre des arguments fondamentaux sera encore six, nombre qui s'abaisse sur le champ à cinq, et qui se réduit ultérieurement à quatre, si le plan invariable des trois corps

[1] Voir le mémoire de M. Lindstedt inséré dans les astr. Nachr. T. 107.

[2] Voir les notes de M. Weiler inséré dans les astr. Nachr. N° 2515, 2516 et 2762.

est pris pour plan fondamental. En inspectant les développements donnés dans le livre présent et dans celui qui précède, on trouvera en effet que les six arguments sont d'abord, v, v', ω, ω', ϑ et ϑ', au lieu desquels on a admis, toutefois, ceux-ci: v, v', $\bar{\varpi}$, $\bar{\varpi}'$, $\bar{\vartheta}$ et $\bar{\vartheta}'$, isocinétiques avec les premiers et ne différant d'eux que par les agrégats périodiques G et G', en sorte qu'on a: $\mathrm{v} = v - G$, etc.

Mais ces éléments, c'est à dire, les v, v', ... n'entrent dans les divers arguments que par leurs différences. En effet, chaque argument apparaissant dans le développement de la fonction perturbatrice, s'exprimera, on le voit facilement, par la formule

$$\text{Arg.} = s(\mathrm{v} - \bar{\varpi}) - s'\mathrm{V} + \mathrm{i}(\bar{\varpi} - \bar{\vartheta}) + \mathrm{i}'(\bar{\varpi}' - \bar{\vartheta}') + m(\bar{\vartheta} - \bar{\vartheta}'),$$

où l'on a désigné par s, s', i, i' et m des entiers positifs ou négatifs, où V remplace la différence $\mathrm{v}' - \bar{\varpi}'$, et où finalement on a mis de côté les agrégats périodiques $\pi - \Gamma$, $\pi' - \Gamma'$, etc. Dans le cas de trois corps, la différence $\bar{\vartheta} - \bar{\vartheta}'$ devient égale à zéro ou plutôt à un agrégat périodique, si l'on choisit le plan invariable pour plan fondamental, et on sera réduit à quatre arguments. Dans le cas de plusieurs corps, par contre, on ne saurait faire disparaître les différences $\bar{\vartheta} - \bar{\vartheta}'$ à l'exception d'une seule; mais cette simplification n'étant pas de grande importance, il convient mieux de fixer la position du plan fondamental par d'autres motifs que par la condition qu'une des différences $\vartheta - \vartheta'$ disparaisse. On pourra donc prendre l'écliptique fixe à une certaine époque pour plan fondamental, ce qui amènerait quelques avantages aux calculs astronomiques. Le nombre total des arguments fondamentaux d'où dépendent les inégalités des planètes principales, dues à leurs actions mutuelles, est donc égal à $3 . 8 = 24$, ou bien, si l'on veut, égal à $3 . 8 - 1 = 23$.

Le Verrier, dans les théories de Jupiter et de Saturne, a employé les arguments fondamentaux

$$v + \underline{\vartheta}'' - \underline{\vartheta}\,,\quad v'\,,\quad \omega + \underline{\vartheta}'' - \underline{\vartheta}\,,\quad \omega' \text{ et } -2\underline{\vartheta}'',$$

ou plutôt des arguments variant proportionellement au temps, mais isocinétiques avec ceux-là. Dans le cas de trois corps, le nombre des arguments fondamentaux n'excèderait pas celui qu'on aurait trouvé en employant les angles signalés précédemment. Mais déjà dans le cas du soleil et de trois planètes, le nombre des arguments fondamentaux de Le Verrier est

plus grand que celui des nôtres, et ce nombre croît avec celui des planètes. L'ensemble des arguments figurant dans les développements que j'ai exposés dans ce qui précède, paraît donc l'emporter sur le système employé par Le Verrier, du moins lorsqu'il s'agit des inégalités d'un ordre plus élevé que le premier. Voilà la raison pourquoi je compte les angles v, ω et ϑ, ou bien v, ϖ et ϑ, d'une direction légèrement variable et différente pour les diverses planètes.

LIVRE QUATRIÈME.

Les équations différentielles des mouvements des planètes.

Pour l'étude des mouvements des planètes, les équations en coordonnées rectangulaires qu'offre la dynamique ne sont pas les plus convenables. Elles jouissent, il est vrai, d'une symétrie parfaite, mais elles donnent, en revanche, les quantités demandées au moyen de formules où rien n'est fait pour aplanir les complications. En effet, les coordonnées rectangulaires s'obtenant, toutes les trois, par des opérations semblables, il n'y aura pas lieu de séparer les difficultés, de les distribuer sur différentes équations, et de les rendre, de la sorte, moins sensibles. Aussi n'a-t-on guère, que je sache, fondé l'analyse des inégalités planétaires sur l'emploi direct des équations dont nous venons de parler, mais bien sur d'autres qui en dérivent plus ou moins facilement.[1] Il y en a plusieurs systèmes, desquels je mentionnerai les deux qu'on obtient:

1° en remplaçant les coordonnées rectangulaires par le rayon vecteur, la longitude comptée sur un plan fixe, et à partir d'une direction fixe dans ce plan, et finalement la latitude sur ce plan;

2° en employant la méthode de la variation des éléments képleriens.

En introduisant les coordonnées polaires, on obtient au lieu des équations déjà mentionnées, trois équations nouvelles se prêtant avantageusement comme base à l'étude des inégalités. Les préparations pour y arriver sont, en quelques mots, les suivantes.

Les trois équations en coordonnées polaires, n'étant pas symétriques se mettent facilement sous diverses formes, soit en changeant les fonctions

[1] Il faut toutefois consulter le passage dans les numéros 631—634 du »Die Differential- und Integralrechnung» par I. L. Raabe sur le problème dont il s'agit. La méthode de l'auteur, ainsi que celle d'Encke ne se prêtent, cependant, pas à des solutions véritables.

Les théories de la lune dues à Euler et à d'Oppolzer sont fondées sur l'emploi des axes rectangulaires, il est vrai; mais ces axes sont mobiles dans l'espace.

cherchées, soit, la variable indépendante. Parmi elles, il me faut mentionner la forme employée par LAPLACE dans sa théorie de la lune, ainsi que celle que HANSEN a mise en tête de ses travaux. Ces deux formes ne diffèrent pas, au fond, essentiellement l'une de l'autre; et le système d'équations que nous allons mettre en usage dans la suite est d'une forme analogue, sauf toutefois les altérations qui sont dues à l'emploi de fonctions élémentaires au lieu d'éléments constants.

Le nouveau système d'équations que nous allons faire connaître prochainement, est susceptible d'être décomposé en systèmes partiels dont les solutions absolues peuvent être obtenues, du moins dans le cas des planètes principales. Cette décomposition est le moyen le plus efficace de trancher les difficultés inhérentes aux problèmes dont nous nous occupons. On a bien aussi, dès que ce problème fut posé, considéré le moyen signalé; mais on a, à peu d'exceptions près, opéré la décomposition envisagée en développant, suivant les masses des planètes, les quantités dont il s'agissait de trouver les expressions en fonctions du temps. On a même quelquefois égalé à zéro la somme de tous les termes du même ordre, de façon à avoir chaque système partiel indépendant de ces masses. De la sorte, la solution du problème s'obtenait par des approximations successives; mais, par malheur, ni les solutions des systèmes partiels, au moyen de séries trigonométriques, n'étaient généralement convergentes, à l'exception de celle du premier système, ni la suite des approximations successives non plus. Il faut donc qu'on établisse les systèmes partiels suivant un autre principe: c'est ce que nous allons faire dans la suite.

La méthode de variation des constantes arbitraires conduit a un système d'équations dont la rigueur ne peut pas être contesté, il est vrai; mais dont intégration se montre très difficile, si l'on en veut tirer des solutions absolues, c'est à dire, des solutions sans développements suivant les puissances du temps, et où les développements trigonométriques sont uniformément convergents. En effet, l'intégration des équations établies de la sorte ne s'opère d'une façon aisée que si l'on y néglige les termes du second ordre ou, au moins, les termes du troisième degré. Dans le premier cas, on ne saurait éviter des développements suivant les puissances de la variable indépendante; dans le second, des séries trigonométriques divergentes apparaîtront tôt au tard. Je reviendrai cependant à cette question.

CHAPITRE I.

Transformations générales.

110. Par une méthode ingénieuse et bien à la connaissance des astronomes, LAGRANGE a transformé le système primitif des équations de la dynamique. Son résultat relativement aux équations en coordonnées polaires consiste en le système que voici:

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned} &r\frac{d^2r}{dt^2}-\cos b^2\left(\frac{dl}{dt}\right)^2-r\left(\frac{db}{dt}\right)^2+\frac{\mu}{r^2}=\frac{\partial\Omega}{\partial r},\\ &\frac{d\left(r^2\cos b^2\dfrac{dl}{dt}\right)}{dt}=\frac{\partial\Omega}{\partial l},\\ &r^2\cos b\sin b\left(\frac{dl}{dt}\right)^2+\frac{d\left(r^2\dfrac{db}{dt}\right)}{dt}=\frac{\partial\Omega}{\partial b},\end{aligned}\right.$$

les notations étant celles que nous avons employées dans le troisième livre.

Ce n'est cependant pas en conservant la forme signalée que nous allons utiliser les équations en coordonnées polaires, vu que l'emploi de la longitude dans l'orbite offre quelque supériorité à celui de la longitude comptée sur le plan fixe. En rappelant les équations (14) et (19) du n° 19, on obtiendra:

$$\cos b^2\left(\frac{dl}{dt}\right)^2+\left(\frac{db}{dt}\right)^2=\frac{\cos i^2+\sin i^2\cos(w-\sigma)^2}{\cos b^2}\left(\frac{dw}{dt}\right)^2,$$

$$\cos b^2=\cos i^2+\sin i^2\cos(w-\sigma)^2.$$

En vertu de ces relations, on déduit immédiatement de la première des équations (1) la suivante:

$$(\mathrm{I})\quad\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{dw}{dt}\right)^2+\frac{\mu}{r^2}=\frac{\partial\Omega}{\partial r},$$

où l'on peut introduire la valeur

$$\frac{dw}{dt}=\frac{dv}{dt}+N.$$

L'équation (I) est notre première équation fondamentale; la seconde ne découle pas aisément des équations (1), mais on la déduit sans peine de la manière suivante.

En multipliant les équations (27) du n° 20 respectivement par γ_2, γ_1 et γ, et en formant ensuite la somme de ces produits, il viendra:

$$r^2\left(\frac{dv}{dt} + N\right) = \gamma_2\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) + \gamma_1\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) + \gamma\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right).$$

Après avoir différentié cette équation, on en tire, en remplaçant les secondes dérivées par les composantes des forces

$$\begin{aligned}\frac{d\left[r^2\left(\frac{dv}{dt} + N\right)\right]}{dt} &= \gamma_2\left(x\frac{\partial\Omega}{\partial y} - y\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right) + \gamma_1\left(z\frac{\partial\Omega}{\partial x} - x\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right) + \gamma\left(y\frac{\partial\Omega}{\partial z} - z\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right) \\ &+ \frac{d\gamma_2}{dt}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) + \frac{d\gamma_1}{dt}\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) + \frac{d\gamma}{dt}\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right).\end{aligned}$$

Mais cette expression se simplifie beaucoup, si l'on y introduit la valeur de la premier ligne du second membre d'après la première des équations (5') du n° 65, ainsi que les valeurs des binômes $x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}$, etc., données par les équations (27) du n° 20. On aura alors, en considérant la relation

$$\gamma d\gamma + \gamma_1 d\gamma_1 + \gamma_2 d\gamma_2 = 0,$$

ainsi que la seconde des équations (11) du n° 66, la seconde des équations fondamentales. Elle est:

$$\text{(II)} \qquad \frac{d\left(r^2\frac{dv}{dt}\right)}{dt} + \frac{d(r^2N)}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial v}.$$

Notre troisième équation fondamentale s'obtient tout de suite en introduisant, dans la troisième des équations (1) du n° 64, l'expression

$$z = r\mathfrak{z}.$$

Il viendra ainsi:

$$r\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\mathfrak{z}}{dt} + \left(\frac{d^2r}{dt^2} + \frac{\mu}{r^2}\right)\mathfrak{z} = \frac{\partial\Omega}{\partial z},$$

résultat qui, en vertu de l'équation (I), prend la forme suivante:

$$(\text{III}) \qquad r\frac{d^2\zeta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\zeta}{dt} + r\left(\left(\frac{dr}{dt} + N\right)^2 + \frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)\zeta = \frac{\partial\Omega}{\partial z}.$$

111. Avant d'aller plus loin, nous nous arrêtons un peu pour obtenir les résultats précédents par un procédé mis en usage par Hansen

En différentiant les équations (25) du n° 20, nous obtenons

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \alpha\frac{d^2\xi}{dt^2} + \beta\frac{d^2\eta}{dt^2} + \frac{d\alpha}{dt}\frac{d\xi}{dt} + \frac{d\beta}{dt}\frac{d\eta}{dt} - \frac{dN}{dt}(\alpha\eta - \beta\xi)$$

$$- N\left(\alpha\frac{d\eta}{dt} - \beta\frac{d\xi}{dt} + \eta\frac{d\alpha}{dt} - \xi\frac{d\beta}{dt}\right),$$

etc.,

d'où l'on tire, ayant égard aux équations (21) du n° 20 et (1) du n° 64, les deux suivantes:

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{dt^2} - 2N\dfrac{d\eta}{dt} + \left(\dfrac{\mu}{r^3} - N^2\right)\xi - \dfrac{dN}{dt}\eta = \dfrac{\partial\Omega}{\partial\xi}, \\[2ex] \dfrac{d^2\eta}{dt^2} + 2N\dfrac{d\xi}{dt} + \left(\dfrac{\mu}{r^3} - N^2\right)\eta + \dfrac{dN}{dt}\xi = \dfrac{\partial\Omega}{\partial\eta}. \end{cases}$$

Mais des équations précédentes, on déduit encore celle-ci:

$$\left(\gamma\frac{d\alpha}{dt} + \gamma_1\frac{d\alpha_1}{dt} + \gamma_2\frac{d\alpha_2}{dt}\right)\left(\frac{d\xi}{dt} - N\eta\right) + \left(\gamma\frac{d\beta}{dt} + \gamma_1\frac{d\alpha_1}{dt} + \gamma_2\frac{d\beta_2}{dt}\right)\left(\frac{d\eta}{dt} + N\xi\right) = \frac{\partial\Omega}{\partial\zeta}.$$

Ensuite, les équations (γ) et (γ') du n° 20 conduisent aux valeurs

$$\gamma\frac{d\alpha}{dt} + \gamma_1\frac{d\alpha_1}{dt} + \gamma_2\frac{d\alpha_2}{dt} = \frac{1}{\gamma_2}\left(\frac{d\alpha_2}{dt} - \beta_2 N\right),$$

$$\gamma\frac{d\beta}{dt} + \gamma_1\frac{d\beta_1}{dt} + \gamma_2\frac{d\beta_2}{dt} = \frac{1}{\gamma_2}\left(\frac{d\beta_2}{dt} + \alpha_2 N\right),$$

qui, introduites dans l'équation précédente, la changent en la suivante:

$$\left(\frac{d\alpha_2}{dt} - \beta_2 N\right)\left(\frac{d\xi}{dt} - N\eta\right) + \left(\frac{d\beta_2}{dt} + \alpha_2 N\right)\left(\frac{d\eta}{dt} + N\xi\right) = \gamma_2\frac{\partial\Omega}{\partial\zeta}$$

Si à cette relation, nous joignons la troisième des équations (26) du n° 20 qui s'écrit ainsi:

$$\left(\frac{d\alpha_2}{dt} - \beta_2 N\right)\xi + \left(\frac{d\beta_2}{dt} + \alpha_2 N\right)\eta = 0,$$

nous arrivons aux résultats que voici:

$$-\left(\frac{d\alpha_2}{dt} - \beta_2 N\right)\left(\xi\frac{d\eta}{dt} - \eta\frac{d\xi}{dt} + N(\xi^2+\eta^2)\right) = \gamma_2\eta\frac{\partial\Omega}{\partial\zeta},$$

$$\left(\frac{d\beta_2}{dt} + \alpha_2 N\right)\left(\xi\frac{d\eta}{dt} - \eta\frac{d\xi}{dt} + N(\xi^2+\eta^2)\right) = \gamma_2\xi\frac{\partial\Omega}{\partial\zeta}.$$

De ces relations, on tire immédiatement les valeurs de $\frac{d\alpha_2}{dt} - \beta_2 N$ et de $\frac{d\beta_2}{dt} + \alpha_2 N$; mais, pour simplifier les résultats, j'introduis d'abord une notation importante, savoir:

(3) $$\xi\frac{d\eta}{dt} - \eta\frac{d\xi}{dt} + N(\xi^2+\eta^2) = r^2\left(\frac{dv}{dt} + N\right) = \sqrt{c}$$

Il s'ensuit, en considérant l'équation (II),

(4) $$\frac{d\sqrt{c}}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial v}.$$

En vertu de l'équation (22) du n° 20, ainsi que des valeurs des dérivées $d\alpha_2$ et $d\beta_2$ données au n° 17, on arrive aux expressions

$$\frac{d\alpha_2}{dt} - \beta_2 N = -\cos i\left(\sin\sigma\frac{di}{dt} + \sin i\cos\sigma\frac{d\theta}{dt}\right),$$

$$\frac{d\beta_2}{dt} + \alpha_2 N = \cos i\left(\cos\sigma\frac{di}{dt} - \sin i\sin\sigma\frac{d\theta}{dt}\right),$$

à l'aide desquelles on tire des résultats précédents les formules

(5) $$\begin{cases} \dfrac{di}{dt} = \dfrac{\eta\sin\sigma + \xi\cos\sigma}{\sqrt{c}}\dfrac{\partial\Omega}{\partial\zeta}, \\[2ex] \sin i\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{\eta\cos\sigma - \xi\sin\sigma}{\sqrt{c}}\dfrac{\partial\Omega}{\partial\zeta}. \end{cases}$$

Cela étant, nous allons rétablir la valeur de N dont nous avons parlé vers la fin du n° 22, savoir:

$$N = g\frac{dv}{dt};$$

en l'introduisant dans l'équation (3), il viendra:

$$(6) \qquad r^2\frac{dv}{dt} = \frac{\sqrt{c}}{1+g};$$

et, avec cette relation, on tire des équations (5) les suivantes:

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{di}{dv} &= \frac{r^3(1+g)}{c}\cos(v-\theta-G)\frac{\partial\Omega}{\partial\zeta}, \\ \sin i\frac{d\theta}{dv} &= \frac{r^3(1+g)}{c}\sin(v-\theta-G)\frac{\partial\Omega}{\partial\zeta}, \end{aligned} \right.$$

en ayant égard, toutefois, à la relation

$$\sigma = \theta + G.$$

Reprenons maintenant l'équation (55) du n° 23, et introduisons-y les valeurs précédentes de $\frac{di}{dv}$ et de $\frac{d\theta}{dv}$; il viendra de la sorte, si l'on remplace le produit $\sin i \sin(v-\theta-G)$ par la notation ζ,

$$\frac{d^2\zeta}{dv^2} + (1+g)^2\zeta = \frac{r^3(1+g)^2}{c}\cos i\frac{\partial\Omega}{\partial\zeta},$$

ou bien, en considérant l'équation (16) du n° 66,

$$(III_1) \qquad \frac{d^2\zeta}{dv^2} + (1+g)^2\zeta = \frac{r^3(1+g)^2}{c}\cos i\,\frac{z}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial h}.$$

L'équation que nous venons de trouver doit être une simple transformation de l'équation (III). Pour mettre en évidence l'identité de ces deux équations, introduisons comme variable indépendante, dans l'équation (III), v au lieu de t.

En considérant l'équation (6), nous aurons d'abord les relations

$$
(8)\quad
\begin{cases}
\dfrac{d\mathfrak{z}}{dt} = \dfrac{d\mathfrak{z}}{dv}\dfrac{\sqrt{c}}{r^2(1+g)}, \\[2ex]
\dfrac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2} = \dfrac{d^2\mathfrak{z}}{dv^2}\dfrac{c}{r^4(1+g)^2} + \dfrac{d\mathfrak{z}}{dv}\dfrac{d\sqrt{c}}{dv}\dfrac{\sqrt{c}}{r^4(1+g)^2} - 2\dfrac{d\mathfrak{z}}{dv}\dfrac{dr}{dv}\dfrac{c}{r^5(1+g)^2},
\end{cases}
$$

en vertu desquelles on arrive, en partant de l'équation (III), à celle-ci:

$$
(\mathrm{III}_2)\qquad \frac{d^2\mathfrak{z}}{dv^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{c}\frac{dc}{dv}\frac{d\mathfrak{z}}{dv} + (1+g)^2\left\{1 + \frac{r^3}{c}\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right\}\mathfrak{z} = \frac{r^3(1+g)^2}{c}\frac{\partial\Omega}{\partial z}.
$$

Mais puisqu'on aura, en introduisant, dans la formule (17) du n° 66, la valeur de $\frac{\partial\Omega}{\partial v}$ selon l'équation (4),

$$
r\frac{\partial\Omega}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{1}{r^2(1+g)^2}\frac{dc}{dv}\frac{d\mathfrak{z}}{dv} + r\frac{\partial\Omega}{\partial r}\mathfrak{z} + \cos i\frac{\zeta}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial \mathfrak{h}},
$$

on retrouvera immédiatement l'équation (III_1), en substituant la valeur signalée dans l'équation (III_2).

Je vais maintenant indiquer une troisième transformation de l'équation (III); et dans ce but je pars de l'équation (III_2).

En écrivant la troisième des équations (12) du n° 66 de la manière suivante:

$$
\frac{\partial\Omega}{\partial z} = -\frac{\mu r\mathfrak{z}}{\Delta^3} + \mu' r'\mathfrak{z}'\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right),
$$

et en introduisant cette valeur dans l'équation (III_2), il viendra sur-le-champ:

$$
\frac{d^2\mathfrak{z}}{dv^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{c}\frac{dc}{dv}\frac{d\mathfrak{z}}{dv} + (1+g)^2\left\{1 + \frac{r^3}{c}\left(r\frac{\partial\Omega}{\partial r} + \frac{\mu r^2}{\Delta^3}\right)\right\}\mathfrak{z} = \frac{\mu' r^3 r'\mathfrak{z}'(1+g)^2}{c}\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right),
$$

équation qui, en vertu de la première des équations (14) du n° 66, se change en celle-ci:

$$
(\mathrm{III}_3)\qquad \frac{d^2\mathfrak{z}}{dv^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{c}\frac{dc}{dv}\frac{d\mathfrak{z}}{dv} + (1+g)^2\left\{1 + \frac{\mu' r^3 r'}{c}\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right)\cos H\right\}\mathfrak{z}
$$
$$
= \frac{\mu' r^3 r'\mathfrak{z}'(1+g)^2}{c}\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right).
$$

Mais revenons encore un moment à l'équation (III$_1$) pour en tirer un résultat qui peut être mis en usage au lieu de l'équation (III$_3$).

Dans l'équation (III$_1$), on doit finalement exprimer ζ' moyennant les deux fonctions $\mathfrak{z}$ et $\mathfrak{z}'$, ainsi que par leurs dérivées, ce qui s'opère en utilisant l'expression de $\frac{\zeta'}{r'}$ donnée au n° 66. En écrivant cette expression ainsi :

$$\frac{\zeta'}{r'} = -\left\{\left(1-\frac{1}{2}\mathfrak{z}'^2\right)\cos w - \frac{1}{2}\mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}'}{dv}\sin w\right\}\mathfrak{z}$$

$$+\frac{1}{1+\eta}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\mathfrak{z}'^2\right)\sin w + \frac{1}{2}\mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}'}{dv}\cos w\right\}\frac{d\mathfrak{z}}{dv} + \cos i\ \mathfrak{z}',$$

où l'on a placé w au lieu de v — v', et, supprimé tout terme surpassant le troisième degré, il résultera de la sorte:

$$\text{(III}_1\text{)}\quad \frac{d^2\mathfrak{z}}{dv^2} = \frac{r'^2(1+\eta)\cos i}{c}\frac{\partial\Omega}{\partial\mathfrak{h}}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\mathfrak{z}'^2\right)\sin w + \frac{1}{2}\mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}'}{dv}\cos w\right\}\frac{d\mathfrak{z}}{dv}$$

$$+(1+\eta)^2\left\{1+\frac{r'\cos i}{c}\frac{\partial\Omega}{\partial\mathfrak{h}}\left(\left(1-\frac{1}{2}\mathfrak{z}'^2\right)\cos w - \frac{1}{2}\mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}'}{dv}\sin w\right)\right\}\mathfrak{z}$$

$$-\frac{r'^2(1+\eta)^2}{c}\cos i^2\mathfrak{z}'\frac{\partial\Omega}{\partial\mathfrak{h}},$$

équation, où l'on peut remplacer la dérivée partielle $\frac{\partial\Omega}{\partial\mathfrak{h}}$ par sa valeur $\mu' r r'\left(\frac{1}{\Delta^3}-\frac{1}{r'^3}\right)$.

112. Le résultat que nous avons indiqué par les équations (3) et (4), et qui n'est autre chose que l'équation (II) sous une forme un peu modifiée, se retrouve immédiatement des équations (2), de sorte qu'il ne se présente pas de motif d'en faire l'exposition. C'est à peu près de même quant à la déduction de l'équation (I), en partant des équations (2); mais puisqu'il y a là quelques points utiles à observer, je m'y arrête quelques instants.

En multipliant la première des équations (2) par ξ, et la seconde par

η, en ajoutant ensuite les deux produits obtenus, et en considérant finalement la première des équations (11) du n° 66, on obtiendra:

$$\text{(a)} \qquad \xi \frac{d^2\xi}{dt^2} + \eta \frac{d^2\eta}{dt^2} - 2N\left(\xi \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\xi}{dt}\right) - N^2 r^2 + \frac{\mu}{r} = r \frac{\partial \Omega}{\partial r}.$$

On déduit, d'autre part, les relations

$$\text{(b)} \qquad \left\{ \begin{aligned} & r \frac{d^2 r}{dt^2} + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \xi \frac{d^2\xi}{dt^2} + \eta \frac{d^2\eta}{dt^2} + \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2, \\ & \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{dv}{dt}\right)^2, \end{aligned} \right.$$

d'où il s'ensuit:

$$\xi \frac{d^2\xi}{dt^2} + \eta \frac{d^2\eta}{dt^2} = r \frac{d^2 r}{dt^2} - r^2 \left(\frac{dv}{dt}\right)^2.$$

Avec cette relation, on tire de l'équation (a), après y avoir remplacé N par sa valeur $g \frac{dv}{dt}$,

$$r \frac{d^2 r}{dt^2} - (1 + g)^2 r^2 \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{\mu}{r} = r \frac{\partial \Omega}{\partial r},$$

ou bien:

$$\text{(I}_1\text{)} \qquad \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{c^2}{r^3} + \frac{\mu}{r^2} = \frac{\partial \Omega}{\partial r},$$

résultat qui, évidemment, est identique avec l'équation (I).

Nous allons maintenant déduire encore une quatrième équation fondamentale qui, à certaines occasions, nous sera très utile.

En multipliant les équations (2) par $\frac{d\xi}{dt}$, respectivement par $\frac{d\eta}{dt}$, et en formant la somme des produits, il résultera:

$$\text{(IV)} \qquad \frac{1}{2} \frac{d\left(\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2\right)}{dt} + \left(\frac{\mu}{r^3} - N^2\right) r \frac{dr}{dt} + \frac{dN}{dt}\left(\xi \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\xi}{dt}\right)$$

$$= \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} + \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dt}.$$

Si l'on y introduit les valeurs

$$\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{c}{(1+g)^2 r^2},$$

$$\xi\frac{d\eta}{dt} - \eta\frac{d\xi}{dt} = \sqrt{c} - N r^2,$$

et encore celle ci:

$$(9) \qquad \frac{\partial\Omega}{\partial\xi}\frac{d\xi}{dt} + \frac{\partial\Omega}{\partial\eta}\frac{d\eta}{dt} = \left(\frac{\partial\Omega}{\partial v} + \frac{\partial\Omega}{\partial r}\frac{dr}{dv}\right)\frac{dr}{dt},$$

on obtiendra, après avoir ajouté au résultat obtenu l'équation identique

$$N\frac{d\sqrt{c}}{dt} = N\frac{d\sqrt{c}}{dt},$$

l'égalité que voici:

$$(\mathrm{IV}_1) \qquad \frac{1}{2}\frac{d\left(\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{c}{(1+g)^2 r^2}\right)}{dt} - \frac{d\left(\frac{\mu}{r}\right)}{dt} - \frac{1}{2}\frac{d(N^2 r^2)}{dt} + \frac{d(N\sqrt{c})}{dt}$$
$$= \left(\frac{\partial\Omega}{\partial v} + \frac{\partial\Omega}{\partial r}\frac{dr}{dv}\right)\frac{dr}{dt} + N\frac{d\sqrt{c}}{dt}$$

Nous apprendrons, dans la suite de nos recherches, que la fonction $\bar{c}$ s'exprime moyennant un agrégat périodique, ne renfermant que des termes en cosinus, ce qui est, du reste, facile à prévoir. Il s'ensuit que le petit terme que nous venons d'ajouter aux deux membres de l'équation (IV_1) pour que son premier membre fût une différentielle exacte, est aussi un agrégat périodique, vu que la fonction N ne renferme, outre un terme constant, que des termes en cosinus.

Mais nous allons mettre le second membre de l'équation (IV_1) sous une forme nouvelle qui présentera un intérêt particulier.

En considérant les valeurs de $\frac{d\xi}{dt}$ et de $\frac{d\eta}{dt}$ données par les équations (24) du n° 20, ainsi que celles de $\frac{\partial\Omega}{\partial\xi}$ et de $\frac{\partial\Omega}{\partial\eta}$ tirées des équations (3) du n° 65, on exprimera facilement les produits $\frac{\partial\Omega}{\partial\xi}\frac{d\xi}{dt}$ et $\frac{\partial\Omega}{\partial\eta}\frac{d\eta}{dt}$ par les dérivées

partielles de la fonction perturbatrice par rapport aux coordonnées x, y, z. En ajoutant à la somme des produits mentionnés l'équation identique

$$0 = \left(\gamma \frac{\partial\Omega}{\partial x} + \gamma_1 \frac{\partial\Omega}{\partial y} + \gamma_2 \frac{\partial\Omega}{\partial z}\right)\left(\gamma \frac{dx}{dt} + \gamma_1 \frac{dy}{dt} + \gamma_2 \frac{dz}{dt}\right),$$

qui découle de l'équation (3) du n° 16, on trouvera tout de suite, en regardant la seconde des équations (11) du n° 66, la relation remarquable

$$(10) \qquad \frac{\partial\Omega}{\partial\xi}\frac{d\xi}{dt} + \frac{\partial\Omega}{\partial\eta}\frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\Omega}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\Omega}{\partial z}\frac{dz}{dt} - N\frac{\partial\Omega}{\partial v}.$$

Mais par l'équation (4), il est visible que le dernier terme du second membre est égal à $-N\frac{d\chi v}{dt}$, c'est à dire au terme que nous avons ajouté, avec signe contraire, au premier membre de l'équation (IV_1), pour rendre ce membre intégrable.

On arrive à ce résultat aussi de la manière suivante.

En considérant les relations

$$\frac{\partial\Omega}{\partial v} = \frac{\partial\Omega}{\partial w},$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial r}\frac{dr}{dv}\frac{dv}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial r}\frac{dr}{dw}\frac{dw}{dt},$$

et ensuite celle-ci :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dw}{dt} - N,$$

on aura sur-le-champ:

$$(11) \qquad \left(\frac{\partial\Omega}{\partial v} + \frac{\partial\Omega}{\partial r}\frac{dr}{dv}\right)\frac{dv}{dt} = \left(\frac{\partial\Omega}{\partial w} + \frac{\partial\Omega}{\partial r}\frac{dr}{dw}\right)\frac{dw}{dt} - N\frac{d\chi v}{dt}.$$

Cette valeur, introduite dans l'équation (IV_1), fera détruire, immédiatement, le dernier terme du second membre.

Il convient d'ajouter, à cette place, une formule analogue à l'équation (11), savoir la formule qu'on obtient en remplaçant, dans le premier membre de l'équation précédente, v par la variable indépendante v. En rappelant la relation

$$v = \mathrm{v} + G,$$

on aura, comme dans le cas précédent,

$$(12)\qquad \left(\frac{\partial\Omega}{\partial r}+\frac{\partial\Omega}{\partial r}\frac{dr}{dr}\right)\frac{dr}{dt}=\left(\frac{\partial\Omega}{\partial v}+\frac{\partial\Omega}{\partial r}\frac{dr}{dv}\right)\frac{dv}{dt}+\frac{dG}{dt}\frac{d\zeta}{dt}.$$

Pour vérifier une partie essentielle de nos formules, données dans le deuxième et le troisième livres, je vais déduire autrement l'équation (10).

On a d'abord:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\Omega}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\Omega}{\partial z}\frac{dz}{dt}=\frac{\partial\Omega}{\partial r}\frac{dr}{dt}+\frac{\partial\Omega}{\partial l}\frac{dl}{dt}+\frac{\partial\Omega}{\partial b}\frac{db}{dt}.$$

Mais en vertu des équations (5), (8) et (8') du n° 65, on tire facilement les expressions

$$\frac{\partial\Omega}{\partial l}=\cos i\,\frac{\partial\Omega}{\partial r}-r\sin i\cos(r-G-\theta)\frac{\partial\Omega}{\partial\zeta},$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial b}=\frac{r}{\cos b}\frac{\partial\Omega}{\partial z}-\frac{r\sin b}{\cos b}\frac{\partial\Omega}{\partial r},$$

bien entendu, après avoir fait, dans les équations citées, ζ égal à zéro.

En considérant l'équation (17) du n° 66, nous aurons ensuite:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial b}=\frac{1}{1+g}\frac{1}{\cos b}\frac{d\zeta}{dr}\frac{\partial\Omega}{\partial r}+\frac{r\cos i}{\cos b}\frac{\partial\Omega}{\partial\zeta}.$$

Puis, les équations (19) du n° 19 nous donnent:

$$\frac{dl}{dt}=(1+g)\frac{\cos i}{\cos b^2}\frac{dr}{dt},$$

$$\frac{db}{dt}=(1+g)\sin i\cos(l-\theta)\frac{dr}{dt}.$$

$$=(1+g)\frac{\sin i\cos(r-G-\theta)}{\cos b}\frac{dr}{dt};$$

et nous avons encore:

$$\frac{d\zeta}{dr}=(1+g)\sin i\cos(r-G-\theta)$$

En considérant finalement la relation

$$\cos b^2 = \cos i^2 + \sin i^2 \cos (v - G - \theta)^2,$$

les valeurs indiquées nous conduisent à la relation

$$(13) \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial l}\frac{dl}{dt} + \frac{\partial \Omega}{\partial b}\frac{db}{dt} = (1+g)\frac{\partial \Omega}{\partial v}\frac{dv}{dt}$$

ou bien:

$$(14) \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \Omega}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \Omega}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial r}\frac{dr}{dt} + (1+g)\frac{\partial \Omega}{\partial v}\frac{dv}{dt}$$

Avec cette égalité, on parvient facilement à retrouver l'équation (10).

Mais de l'équation (14), on tire sur-le-champ la conclusion importante que le produit

$$N\frac{d\sqrt{c}}{dt} - g\frac{\partial \Omega}{\partial v}\frac{dv}{dt}$$

est une fonction de termes périodiques en sinus sans terme constant. En effet, tout terme constant doit avoir disparu par la différentiation du premier membre de l'équation (14); c'est de même quant aux termes $\frac{\partial \Omega}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial \Omega}{\partial v}\frac{dv}{dt}$ du second membre. Il s'ensuit que le terme restant du second membre ne peut pas être affecté d'un terme constant.

Il convient, pour certains usages, d'exprimer l'équation (IV_1) sous forme d'une intégrale, bien qu'une telle représentation ne puisse être que formelle. Le premier membre de l'équation mentionnée étant une différentielle exacte, il n'y a pas là de difficulté, mais quant au second membre, il faut se contenter de la notation. On aura de la sorte:

$$(IV_2) \qquad \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{c}{(1+g)^2 r^2} - 2\frac{\mu}{r} - N^2 r^2 + N\sqrt{c}$$

$$= -h + 2\int \left(\frac{\partial \Omega}{\partial v} + \frac{\partial \Omega}{\partial r}\frac{dr}{dv}\right) dv + \int N d\sqrt{c},$$

h étant une constante qu'il faut déterminer en considérant la valeur de la constante arbitraire qui est ajoutée aux termes de la fonction c

113. On gagne un peu en simplicité, si l'on admet la notation

(15) $$c = c(1 + g)^2:$$

alors l'équation (6), par exemple, s'écrit ainsi:

(16) $$r^2 \frac{dv}{dt} = \sqrt{c}.$$

Cela étant, nous observons les relations

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dv}\frac{dv}{dt} = -\sqrt{c}\,\frac{d\frac{1}{r}}{dv},$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{c}{r^2}\frac{d^2\frac{1}{r}}{dv^2} - \frac{\sqrt{c}}{r^2}\frac{d\frac{1}{r}}{dv}\frac{d\sqrt{c}}{dv},$$

en vertu desquelles l'équation (I_1) se met sous la forme suivante:

(I_2) $$\frac{d^2\frac{1}{r}}{dv^2} + \frac{1}{\sqrt{c}}\frac{d\sqrt{c}}{dv}\frac{d\frac{1}{r}}{dv} + \frac{(1+g)^2}{r} - \frac{\mu}{c} = -\frac{r^2}{c}\frac{\partial\Omega}{\partial r}.$$

Dans cette équation, l'argument v est introduit comme variable indépendante; mais il peut arriver qu'il se montre favorable d'en détacher une certaine partie, supposée toutefois un agrégat périodique, en sorte que la partie retenue comme variable indépendante soit isocinétique avec v. Pour garder toute la généralité, nous allons mettre en évidence ce nouvel argument, en établissant la notation

(17) $$v = v_0 + \chi,$$

nous réservant toutefois d'annuler l'agrégat périodique χ quand il paraîtra convenable.

Multiplions l'équation (I_2) par la constante a, et introduisons-y, au lieu de r, la fonction ρ donnée par l'équation

$$r = \frac{a(1-\eta^2)}{1+\rho} = \frac{(c)}{\mu(1+\rho)}$$

Supposons ensuite, entre c et (c), la relation

$$(18) \qquad \sqrt{c} = \frac{\sqrt{(c)}\left(1 + \frac{d\chi}{dv_0}\right)}{1 + S},$$

S étant une nouvelle fonction qui, avec χ, reste à notre disposition, à la seule condition que l'équation précédente soit satisfaite.

On en tire, par différentiation

$$(19) \qquad \frac{1}{\sqrt{c}}\frac{d\sqrt{c}}{dv_0} = \frac{1}{\sqrt{(c)}}\frac{d\sqrt{(c)}}{dv_0} - \frac{\frac{dS}{dv_0}}{1 + S} + \frac{\frac{d^2\chi}{dv_0^2}}{1 + \frac{d\chi}{dv_0}};$$

et maintenant, il sera facile d'établir l'équation que voici:

$$(V) \qquad \frac{d^2\rho}{dv_0^2} - \left[\frac{3}{2}\frac{1}{(c)}\frac{d(c)}{dv_0} + \frac{\frac{dS}{dv_0}}{1 + S}\right]\frac{d\rho}{dv_0} + \left[(1 + g)^2\left(1 + \frac{d\chi}{dv_0}\right)^2 + \frac{3}{2}\frac{1}{(c)^2}\left(\frac{d(c)}{dv_0}\right)^2 - \frac{1}{(c)}\frac{d^2(c)}{dv_0^2} + \frac{1}{(c)}\frac{d(c)}{dv_0}\frac{\frac{dS}{dv_0}}{1 + S}\right]\rho$$
$$= -\frac{3}{2}\frac{1}{(c)^2}\left(\frac{d(c)}{dv_0}\right)^2 - \frac{1}{(c)}\frac{d(c)}{dv_0}\frac{\frac{dS}{dv_0}}{1 + S} + \frac{1}{(c)}\frac{d^2(c)}{dv_0^2} + (1 + S)^2 - (1 + g)^2\left(1 + \frac{d\chi}{dv_0}\right)^2 - \frac{(c)}{\mu a}(1 + S)^2 P,$$

où P est la fonction définie par la formule (1) du n° 85.

En considérant les équations (4), (15) et (16), on parvient à la formule

$$(1 + g)\frac{1}{\sqrt{c}}\frac{d\sqrt{c}}{dv} = \frac{r^2}{c}\frac{\partial\Omega}{\partial v} = \frac{(1 + S)^2}{\left(1 + \frac{d\chi}{dv_0}\right)^2}Q,$$

la fonction Q étant définie par la formule (2) du n° 85. Ensuite, si l'on introduit, dans l'équation (19), la valeur signalée de $d\sqrt{c}$, il viendra:

$$(VI) \qquad \frac{1}{\sqrt{(c)}}\frac{d\sqrt{(c)}}{dv_0} - \frac{\frac{dS}{dv_0}}{1 + S} + \frac{\frac{d^2\chi}{dv_0^2}}{1 + \frac{d\chi}{dv_0}} = \frac{(1 + S)^2}{(1 + g)\left(1 + \frac{d\chi}{dv_0}\right)^2}Q.$$

Au moyen de cette équation, on trouvera l'une des fonctions S et χ, l'autre étant fixée d'une manière quelconque. Nous admettons dans la suite que la fonction χ, si elle n'est pas égale à zéro, reste peu considérable et qu'elle ne renferme que des termes à courte période.

Ayant introduit la variable indépendante v_0, on doit évidemment établir la relation

(20) $$d\zeta = \frac{(r)^2}{\sqrt{(c)}}\, dv_0,$$

qui remplace l'équation (1) du n° 25. Mais l'équation (16) nous donne, en considérant la valeur de c,

(21) $$dt = \frac{r^2}{\sqrt{(c)}}(1 + S)\, dv_0;$$

on sera donc conduit à la relation suivante entre le temps et le temps réduit:

(22) $$\frac{dt}{d\zeta} = \frac{r^2}{(r)^2}(1 + S).$$

Rappelons-nous la notation du n° 40, savoir:

$$t = \zeta + T,$$

ainsi que l'expression

$$\frac{r}{(r)} = \frac{1}{1 + \frac{(r)}{a}\xi}$$

qui découle immédiatement de la seconde des équations (22) du n° 67.

Avec ces valeurs, l'équation (22) prend la forme

(23) $$1 + \frac{dT}{d\zeta} = \frac{1 + S}{\left(1 + \frac{(r)}{a}\xi\right)^2},$$

d'où il s'ensuit:

(VII) $$\frac{\dfrac{d\left(\dfrac{dT}{d\zeta}\right)}{dv_0}}{1 + \dfrac{dT}{d\zeta}} = \frac{\dfrac{dS}{dv_0}}{1 + S} - 2\,\frac{\dfrac{d\left(\dfrac{(r)}{a}\xi\right)}{dv_0}}{1 + \dfrac{(r)}{a}\xi}.$$

Nous reviendrons à cette équation après avoir obtenu une autre relation entre S et ξ qui nous permettra d'établir une équation différentielle du second ordre en T.

114. Reprenons l'équation (V) pour y introduire la valeur

$$\rho = (\rho) + \frac{(r)}{\mu a}\xi.$$

Par cette substitution, l'équation nommée se divise, d'une manière conventionnelle, en deux autres, l'une en (ρ), l'autre en ξ. Nous allons déterminer la fonction (ρ) de manière à ne contenir que des termes du type (B), de façon que ξ soit l'ensemble des autres termes, savoir, des inégalités diastématiques. J'écris les deux équations mentionnées de la manière suivante:

$$\text{(VIII)}\quad \frac{d^2(\rho)}{dv_0^2} - \frac{3}{2}\frac{1}{(c)}\frac{d(r)}{dv_0}\frac{d(\rho)}{dv_0} + \left|(1+g)^2\left(1+\frac{d\chi}{dv_0}\right)^2 + \frac{1}{(r)}\frac{d(r)}{dv_0}\frac{\frac{dS}{dv_0}}{1+S} + \frac{3}{2}\frac{1}{(r)^2}\left(\frac{d(r)}{dv_0}\right)^2 - \frac{1}{(r)}\frac{d^2(r)}{dv_0^2}\right|(\rho)$$

$$= 2(S) - \frac{(r)}{\mu a}(\mathrm{P}) + [(\rho), \xi] - [\xi, (\rho)],$$

$$\text{(IX)}\quad \frac{d^2\xi}{dv_0^2} + \left[\frac{1}{2}\frac{1}{(r)}\frac{d(r)}{dv_0} - \frac{\frac{dS}{dv_0}}{1+S}\right]\frac{d\xi}{dv_0} + (1+g)^2\left(1+\frac{d\chi}{dv_0}\right)\xi$$

$$= -\frac{3}{2}\frac{\mu a}{(r)^3}\left(\frac{d(r)}{dv_0}\right)^2 - \frac{\mu a}{(r)^2}\frac{d(r)}{dv_0}\frac{\frac{dS}{dv_0}}{1+S} - \frac{\mu a}{(r)^2}\frac{d^2(r)}{dv_0^2} + \frac{\mu a}{(r)}\left|\frac{d(\rho)}{dv_0} - \frac{1}{(r)}\frac{d(r)}{dv_0}(\rho)\right|\frac{\frac{dS}{dv_0}}{1+S}$$

$$+ \frac{\mu a}{(r)}\left|(1+S)^2 - (1+g)^2\left(1+\frac{d\chi}{dv_0}\right)^2 - 2(S)\right|$$

$$- (1+S)^2\mathrm{P} + (\mathrm{P}) + \frac{\mu a}{(r)}\{[\xi, (\rho)] - [(\rho), \xi]\}.$$

On voit sur-le-champ que la somme de ces deux équations, la dernière

multipliée par $\frac{(r)}{\mu a}$, reconduit à l'équation (V); mais quant aux symboles employés, il faut des explications.

Par (S) et (P), on a désigné les parties des fonctions S et P qui sont composées de termes du type (B). On a, par conséquent, les formules

$$(S) = \sum^{1,0} \nu(S) + \sum^{1,0}(S),$$

$$(\mathrm{P}) = \sum^{1,0}(\mathrm{P}) + \sum^{1,0}(\mathrm{P}),$$

dont la seconde peut être remplacée, tout de suite, par une autre où seraient introduites les expressions détaillées des synechies respectives.

Quant aux symboles $[(\rho)\,,\,\xi]$ et $[\xi\,,\,(\rho)]$, ils sont introduits afin de débarrasser entièrement l'équation (VII) des termes d'autres formes que celle du type (B), et, l'équation (VIII) justement des termes de ce type. En conséquence, le terme $-[\xi\,,\,(\rho)]$ doit être égalé à la somme des termes qui n'appartiennent pas au type (B), et qui se produisent, par les diverses approximations, dans le premier membre de l'équation (VII); le terme $-[(\rho)\,,\,\xi]$, est destiné à annuler la somme des termes du type mentionné apparaissant dans l'équation (IX).

Si l'on voulait déterminer directement la fonction $\partial\rho = R$ au lieu de ξ, on emploierait l'équation que voici:

$$(\mathrm{IX}_1)\quad \frac{d^2R}{dv^2} - \left[\frac{3}{2}\frac{1}{(r)}\frac{d(r)}{dv_0} + \frac{\frac{dS}{dv_0}}{1+S}\right]\frac{dR}{dv_0} + \left\{(1+g)^2\left(1+\frac{d\chi}{dv_0}\right)^2 + \frac{3}{2}\frac{1}{(r)^2}\left(\frac{d(r)}{dv_0}\right)^2 - \frac{1}{(r)}\frac{d^2(r)}{dv_0^2} + \frac{1}{(r)}\frac{d(r)}{dv_0}\frac{\frac{dS}{dv_0}}{1+S}\right\}R$$

$$= -\frac{3}{2}\frac{1}{(r)^2}\left(\frac{d(r)}{dv_0}\right)^2 - \frac{1}{(r)}\frac{d^2(r)}{dv_0^2} - \frac{1}{(r)}\frac{d(r)}{dv_0}\frac{\frac{dS}{dv_0}}{1+S} + \left\{\frac{d(\rho)}{dv_0} - \frac{1}{(r)}\frac{d(r)}{dv_0}(\rho)\right\}\frac{\frac{dS}{dv_0}}{1+S}$$

$$+ (1+S)^2 - 2(S) - (1+g)^2\left(1+\frac{d\chi}{dv_0}\right)^2 - \frac{(r)}{\mu a}\big((1+S)^2\mathrm{P} - (\mathrm{P})\big)$$

$$+ [R\,,\,(\rho)] - [(\rho)\,,\,R]$$

Cette équation paraît, il est vrai, un peu plus compliquée que l'équation (IX), mais en revanche elle renferme le produit de P par $\frac{(r)}{pa} = 1 - \eta^2$, produit dont nous supposons le développement immédiatement donné en vertu des formules que nous avons données dans les deux derniers chapitres du livre précédent. Or, la division par $1 - \eta^2$ est une opération très facile; mais c'est de même quant à la considération des termes par lesquels l'équation (IX_1) diffère de l'équation (IX). On peut donc dire que les deux équations mentionnées se prêtent également bien à la détermination des inégalités diastématiques.

Puisque la fonction Q dépend de ξ, ce qui est visible, par exemple par la formule (β) du n° 94, les équations (VI) et (IX) forment un système simultané qu'il faut intégrer. Nous allons montrer prochainement comment s'opère l'intégration demandée en tenant compte, dès le début, des termes du second ordre; pour le moment nous nous contenterons d'un résultat moins rigoureux, mais qui suffit pour notre but immédiat, toutes les fois où il ne s'agit que de termes à longue période.

Nous allons voir, dans ce qui suit, que, dans l'équation (VI), le terme $\frac{1}{\sqrt{(c)}}\frac{d\sqrt{(c)}}{dv_0}$ sera compensé par un terme analogue se trouvant dans l'expression de Q, de telle manière que les termes sousélémentaires du type (A) qui sont encore contenus dans l'expression de $\frac{dS}{dv_0}$ seront du deuxième ordre tout au moins. Une autre partie des termes de Q seront annulés par la fonction χ, et une troisième partie, par (S). Il s'ensuit que, si l'on désignait la somme des termes à longue période par $\overline{S}$, et que l'on posât:

$$\xi = 2\overline{S} + \bar{\xi}, \tag{24}$$

les termes à longue période qui sont encore contenus dans l'expression de la fonction $\bar{\xi}$ seraient très petits. On a donc obtenu par la valeur $2\overline{S}$, je ne veux pas dire une valeur approchée de ξ, mais bien une expression telle de cette fonction que, si on la met au lieu de ξ, dans l'équation (VII), les termes restants, qui ne seraient pas mis en évidence, n'entreraient pas notablement agrandis dans l'expression de T.

Il convient de signaler l'équation en $\bar{\xi}$, s'obtenant immédiatement si l'on introduit, dans l'équation (IX), la valeur (24) de ξ.

La voici :

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{IX}_2)\qquad & \frac{d^2\xi}{dv_0^2} + \left[\frac{1}{2}\,\frac{1}{(r)}\,\frac{d(r)}{dv_0} - \frac{\dfrac{dS}{dv_0}}{1+S}\right]\frac{d\xi}{dv_0} + (1+g)^2\left(1+\frac{d\chi}{dv_0}\right)^2\xi \\
= & -\frac{3}{2}\,\frac{\mu a}{(r)^3}\left(\frac{d(r)}{dv_0}\right)^2 - \frac{\mu a}{(r)^2}\,\frac{d^2(r)}{dv_0^2} - \left[\frac{\mu a}{(r)^2}\,\frac{d(r)}{dv_0} - \frac{\mu a}{(r)}\left(\frac{d(\rho)}{dv_0} - \frac{1}{(r)}\,\frac{d(r)}{dv_0}(\rho)\right)\right]\frac{\dfrac{d\overline{S}}{dv_0}}{1+S} \\
& + \left\{(1+S)^2 - 2(S) - (1+g)^2\left(1+\frac{d\chi}{dv_0}\right)^2\right\}\frac{\mu a}{(r)} \\
& - 2(1+g)^2\left(1+\frac{d\chi}{dv_0}\right)^2 S - 2\,\frac{d^2\overline{S}}{dv_0^2} - \left[\frac{1}{(r)}\,\frac{d(r)}{dv_0} - 2\,\frac{\dfrac{d\overline{S}}{dv_0}}{1+S}\right]\frac{dS}{dv_0} \\
& - (1+S)^2\mathrm{P} + (\mathrm{P}) + \big\{[\xi, (\rho)] - [(\rho), \xi]\big\}\frac{\mu a}{(r)}.
\end{aligned}
$$

Certes, le second membre de cette équation renferme encore des termes à longue période, mais ces termes-là sont beacoup plus petits que ceux qui font partie de $\overline{S}$, et ils ne deviendront pas agrandis par l'intégration.

Du reste, on pourra facilement transférer ces termes à $\overline{S}$ afin d'obtenir cet agrégat périodique si complet qu'on voudra.

Une remarque d'un certain intérêt se rattache à l'équation (VIII). En la comparant avec l'équation (47) du n° 14, on s'aperçoit immédiatement de son analogie avec cette dernière. On sera donc à même de conclure que, si la fonction (ρ) se montre toujours inférieure à l'unité, la courbe définie par la relation entre (r) et (ρ) est une courbe périplégmatique. En effet, les termes de l'équation (VIII) qui sont représentés, dans l'équation (47) du n° 14, par X, restant très petits tant que (ρ) est une quantité peu considérable, les conditions nécessaires, expliquées dans le numéro mentionné, sont remplies.

115. Lorsqu'il s'agit de l'intégration de l'équation (VII), il se présente deux routes différentes à suivre. Ces deux alternatives se distinguent par le choix de la variable indépendante, savoir ou le temps réduit ζ ou l'angle v.

Certes, il y a plusieurs avantages qu'entraîne l'emploi de la variable ζ, mais ces avantages ne deviendraient actuels que si l'on avait développé la fonction perturbatrice suivant les multiples de G et de G'; et outre cela, il y aurait alors des motifs pour changer, dans l'équation (VIII), la variable v_0 en ζ, ce qui aurait rendu plus compliqués, non seulement le procédé d'intégration, mais encore le résultat: on se serait trouvé, en effet, dans une position analogue à celle, dans la théorie képlerienne, où l'on aurait voulu éviter l'emploi de l'anomalie vraie pour exprimer immédiatement le rayon vecteur comme fonction du temps. On doit donc penser que le choix de l'argument v_0 comme variable indépendante l'emporte sur celui du temps réduit.

D'autre part, l'abandon de la variable dernièrement nommée entraînera, on ne doit pas le nier, une certaine complication quant à l'équation (VII), complication qui sera sensible, surtout quand il s'agit de déterminer la différence $T - T'$ ou bien, la fonction U, définie par la troisième des équations (3) du n° 40. Mais les difficultés en naissant seront d'une nature moins grave que celles ayant leur origine dans l'introduction du temps réduit comme variable indépendante. Je me réserve cependant, pour certaines occasions, d'employer cette variable.

Après avoir déterminé la fonction S en vertu de l'équation (23), ou bien, d'une manière que nous allons connaître prochainement, on parviendra à déduire les fonctions (ρ) et ξ, après quoi la fonction T s'obtiendra en intégrant l'équation (23), qui s'écrit de la manière suivante

$$\frac{dT}{dv_0} = \frac{(r)^2}{\sqrt{(r)}} \left\{ \frac{1 + S}{\left(1 + \frac{(r)}{a}\xi\right)^2} - 1 \right\}. \tag{25}$$

Cependant, bien qu'on puisse, le plus souvent, déduire, de la manière indiquée, un résultat assez approché de la vraie valeur de la fonction cherchée; une solution absolue ne s'en obtient pas, c'est à dire une solution en forme trigonométrique dont la convergence uniforme puisse être mise en évidence. Pour y parvenir, on doit recourir à l'équation (VII) qui devient, après y avoir remplacé le terme $\dfrac{\frac{dS}{dv_0}}{1 + S}$ par la valeur tirée de l'équation (VI),

$$\frac{\dfrac{d\left(\dfrac{\sqrt{(r)}}{(r)^2}\dfrac{dT}{dv_0}\right)}{dv_0}}{1+\dfrac{\sqrt{(r)}}{(r)^2}\dfrac{dT}{dv_0}} = \frac{1}{\sqrt{(r)}}\frac{d\sqrt{(r)}}{dv_0} - \frac{(1+S)^2 Q}{(1+g)\left(1+\dfrac{d\chi}{dv_0}\right)^2} + \frac{\dfrac{d^2\chi}{dv_0^2}}{1+\dfrac{d\chi}{dv_0}} - 2\,\frac{\dfrac{d\left(\dfrac{(r)}{a}\xi\right)}{dv_0}}{1+\dfrac{(r)}{a}\xi},$$

ou bien, en introduisant au lieu de $(1+S)^2$ la valeur découlant de l'équation (23), celle-ci:

$$(26)\qquad \frac{\dfrac{d^2T}{dv_0^2}}{1+\dfrac{\sqrt{(r)}}{(r)^2}\dfrac{dT}{dv_0}} = \frac{(r)^2}{\sqrt{(r)}}\left|\frac{1}{\sqrt{(r)}}\frac{d\sqrt{(r)}}{dv_0} - \frac{\left(1+\dfrac{\sqrt{(r)}}{(r)^2}\dfrac{dT}{dv_0}\right)^2\left(1+\dfrac{(r)}{a}\xi\right)^4}{(1+g)\left(1+\dfrac{d\chi}{dv_0}\right)^2}Q\right.$$

$$\left.+\frac{\dfrac{d^2\chi}{dv_0^2}}{1+\dfrac{d\chi}{dv_0}} - 2\,\frac{\dfrac{d\left(\dfrac{(r)}{a}\xi\right)}{dv_0}}{1+\dfrac{(r)}{a}\xi}\right| + \frac{\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{(r)}\dfrac{d(r)}{dv_0} - \dfrac{2}{1+(\rho)}\dfrac{d(\rho)}{dv_0}}{1+\dfrac{\sqrt{(r)}}{(r)^2}\dfrac{dT}{dv_0}}\,\frac{dT}{dv_0}.$$

Dans cette équation, la fonction S se trouve éliminée, mais il y reste encore la fonction ξ inconnue. Or, puisqu'on a établi la relation (24), on pourra mettre, à la place de ξ, une fonction qui, du moins quant à sa partie lentement variable, est connue. J'opère l'introduction de la fonction $2\bar S$ au lieu de ξ de la manière suivante.

Soit $\bar T$ une fonction qui dépend de $\bar S$ moyennant l'équation

$$(27)\qquad 1+\frac{d\bar T}{dv_0} = \frac{1+\bar S}{(1+2\bar S)^2};$$

il s'entend que $\bar T$, en ne considérant que les termes à longue période, n'est pas beaucoup différent de T.

De l'équation (27), il découle réciproquement le développement

$$(28)\qquad S = -\frac{1}{3}\frac{dT}{dv_0} + \frac{8}{27}\left(\frac{dT}{dv_0}\right)^2 - \frac{68}{243}\left(\frac{d\bar T}{dv_0}\right)^3 + \ldots,$$

qu'il convient de signaler.

Admettons encore la relation

$$(29)\qquad \frac{\dfrac{dS}{dv_0}}{1+S} = -\frac{(1+S)^2}{(1+2S)^2}Q_0 + 2SQ_1 + 4S^2Q_2 + \ldots + \Xi,$$

les premiers termes du second membre étant la partie de l'expression de $\frac{\frac{dS}{dv_0}}{1+S}$ qu'il convient de considérer ici. Le dernier terme Ξ est ajouté à l'équation établie pour y transférer non seulement tous les termes à longue période nécessaires pour détruire les termes de ce genre se produisant d'abord en $\bar{\xi}$, mais encore, pour introduire, dans cette équation, un certain nombre d'autres termes qu'il convient de considérer simultanément avec les termes dont la détermination est notre but principal.

On a introduit, dans le premier terme du second membre, le dénominateur $(1+2\bar{S})^2$, vu que la fonction Q donnée par l'équation (2) du n° 85 est affectée du facteur

$$r^2 = \frac{(r)^2}{\left(1+\frac{(r)}{a}\xi\right)^2}.$$

Cela étant, si nous différentions l'équation (27), il viendra:

$$\frac{\frac{d^2\bar{T}}{dv_0^2}}{1+\frac{d\bar{T}}{dv_0}} = -3\frac{\frac{d\bar{S}}{dv_0}}{1+\bar{S}}\left(1-\frac{4}{3}\frac{\bar{S}}{1+2\bar{S}}\right),$$

équation qui en vertu de la formule (29), et en considérant le développement de $\bar{S}$ suivant les puissances de $\frac{d\bar{T}}{dv_0}$, prend la forme

$$\text{(X)} \qquad \frac{d^2\bar{T}}{dv_0^2} = 3\left\{1+\frac{19}{9}\frac{d\bar{T}}{dv_0}+\frac{103}{81}\left(\frac{d\bar{T}}{dv_0}\right)^2\right\}\bar{Q}_0 + 2\frac{d\bar{T}}{dv_0}\left\{1+\frac{13}{9}\frac{d\bar{T}}{dv_0}\right\}\bar{Q}_1$$
$$-\frac{4}{3}\left(\frac{d\bar{T}}{dv_0}\right)^2\{1+\ldots\}\bar{Q}_2+\ldots-3\left(1+\frac{d\bar{T}}{dv_0}\right)\Xi.$$

Cette équation n'étant pas entièrement indépendante des fonctions T et χ, vu que ces fonctions apparaissent dans les arguments, on pourra cependant l'intégrer en négligeant, dans une première approximation, χ ainsi que la différence $T-\bar{T}$. On aura ainsi une valeur approchée de $\bar{T}$ qui s'exprimera, nous le verrons, moyennant une série trigonométrique uniformément convergente. Après avoir obtenu ce résultat, on formera, en

retranchant l'équation (X) de l'équation (26), une nouvelle équation du second ordre, où la différence $T - \overline{T}$ et la fonction χ entrent comme inconnues. L'une de ces quantités peut être prise à volonté, l'autre se trouve ensuite, en intégrant l'équation restante. On y pourra égaler à zéro, soit la fonction χ, soit la différence $T - T'$; mais on pourra aussi les choisir d'autres manières, ayant toujours en vue de pousser, autant que possible, la convergence des développements.

En ne considérant que les termes à longue période, il est visible que la dérivée $\frac{d\overline{T}}{dv_0}$ doit être considérée comme une quantité notablement plus petite que la fonction $\overline{T}$ elle-même. En particulier, lorsqu'il s'agit des termes élémentaires du type (A) entrant dans l'expression de T, ces termes deviendront sousélémentaires du premier ordre dans l'expression de $\frac{d\overline{T}}{dv_0}$. Il s'ensuit que la fonction $\overline{S}$ déterminée par le développement (28) est, en général, une quantité peu considérable, d'où l'on conclut finalement, en considérant l'équation (22), que le rapport $\frac{d\zeta}{dt}$ reste peu différent de l'unité, du moins s'il ne s'agit que de termes à longue période. Voilà la confirmation de la loi de Képler telle que nous l'avons annoncée au n° 25.

116. Il nous faut encore introduire, dans les diverses équations (III), l'argument v_0 au lieu de v. Ces équations n'étant toutefois pas réellement distinctes, il suffit d'opérer la substitution mentionnée dans l'équation qui se prête le mieux à nos intentions, savoir l'équation (III_3). En rappelant la relation entre v et v_0, on déduira sans peine le résultat que voici:

$$\text{(XI)} \qquad \frac{d^2\mathfrak{z}}{dv_0^2} + \left[\frac{1}{2}\frac{1}{(r)}\frac{d(r)}{dv_0} - \frac{\frac{dS}{dv_0}}{1+S}\right]\frac{d\mathfrak{z}}{dv_0} + (1+\bar{g})^2\left(1+\frac{d\chi}{dv_0}\right)^2\mathfrak{z}$$
$$- \frac{\mu r'^3 r}{(r)}\left(1+\frac{d\chi}{dv_0}\right)^2\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right)(\mathfrak{z}' - \mathfrak{z}\cos H)$$
$$= (1+S)^2 R(\mathfrak{z}' - \mathfrak{z}\cos H).$$

L'équation obtenue doit être divisée en deux autres, dont l'une donne, par l'intégration, les termes élémentaires du type (B), et l'autre, les iné-

galités anastématiques. Dans ce but, cherchons les synechies des indices $1, 0$ et $-1, 0$ appartenant au second membre de l'équation signalée.

En vertu du développement

$$(\alpha) \qquad R = R_0^{(0)} + 2R_1^{(0)} \cos w + 2R_2^{(0)} \cos 2w + \dots$$
$$+ \{R_0^{(1)} + 2R_1^{(1)} \cos w + 2R_2^{(1)} \cos 2w + \dots\} h$$
$$+ \dots$$

on déduit immédiatement celui-ci:

$$(\beta) \qquad R \cos H = R_1^{(0)} + (R_0^{(0)} + R_2^{(0)}) \cos w + (R_1^{(0)} + R_3^{(0)}) \cos 2w + \dots$$
$$+ \{R_1^{(1)} + R_0^{(0)} + (R_0^{(1)} + R_2^{(1)} + 2R_1^{(0)}) \cos w$$
$$+ (R_1^{(1)} + R_3^{(1)} + 2R_2^{(0)}) \cos 2w + \dots\} h$$
$$+ \dots .$$

Mais les coefficients des développements (α) et (β) sont des fonctions de (ρ), (ρ'), η^2 et η'^2. En introduisant les expressions de ces coefficients, lesquelles s'obtiennent facilement en considérant l'équation (25) du n° 87, en négligeant les termes surpassant le second degré, et finalement, en admettant les notations

$$2g^0(1, s, s')_{\nu,\nu'} = R^0(0, s, s')_{\nu,\nu'} + R^0(2, s, s')_{\nu,\nu'},$$
$$2g^0(2, s, s')_{\nu,\nu'} = R^0(1, s, s')_{\nu,\nu'} + R^0(3, s, s')_{\nu,\nu'},$$
etc.;

$$g^1(0, s, s')_{\nu,\nu'} = 2R^1(1, s, s')_{\nu,\nu'} + R^0(0, s, s')_{\nu,\nu'},$$
$$2g^1(1, s, s')_{\nu,\nu'} = 2[R^1(0, s, s')_{\nu,\nu'} + R^1(2, s, s')_{\nu,\nu'} + R^0(1, s, s')_{\nu\nu'}],$$
$$2g^1(2, s, s')_{\nu,\nu'} = 2[R^1(1, s, s')_{\nu,\nu'} + R^1(3, s, s')_{\nu,\nu'} + R^0(2, s, s')_{\nu,\nu'}],$$
etc.,

les développements (α) et (β) se changent en ceux-ci:

$$(\gamma)\quad {}^{\prime\prime}_{\prime\prime}\mathrm{R} = \mathrm{R}^0(0,0,0)_{0,0} - \mathrm{R}^0(0,0,0)_{1,0}\eta^2 + \mathrm{R}^0(0,0,0)_{0,1}\eta'^2$$
$$+ \mathrm{R}^0(0,1,0)_{0,0}(\rho) + \mathrm{R}^0(0,0,1)_{0,0}(\rho')$$
$$+ \mathrm{R}^0(0,2,0)_{0,0}(\rho)^2 + \mathrm{R}^0(0,1,1,)_{0,0}(\rho)(\rho') + \mathrm{R}^0(0,0,2)_{0,0}(\rho')^2$$
$$+ 2\left\{\begin{aligned} &\mathrm{R}^0(1,0,0)_{0,0} - \mathrm{R}^0(1,0,0)_{1,0}\eta^2 + \mathrm{R}^0(1,0,0)_{0,1}\eta'^2 \\ &+ \mathrm{R}^0(1,1,0)_{0,0}(\rho) + \mathrm{R}^0(1,0,1)_{0,0}(\rho') \\ &+ \mathrm{R}^0(1,2,0)_{0,0}(\rho)^2 + \mathrm{R}^0(1,1,1)_{0,0}(\rho)(\rho') + \mathrm{R}^0(1,0,2)_{0,0}(\rho')^2 \end{aligned}\right\}\cos \mathrm{w}$$
$$+ \ldots$$
$$+ 2\{\mathrm{R}^1(0,0,0)_{0,0} + 2\mathrm{R}^1(1,0,0)_{0,0}\cos \mathrm{w} + 2\mathrm{R}^1(2,0,0)_{0,0}\cos 2\mathrm{w} + \ldots\}\mathrm{h}$$
$$+ \ldots,$$

$$(\delta)\quad {}^{\prime\prime}_{\prime\prime}\mathrm{R}\cos H = \mathrm{R}^0(1,0,0,)_{0,0} - \mathrm{R}^0(1,0,0)_{1,0}\eta^2 + \mathrm{R}^0(1,0,0)_{0,1}\eta'^2$$
$$+ \mathrm{R}^0(1,1,0)_{0,0}(\rho) + \mathrm{R}^0(1,0,1)_{0,0}(\rho')$$
$$+ \mathrm{R}^0(1,2,0)_{0,0}(\rho)^2 + \mathrm{R}^0(1,1,1)_{0,0}(\rho)(\rho') + \mathrm{R}^0(1,0,2)_{0,0}(\rho')^2$$
$$+ 2\left\{\begin{aligned} &g^0(1,0,0)_{0,0} - g^0(1,0,0)_{1,0}\eta^2 + g^0(1,0,0)_{0,1}\eta'^2 \\ &+ g^0(1,1,0)_{0,0}(\rho) + g^0(1,0,1)_{0,0}(\rho') \\ &+ g^0(1,2,0)_{0,0}(\rho)^2 + g^0(1,1,1)_{0,0}(\rho)(\rho') + g^0(1,0,2)_{0,0}(\rho')^2 \end{aligned}\right\}\cos \mathrm{w}$$
$$+ \ldots$$
$$+ \{g^1(0,0,0)_{0,0} + 2g^1(1,0,0)_{0,0}\cos \mathrm{w} + 2g^1(2,0,0)_{0,0}\cos 2\mathrm{w} + \ldots\}\mathrm{h}$$
$$+ \ldots.$$

En multipliant les expressions (γ) et (δ), la première par $\mathfrak{z}'$, et la seconde par $\mathfrak{z}$, nous aurons, sans compter le facteur $(1 + S)^2$, les deux produits qui forment les termes du second membre de l'équation (XI). Il s'agit d'en séparer les termes élémentaires du type (B).

Si l'on ne met en évidence, dans les produits nommés, que les termes jusqu'au troisième degré inclusivement, on en pourra distinguer trois groupes: le premier contient les termes du premier degré; le second, les termes du second degré par rapport aux fonctions diastématiques et du premier degré par rapport aux fonctions anastématiques; les termes du troisième groupe finalement sont indépendants des fonctions diastématiques et, en conséquence, du troisième degré par rapport aux fonctions anastématiques.

Quant aux termes du premier degré, on consultera d'abord les formules du groupe G du n° 61, d'où l'on tire:

$$\overset{1,0}{\sum}\nu(\mathfrak{z}' \cos \mathrm{w}) = \frac{1}{2} I' \sin(\mathrm{v} - \bar{\vartheta}' - \Omega' + \Theta')$$

$$= \frac{1}{2} I' \sin(\mathrm{v}' - \bar{\vartheta}' - \Omega' + \Theta' + \mathrm{v} - \mathrm{v}'),$$

formule qui s'écrit, en négligeant la fonction (ζ), de la manière suivante:

$$\overset{1,0}{\sum}\nu(\mathfrak{z}' \cos \mathrm{w}) = \frac{1}{2}\mathfrak{z}' \cos(\mathrm{v} - \mathrm{v}') + \frac{1}{2}\frac{\partial \mathfrak{z}'}{\partial \mathrm{v}'} \sin(\mathrm{v} - \mathrm{v}').$$

On voit maintenant que les termes du premier degré qu'il faut placer au second membre de l'équation (XI) sont ceux-ci:

$$(\varepsilon) \qquad \frac{\mu'}{\mu}\Big\{- \mathrm{R}^0(1,0,0)_{0,0}\mathfrak{z} + \mathrm{R}^0(1,0,0)_{0,0}\mathfrak{z}' \cos(\mathrm{v} - \mathrm{v}')$$

$$+ \mathrm{R}^0(1,0,0)_{0,0}\frac{d\mathfrak{z}'}{d\mathrm{v}'} \sin(\mathrm{v} - \mathrm{v}')\Big\}.$$

Les termes du second degré par rapport aux fonctions diastématiques se produisent seulement des parties de R et de R cos w qui sont indépendantes de h. En inspectant les formules des groupes G du n° 61 et J du n° 62, on parvient aux expressions suivantes où ne sont considérés que les termes du second degré relativement aux fonctions diastématiques, et du premier, quant aux fonctions anastématiques:

$$ {}^{\prime\prime}_{\prime\prime}\left\{\sum^{1,0}\nu(\mathrm{R}\mathfrak{z}') + \sum^{1,0}\nu(\mathrm{R}\mathfrak{z}')\right\} $$

$$ = \frac{1}{4}\left\{\mathrm{R}^0(0,1,1)_{0,0} + 2\xi_1^{1,-1}\mathrm{R}^0(0,1,0)_{0,0}\right\}\eta\eta' I'[\sin(\mathrm{U}' + \mathrm{F} - \mathrm{F}') + \sin(\mathrm{U}' - \mathrm{F} - \mathrm{F}')] $$

$$ - \left\{\xi_2^{2,-2}\mathrm{R}^0(1,0,0)_{0,0} + \frac{1}{2}\xi_1^{1,-1}\mathrm{R}^0(1,0,1)_{0,0}\right. $$

$$ \left. + \frac{1}{4}\mathrm{R}^0(1,0,2)_{0,0}\right\}\eta'^2 I' \sin(-\mathrm{U}' + 2\mathrm{F}' + \mathrm{v} - \mathrm{v}') $$

$$ + \left\{-\mathrm{R}^0(1,0,0)_{1,0}\eta^2 + \mathrm{R}^0(1,0,0)_{0,1}\eta'^2 + \frac{1}{2}(\xi_1^{1,1} + \xi_1^{1,-1})\mathrm{R}^0(1,0,1)_{0,0}\eta'^2\right. $$

$$ \left. + \frac{1}{2}\mathrm{R}^0(1,2,0)_{0,0}\eta^2 + \frac{1}{2}\mathrm{R}^0(1,0,2)_{0,0}\eta'^2\right\} I' \sin(\mathrm{U}' + \mathrm{v} - \mathrm{v}') $$

$$ + \frac{1}{4}\mathrm{R}^0(1,2,0)_{0,0}\eta^2 I' \sin(\mathrm{U}' - 2\mathrm{F} + \mathrm{v} - \mathrm{v}') $$

$$ + \frac{1}{2}\left[\xi_1^{1,-1}\mathrm{R}^0(2,1,0)_{0,0} + \frac{1}{2}\mathrm{R}^0(2,1,1)_{0,0}\right]\eta\eta' I' \sin(\mathrm{U}' - \mathrm{F} + \mathrm{F}' + 2(\mathrm{v} - \mathrm{v}')), $$

$$ {}^{\prime\prime}_{\prime\prime}\left\{\sum^{1,0}\nu(\mathrm{R}\cos H\,.\,\mathfrak{z}) + \sum^{1,0}\nu(\mathrm{R}\cos H\,.\,\mathfrak{z})\right\} $$

$$ = \left\{-\left(\mathrm{R}^0(1,0,0)_{1,0} - \frac{1}{2}\mathrm{R}^0(1,2,0)_{0,0}\right)\eta^2 + \left(\mathrm{R}^0(1,0,0)_{0,1} + \frac{1}{2}\mathrm{R}^0(1,0,2)_{0,0}\right)\eta'^2\right\}\mathfrak{z} $$

$$ + \frac{1}{4}\mathrm{R}^0(1,2,0)_{0,0}\eta^2 I \sin(\mathrm{U} - 2\mathrm{F}) $$

$$ + \left\{\frac{1}{2}\xi_1^{1,-1}g^0(1,1,0)_{0,0} + \frac{1}{4}g^0(1,1,1)_{0,0}\right\}\eta\eta' I \sin(\mathrm{U} - \mathrm{F} + \mathrm{F}' + \mathrm{v} - \mathrm{v}') $$

$$ - \left\{\frac{1}{2}\xi_1^{1,-1}g^0(1,1,0)_{0,0} + \frac{1}{4}g^0(1,1,1)_{0,0}\right\}\eta\eta' I \sin(-\mathrm{U} + \mathrm{F} + \mathrm{F}' + \mathrm{v} - \mathrm{v}') $$

$$ - \left\{\frac{1}{2}\xi_1^{1,-1}g^0(1,1,0)_{0,0} + \frac{1}{4}g^0(1,1,1)_{0,0}\right\}\eta\eta' I \sin(-\mathrm{U} - \mathrm{F} + \mathrm{F}' + \mathrm{v} - \mathrm{v}') $$

$$ - \left\{\xi_2^{2,-2}g^0(2,0,0)_{0,0} + \frac{1}{2}\xi_1^{1,-1}g^0(2,0,1)_{0,0}\right. $$

$$ \left. + \frac{1}{4}g^0(2,0,2)_{0,0}\right\}\eta'^2 I \sin(-\mathrm{U} + 2\mathrm{F}' + 2(\mathrm{v} - \mathrm{v}')). $$

Dans ces formules, on a employé la notation du n° 32, savoir :

$$ \mathrm{U} = \mathrm{v} - \theta - (\Omega - \Theta). $$

Cherchons finalement les termes du troisième degré par rapport aux fonctions anastématiques. Dans ce but, établissons les expressions

$$\overset{1,0}{\Sigma}\nu(\mathfrak{z}'\mathrm{h}) + \overset{-1,0}{\Sigma}(\mathfrak{z}'\mathrm{h}) = \frac{1}{2} I'\Phi_0 \sin(\mathrm{U}' + \mathrm{v} - \mathrm{v}') + \frac{1}{2} I'\Phi_1 \sin(\mathrm{U}' - \mathrm{v} - \mathrm{v}')$$

$$- \frac{1}{2} I'\Phi_2 \cos(\mathrm{U}' + \mathrm{v} - \mathrm{v}') + \frac{1}{2} I'\Phi_3 \cos(\mathrm{U}' - \mathrm{v} - \mathrm{v}').$$

On a de plus, en omettant les termes inutiles,

$$\mathrm{h}\cos\mathrm{w} = \frac{1}{2}\Phi_0 + \frac{1}{2}\Phi_1 \cos 2\mathrm{v} + \frac{1}{2}\Phi_3 \sin 2\mathrm{v},$$

$$\mathrm{h}\cos 2\mathrm{w} = \frac{1}{2}\Phi_0 \cos(\mathrm{v} - \mathrm{v}') - \frac{1}{2}\Phi_2 \sin(\mathrm{v} - \mathrm{v}'),$$

d'où l'on tire facilement les expressions

$$\overset{1,0}{\Sigma}\nu(\mathfrak{z}\mathrm{h}\cos\mathrm{w}) + \overset{1,0}{\Sigma}\nu(\mathfrak{z}\mathrm{h}\cos\mathrm{w}) = \frac{1}{2}\Phi_0\mathfrak{z} + \frac{1}{4}\Phi_1 I \sin(\mathrm{U} - 2\mathrm{v})$$

$$+ \frac{1}{4}\Phi_3 I \cos(\mathrm{U} - 2\mathrm{v}),$$

$$\overset{0,1}{\Sigma}\nu(\mathfrak{z}'\mathrm{h}\cos 2\mathrm{w}) + \overset{-1,0}{\Sigma}\nu(\mathfrak{z}'\mathrm{h}\cos 2\mathrm{w}) = \frac{1}{4}\Phi_0 I' \sin(\mathrm{U}' + \mathrm{v} - \mathrm{v}')$$

$$+ \frac{1}{4}\Phi_2 I' \cos(\mathrm{U}' + \mathrm{v} - \mathrm{v}'),$$

$$\overset{1,0}{\Sigma}\nu(\mathfrak{z}'\mathrm{h}\cos\mathrm{w}) + \overset{-1,0}{\Sigma}\nu(\mathfrak{z}'\mathrm{h}\cos\mathrm{w}) = \overset{1,0}{\Sigma}\nu(\mathfrak{z}\mathrm{h}\cos 2\mathrm{w}) + \overset{1,0}{\Sigma}\nu(\mathfrak{z}\mathrm{h}\cos 2\mathrm{w}) = 0.$$

Par les formules que nous venons d'obtenir précédemment, il est visible que les termes du type (B), qui sont du premier ordre, faisant partie du second membre de l'équation (XI), renferment comme facteurs, soit $(\mathfrak{z})$, soit $(\mathfrak{z}')$, soit encore les dérivées de ces fonctions par rapport à v, respectivement à v'. On en conclut un résultat de la forme suivante:

$$\overset{1,0}{\Sigma}\nu(\mathrm{R}(\mathfrak{z}' - \mathfrak{z}\cos H)) + \overset{-1,0}{\Sigma}\nu(\mathrm{R}(\mathfrak{z}' - \mathfrak{z}\cos H))$$

$$= [-\gamma + (H) + (I)](\mathfrak{z}) + [(H)_1 + (I)_1]\frac{d(\mathfrak{z})}{d\mathrm{v}} + [\gamma\cos(\mathrm{v} - \mathrm{v}') + (H') + (I')](\mathfrak{z}')$$

$$+ [\gamma\sin(\mathrm{v} - \mathrm{v}') + (H')_1 + (I')_1]\frac{d(\mathfrak{z}')}{d\mathrm{v}'},$$

les (H), $(H)_1$, (H') et $(H')_1$ étant des fonctions du second degré des fonctions diastématiques, c'est-à-dire, de (ρ), (ρ'), $\frac{d(\rho)}{d\mathrm{v}}$ et $\frac{d(\rho')}{d\mathrm{v}'}$, les (I), $(I)_1$, (I') et $(I')_1$, de pareilles fonctions des fonctions anastématiques, ou bien de (ζ), (ζ'), $\frac{d(\zeta)}{d\mathrm{v}}$ et $\frac{d(\zeta')}{d\mathrm{v}'}$, et γ, une constante donnée par la formule

$$\gamma = \frac{\mu'}{\mu}\,\mathrm{R}^0(1,0,0)_{0,0}.$$

Après avoir établi ces formules, la séparation des termes du type (B) s'effectuera immédiatement. En effet, si l'on se rappelle la relation

$$\zeta = (\zeta) + \delta\zeta,$$

on parvient tout d'abord, en vertu de l'équation (XI), aux résultats qu'on pourra écrire de la manière suivante:

$$\text{(XII)}\qquad \frac{d^2(\zeta)}{dv_0^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{(e)}\frac{d(e)}{dv_0}\frac{d(\zeta)}{dv_0} \quad [(H)_1 + (I)_1]\frac{d(\zeta)}{d\mathrm{v}}$$
$$+ \left\{(1+g)^2\left(1+\frac{d\chi}{dv_0}\right)^2 + \gamma - (H) - (I)\right\}(\zeta)$$
$$= [\gamma\cos(\mathrm{v}-\mathrm{v}') + (H') + (I')](\zeta') + [\gamma\sin(\mathrm{v}-\mathrm{v}') + (H')_1 + (I')_1]\frac{d(\zeta')}{d\mathrm{v}'}$$
$$+ [(\zeta), \delta\zeta] - [\delta\zeta, (\zeta)],$$

$$\text{(XIII)}\qquad \frac{d^2\delta\zeta}{dv_0^2} + \left[\frac{1}{2}\frac{1}{(e)}\frac{d(e)}{dv_0} - \frac{\frac{dS}{dv_0}}{1+S}\right]\frac{d\delta\zeta}{dv_0} + (1+g)^2\left(1+\frac{d\chi}{dv_0}\right)^2\delta\zeta$$
$$= (1+S)^2\mathrm{R}(\zeta' - \zeta\cos H) + \frac{\frac{dS}{dv_0}}{1+S}\frac{d(\zeta)}{dv_0}$$
$$+ [\gamma - (H) - (I)](\zeta) - [(H)_1 + (I)_1]\frac{d(\zeta)}{d\mathrm{v}}$$
$$- [\gamma\cos(\mathrm{v}-\mathrm{v}') + (H') + (I')](\zeta')$$
$$- [\gamma\sin(\mathrm{v}-\mathrm{v}') + (H')_1 + (I')_1]\frac{d(\zeta')}{d\mathrm{v}'}$$
$$+ [\delta\zeta, (\zeta)] - [(\zeta), \delta\zeta].$$

De ces équations, la première se rapporte aux termes du type (B), et la seconde conduit à déterminer les inégalités anastématiques.

Je ne tiens pas nécessaire de mettre en évidence, à cette place, les expressions des fonctions (H), ... $(I')_1$, vu qu'elles dérivent facilement des formules que nous venons de donner précédemment. Mais il nous faut ajouter une remarque relativement à l'apparition de deux espèces de dérivées, les unes par rapport à v_0, les autres par rapport à v et à v'. Evidemment, si l'on avait introduit la variable v_0 au lieu de v, on aurait dû aussi remplacer la variable v par le nouvel argument v_0 donné par la formule

$$\mathrm{v}_0 = v_0 - G.$$

Il nous faut donc, dans les équations obtenues dans ce numéro, mettre v_0 au lieu de v et v_0' au lieu de v'. Mais la dérivée $\frac{d(\mathfrak{z})}{d\mathrm{v}_0}$ peut être remplacée immédiatement par $\frac{d(\mathfrak{z})}{dv_0}$, sous réserve, toutefois, qu'on détermine la fonction (ζ) de manière à remplir la condition

$$\frac{d(\mathfrak{z})}{dv_0} = I \cos \mathrm{U} + (\zeta).$$

On pourra aussi, dans toutes nos équations différentielles, changer la variable indépendante v_0 en v_0, en utilisant les formules générales

$$(30)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dF}{dv_0} &= \frac{1}{1 + \frac{dG}{d\mathrm{v}_0}} \frac{dF}{d\mathrm{v}_0}, \\ \frac{d^2F}{dv_0^2} &= \frac{1}{\left(1 + \frac{dG}{d\mathrm{v}_0}\right)^2} \frac{d^2F}{d\mathrm{v}_0^2} - \frac{\frac{d^2G}{d\mathrm{v}_0^2}}{\left(1 + \frac{dG}{d\mathrm{v}_0}\right)^3} \frac{dF}{d\mathrm{v}_0}. \end{aligned} \right.$$

CHAPITRE II.

Début des approximations successives.

117. Figurons-nous que le point de départ de nos études sur les mouvements des planètes soit tel qu'il n'y ait rien de connu, excepté les masses du soleil et des planètes, ainsi que les positions de ces astres à une époque déterminée, avec leurs vitesses relatives: on demande comment entamer les approximations successives?

Nous supposons, conformément aux idées qui nous guident dans le présent travail, non seulement que les masses des planètes soient de petites quantités relativement à celle du soleil, mais encore que les valeurs des quantités $\frac{1}{r}\frac{dr}{dt}$, $\frac{z}{r}$, $\frac{1}{r}\frac{dz}{dt}$ soient, à l'époque dont il s'agit, peu sensibles. La supposition mentionnée s'exprime d'ailleurs de la manière suivante.

Les positions et les vitesses des diverses planètes étant connues à une époque donnée, les éléments képleriens osculateurs le sont aussi, vu qu'il est seulement une simple question du calcul numérique de transformer les coordonnées avec leurs variations en éléments elliptiques. Notre supposition revient donc à admettre peu considérables les valeurs osculatrices des excentricités et des inclinaisons mutuelles des orbites des diverses planètes.

Mais même avec cette restriction, il sera assez difficile de trouver l'entrée aux approximations successives par lesquelles s'opère l'intégration des équations fondamentales, c'est-à-dire, des équations (I)—(XIII) du chapitre précédent. En effet, si on les examine, on voit immédiatement qu'aucune d'elles ne constitue une équation isolée et indépendante des autres. Par là, on serait généralement obligé de recourir à des équations, ou bien à des systèmes d'équations d'un ordre plus élevé que le second, s'il ne se présentait pas un moyen plus convenable, quand même il serait artificiel, d'attaquer notre problème, en apparence peu accessible.

Qu'on ne pense pas, en s'efforçant de trouver un tel moyen, à la substitution, au lieu des coordonnées vraies des différents corps, de leurs

expressions elliptiques, les éléments ayant des valeurs osculatrices. De la sorte, on ne saurait éviter des développements suivant les puissances du temps, lesquels, bien qu'ils puissent être convergents pendant un intervalle limité du temps, ne le sont certainement plus, lorsque la valeur du temps aura excédé un intervalle déterminé. Mais de tels développements ne constituent jamais des solutions absolues. Ce serait de même, si l'on admettait les éléments elliptiques affectés des inégalités séculaires procédant suivant les puissances du temps.

D'autre part, en exprimant les coordonnées moyennant les expressions élémentaires, les constantes y entrant seront, au commencement du calcul, inconnues, vu que les différences entre les éléments absolus et les éléments képleriens sont, généralement, trop grandes pour être négligées, même à la première approximation. Seulement les protomètres peuvent être considérés comme approximativement déterminés, parce que l'écart entre cet élément des diverses planètes et le demi grand axe de l'ellipse képlerienne est certainement une quantité minime, tout au plus de l'ordre des masses troublantes.

Avec les valeurs des protomètres ainsi obtenues, on pourra cependant calculer les transcendantes d'où dépendent les coefficients du développement de la fonction perturbatrice, et, établir ces coefficients, les fonctions (ρ), (ρ'), η, etc. y entrant étant encore indéterminées. On pourra, en d'autres mots, mettre en évidence, numériquement, les équations fondamentales, mais leur intégration ne paraît pas encore avancée d'un seul pas. Dans cet embarras, nous allons mettre à profit une propriété spéciale des termes du type (B).

En introduisant, dans l'équation (VI), les termes du type (B) d'après la formule (24) du n° 103, et en écrivant v_0 au lieu de v_0, on aura un résultat de la forme

$$\frac{\frac{d(S)}{d\mathrm{v}}}{(1+(S))^3} = \varepsilon_1 \sin(\mathrm{v} - \bar{\omega}' - \pi' + I') + \ldots,$$ [1]

ε_1 étant le coefficient $\overset{(2)}{A}(0,1,0,0,1)_{0,0}\eta' + \ldots$, et ainsi de suite.

[1] On aperçoit aisément que tous les termes, dont la somme forme le coefficient de sin F, disparaissent, vu qu'ils sont multipliés par le facteur n.

Certes, il paraît superflu de retenir le dénominateur $(1 + (S))^3$, les termes du second ordre étant surtout négligés: je l'ai mis en évidence seulement pour garder l'uniformité avec les équations que nous allons traiter un peu plus tard. Quant aux arguments des termes du second membre, on pourra remarquer qu'ils sont presque indépendants de V et, en conséquence, de U, fonction qui renferme la réduction du temps (voir les équations (3) du n° 40). Seulement dans l'angle ϖ', si on l'exprime comme fonction de la variable v_0, les réductions du temps T et T' apparaîtront, mais alors multipliées par des facteurs de l'ordre des forces troublantes (voir l'équation (14) du n° 41). Mais il faut encore observer que, si la fonction χ n'est pas égale à zéro, les arguments du second membre dépendent de l'angle $\mathrm{v} = \mathrm{v}_0 + \chi$. Dans l'aperçu présent, nous admettons cette fonction négligeable, et nous écrivons, en conséquence, v au lieu de v_0, aussi dans le premier membre.

L'équation que nous venons de signaler s'intègre aisément: si les $\varepsilon_1 \cos(\pi' - \Gamma')$, etc. sont des fonctions connues de v, on obtient le résultat tout de suite, mais, dans le cas opposé, on pourra signaler le résultat, du moins quant à la forme, et en donner une valeur approchée. On y suppose, toutefois, que les fonctions $\varepsilon_1 \cos(\pi' - \Gamma')$, etc. s'expriment moyennant des agrégats périodiques ne renfermant que des termes du type (A). Les valeurs approchées des résultats s'obtiennent tout simplement en mettant en usage les procédés d'intégration que nous avons élucidés dans le n° 102.

Après avoir déterminé les termes sousélémentaires du type (B) faisant partie de la fonction S, on va établir l'équation (VIII), c'est-à-dire, on formera les expressions avec coefficients numériques des divers termes entrant dans cette équation. On y doit observer la valeur de (c) découlant de la formule (β) du n° 103, savoir, en négligeant la partie (μ) qui est inutile quant à présent,

$$(c) = \mu a\left(1 - (\rho)^2 - \left(\frac{d(\rho)}{d\mathrm{v}}\right)^2\right).$$

On en tire:

$$(1) \qquad \frac{1}{(c)}\frac{d(c)}{d\mathrm{v}} = -2\,\frac{\dfrac{d^2(\rho)}{d\mathrm{v}^2} + (\rho)}{1 - (\rho)^2 - \left(\dfrac{d(\rho)}{d\mathrm{v}}\right)^2}\,\frac{d(\rho)}{d\mathrm{v}},$$

équation qui nous pourra être utile à diverses occasions

On obtiendra également des résultats semblables relativement aux fonctions S', (ρ') et (c'); et ensuite, on établira, d'après le modèle de l'équation (XII), deux équations, l'une en $(\mathfrak{z})$, l'autre en $(\mathfrak{z}')$.

De la sorte, si le nombre des planètes est deux, on parviendra à un système de quatre équations, chacune du second ordre et du troisième degré. Mais si l'on considère, à la fois, toutes les huit planètes principales, le nombre des équations simultanées sera seize. Il s'entend que l'intégration du système mentionné sera une affaire extrêmement compliquée: cependant, en faisant usage d'une méthode de réduction que j'ai donnée dans le mémoire »nouvelles recherches etc.», on parviendra à accomplir cette tâche moyennant des approximations successives, dont la première s'opère par l'intégration d'un système de seize équations linéaires, équations qui cependant jouissent de la propriété d'être horistiques, et qui en conséquence, se prêtent à chercher des solutions uniformément convergentes. Considérées comme équations linéaires, les équations mentionnées se divisent, du reste, en deux groupes, formant chacun un système de huit équations.

Par ce que je viens de dire, il s'entend que notre point de départ doit être l'étude de la fonction S.

118. Il s'agit avant tout de montrer que les termes du type (A) qui apparaissent dans l'expression de la fonction S, sont sousélémentaires du premier ordre tout au moins; autrement, c'est-à-dire, s'il y avait là des termes élémentaires, la fonction $\overline{T}$ renfermerait des termes surélémentaires, ce qui rendrait la solution impossible.

Dans le but proposé, reprenons l'équation (IV_2), et portons-y la valeur de r exprimée en ρ et (c). Nous aurons, par un calcul assez simple les expressions

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{\mu^2}{(c)(1+S)^2}\left[\left(\frac{d\rho}{dv_1}\right)^2 - 2\frac{1+\rho}{(c)}\frac{d(c)}{dv_1}\frac{d\rho}{dv_0} + \frac{(1+\rho)^2}{(c)^2}\left(\frac{d(c)}{dv_0}\right)^2\right],$$

$$\frac{c}{(1+\eta)^2 r^2} = \frac{\mu^2}{(c)(1+S)^2}(1+\rho)^2 + \frac{\mu^2}{(c)(1+S)^2}(1+\rho)^2\left[2\frac{d\chi}{dv_0} + \left(\frac{d\chi}{dv_0}\right)^2\right],$$

$$-2\frac{\mu}{r} = -\frac{2\mu^2}{(c)}(1+\rho).$$

Posons, pour simplifier un peu,

$$1 + S = \frac{1}{1 + Y},$$

et encore:

$$A = -2\,\frac{1+\rho}{(c)}\,\frac{d(c)}{dv_0}\,\frac{d\rho}{dv_0} + \frac{(1+\rho)^2}{(c)^2}\left(\frac{d(c)}{dv_0}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dv_0}\right)^2 - \left(\frac{d\rho}{dv}\right)^2,$$

$$B = -(\mu) + 2\left((\rho)\,R + \frac{d(\rho)}{dv_0}\,\frac{dR}{dv_0}\right) + R^2 + \left(\frac{dR}{dv_0}\right)^2,$$

$$C = (1+\rho)^2\left(2\,\frac{d\chi}{dv_0} + \left(\frac{d\chi}{dv_0}\right)^2\right).$$

En vertu de la formule (β) du n° 103, laquelle, si χ n'est pas égal à zéro, et que v_0 soit pris pour variable indépendante, s'écrit ainsi:

$$(\rho)^2 + \left(\frac{d(\rho)}{dv_0}\right)^2 = \eta^2 - (\mu),$$

on obtiendra, en rappelant l'équation

$$\rho = (\rho) + R,$$

le résultat:

$$\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{dv_0}\right)^2 = \eta^2 + B.$$

Maintenant, si nous formons la somme des trois premiers termes du premier membre de l'équation (IV_2), et que nous désignions cette somme par X, nous aurons:

$$(2)\qquad X = -\frac{\mu}{a} + \frac{\mu^2}{(c)}\left|(1+\rho)^2 + \left(\frac{d\rho}{dv_0}\right)^2\right|(2Y + Y^2) + \frac{\mu^2}{(c)}(1+Y)^2(A + C) + \frac{\mu^2}{(c)}B$$

Quant à la première intégrale du second membre de l'équation (IV_2), voici quelques remarques.

Posons d'abord:

$$(3)\qquad L = \int \left(\frac{\partial\Omega}{\partial v} + \frac{\partial\Omega}{\partial r}\,\frac{dr}{dv}\right)dv;$$

il s'agit d'introduire, dans cette formule, la variable indépendante v_0 au lieu de v

Pour y arriver, nous observons la relation

$$v = \mathrm{v}_0 + \chi + G,$$

ainsi que celle-ci:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial v} = \frac{\partial \Omega}{\partial \mathrm{v}_0},$$

en vertu desquelles la formule (3) se change en la suivante:

$$(3') \qquad L = \int \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mathrm{v}_0} + \frac{\partial \Omega}{\partial r}\frac{dr}{d\mathrm{v}_0}\right) d\mathrm{v}_0 + \int \frac{d\sqrt{c}}{dt}\left(\frac{d\chi}{d\mathrm{v}_0} + \frac{dG}{d\mathrm{v}_0}\right) d\mathrm{v}_0$$

D'ailleurs, les valeurs

$$\xi = r\cos(\mathrm{v}_0 + \chi + G); \qquad \eta = r\sin(\mathrm{v}_0 + \chi + G),$$

$$\frac{d\xi}{d\mathrm{v}_0} = \cos(\mathrm{v}_0 + \chi + G)\frac{dr}{d\mathrm{v}_0} - \eta\left(1 + \frac{d\chi}{d\mathrm{v}_0} + \frac{dG}{d\mathrm{v}_0}\right),$$

$$\frac{d\eta}{d\mathrm{v}_0} = \sin(\mathrm{v}_0 + \chi + G)\frac{dr}{d\mathrm{v}_0} + \xi\left(1 + \frac{d\chi}{d\mathrm{v}_0} + \frac{dG}{d\mathrm{v}_0}\right)$$

donnent sur-le-champ, si l'on considère les équations (11') du n° 66, ainsi que l'équation (4) du chapitre précédent, l'expression signalée de l'intégrale L.

Maintenant, si l'on forme le produit des expressions

$$\frac{\partial \Omega}{\partial r} = -\frac{(c)}{\mu r^2}\frac{\partial \Omega}{\partial \rho},$$

$$\frac{dr}{d\mathrm{v}_0} = -\frac{\mu r^2}{(c)}\frac{d\rho}{d\mathrm{v}_0} + \frac{r}{(c)}\frac{d(c)}{d\mathrm{v}_0},$$

on obtiendra:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial r}\frac{dr}{d\mathrm{v}_0} = \frac{\partial \Omega}{\partial \rho}\frac{d\rho}{d\mathrm{v}_0} - \frac{1}{\mu r}\frac{\partial \Omega}{\partial \rho}\frac{d(c)}{d\mathrm{v}_0}$$

Ensuite, si l'on reprend l'équation (38) du n° 70, et qu'on y mette v_0 au lieu de v, ce qui est permis parce qu'on doit, en même temps, considérer ρ et (λ) comme fonctions de v_0, et non plus comme fonctions de v, on parviendra à la relation

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \mathrm{v}_0} + \frac{\partial \Omega}{\partial \rho}\frac{d\rho}{d\mathrm{v}_0} = \mathrm{D}_{\mathrm{v}_0}\Omega + \frac{\partial \Omega}{\partial \rho}\left(\frac{dR}{d\mathrm{v}_0} - (\lambda)\right)$$

Ayant obtenu les relations dernièrement mentionnées, nous allons les introduire dans l'expression (3'), ce qui nous amènera à l'expression

$$(3'') \qquad L' = \mathrm{D}_{\mathrm{v}_0}\Omega + \frac{\partial\Omega}{\partial\rho}\left(\frac{dR}{d\mathrm{v}_0} - (\lambda) - \frac{1}{\mu r}\frac{d(c)}{d\mathrm{v}_0}\right) + \frac{\partial\Omega}{\partial\mathrm{v}_0}\left(\frac{d\chi}{d\mathrm{v}_0} + \frac{dG}{d\mathrm{v}_0}\right),$$

L' étant mis à la place de $\frac{dL}{d\mathrm{v}_0}$.

Il convient de s'arrêter un moment à la formule trouvée pour la rapprocher de l'expression de L', qu'on emploie, à l'ordinaire, dans la theorie de la variation des constantes arbitraires. On sait que cette fonction y joue un rôle proéminent, et qu'elle y entre sous forme d'une dérivée partielle. En désignant, en effet, par ε l'élément elliptique *longitude moyenne à l'époque,* on a établi l'expression

$$L' = \frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon}.$$

Les deux valeurs que nous venons d'assigner à L' devant être identiques, on demande si l'on peut toujours satisfaire à cette condition par la seconde. Il s'agit, en d'autres mots, d'examiner si cette valeur est toujours l'expression rigoureuse de la fonction L'.

Admettons, pour simplifier la question,

$$g = G = \chi = 0,$$

ce qui nous permettra d'écrire

$$(4) \qquad \frac{\partial\Omega}{\partial v} + \frac{\partial\Omega}{\partial r}\frac{dr}{dv} = \mathrm{D}_v\Omega + \frac{\partial\Omega}{\partial\rho}\left(\frac{dR}{dv} - (\lambda) - \frac{1}{\mu r}\frac{d(c)}{dv}\right)$$

Mais quant au premier membre de cette équation, on voit facilement qu'il ne peut pas être identique avec la dérivée partielle mentionnée, à moins qu'on n'ait:

$$re\sin(v - \pi_1)d\pi_1 + r\cos(v - \pi_1)de = d[a(1 - e^2)],$$

e étant l'excentricité elliptique, π_1, la longitude du périhélie, et a, le demi grand axe.[1]

---

[1] Annales de l'observatoire de Paris, I, p. 235.

Cette condition peut être remplie de diverses manières; d'abord en supposant les éléments constants, mais encore, en substituant, pour leurs parties variables, l'ensemble des inégalités du premier ordre, ou bien, les inégalités jusqu'à un ordre quelconque. Mais elle ne sera pas satisfaite, si l'on y met, au lieu des variations totales des éléments, une certaine portion de leurs inégalités, par exemple les inégalités séculaires. On voit en effet que, si l'on remplace les éléments e, π_1 et a par leurs expressions séculaires, le premier membre de l'équation signalée renfermera des termes dépendant de $2v$, termes qui ne seront pas compensés par de pareils termes du second membre. Il ne sera donc pas légitime de représenter de la sorte les fonctions mentionnées et en même temps mettre l'expression $\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon}$ à la place de L'. Il paraît découler par là que les formules données par Poisson dans son célèbre mémoire de 1816, se prêtent seulement aux développements qui procèdent conséquemment suivant les puissances des forces troublantes, développements où apparaîtra, inévitablement, le temps hors des signes trigonométriques, et qui, en conséquence, ne pourront pas constituer des solutions absolues. En d'autres mots, après avoir détaché de la fonction perturbatrice, la partie dite partie séculaire, les formules bien connues des variations des éléments ne s'appliquent plus, les expressions séculaires étant considérées comme une première approximation.

119. Revenons à notre équation (IV_2) qui joue, en quelque sorte, le même rôle dans la théorie des orbites absolues que joue, dans la variation des éléments kepleriens, l'expression du demi grand axe.

En portant, dans l'équation mentionnée les expressions (2) et (3″), il viendra:

$$\frac{\eta^2}{\omega}\left[(1+\rho)^2+\left(\frac{d\rho}{dv_0}\right)^2\right](2Y+Y^2)+\frac{\eta^2}{\omega}(1+Y)^2(A+C)+\frac{\eta^2}{\omega}B+N\sqrt{r}-N^2r^2$$

$$=\frac{\eta}{a}-h+(2+g)\int D_{v_0}\Omega\,dv_0+2\int\frac{\partial\Omega}{\partial\rho}\left(\frac{dR}{dv_0}-(\lambda)\frac{1}{\eta r}\frac{d(\cdot)}{dv_0}\right)dv_0$$

$$+(2+g)\int\frac{\partial\Omega}{\partial v_0}\left(\frac{d\chi}{dv_0}+\frac{dG}{dv_0}\right)dv_0$$

En réintroduisant S au lieu de Y, en remplaçant la constante d'intégration h par une autre σ, liée à celle-là par l'équation

$$\frac{\mu}{a} - h = \sigma,$$

et en désignant finalement par M l'ensemble des termes indépendants de S, qui sont ou du second ordre ou débarrassés du signe $\int$, on tire de l'équation précédente le résultat que voici:

$$(5) \qquad \frac{1}{(1+S)^2} - 1 = \frac{\overset{(c)}{\mu^2}}{(1+\rho)^2 + \left(\frac{d\rho}{dv_0}\right)^2 + A + C}\left\{\sigma + (2+g)\int D_{v_0}\Omega\, dv_0\right\} + M.$$

Evidemment, s'il se trouvait dans M des termes du type (A), ceux-là seraient tout au moins du premier ordre. En effet, les termes qui y sont encore affectés du signe $\int$ appartiennent au second ordre et deviennent, par l'intégration, du premier; les autres termes sont, par supposition, du premier ordre. Quant à l'intégrale $\int D_{v_0}\Omega\, dv_0$, son expression ne renferme pas de terme du type (A), et les autres termes seront du premier ordre. Il en peut résulter par la multiplication avec les diverses puissances de ρ, $\frac{d\rho}{dv_0}$, A et B, des termes du type (A), il est vrai, mais ces termes seront partout sousélémentaires. Il s'ensuit que l'expression de S ne renfermera aucun terme élémentaire, si toutefois σ est une quantité du premier ordre.

En différentiant l'équation (5), nous obtenons un résultat de la forme

$$(6) \qquad \frac{\frac{dS}{dv_0}}{(1+S)^3} = Q,$$

Q étant un agrégat où les termes du type (A) sont nécessairement du second ordre, vu que tout terme de ce genre contenu dans cet agrégat est le résultat d'une différentiation par laquelle sera produit un facteur de l'ordre des forces troublantes.

La fonction Q se met facilement sous la forme

$$(7)\quad Q = -\frac{\frac{1}{2}\frac{(c)}{\mu^2}(2+g)}{(1+\rho)^2+\left(\frac{d\rho}{d\mathrm{v}_0}\right)^2+A+C}\,\mathrm{D}_{\mathrm{v}_0}\Omega+\frac{1}{2}\frac{dM}{d\mathrm{v}_0}$$

$$+\left\{\frac{(c)}{\mu^2}\frac{\left[\left(1+\rho+\frac{d^2\rho}{d\mathrm{v}_0^2}\right)\frac{d\rho}{d\mathrm{v}_0}+\frac{1}{2}\frac{d(A+C)}{d\mathrm{v}_0}\right]}{\left[(1+\rho)^2+\left(\frac{d\rho}{d\mathrm{v}_0}\right)^2+A+C\right]^2}\right.$$

$$\left.-\frac{\frac{1}{2}\frac{1}{\mu^2}\frac{d(c)}{d\mathrm{v}_0}}{(1+\rho)^2+\left(\frac{d\rho}{d\mathrm{v}_0}\right)^2+A+C}\right\}\left\{\sigma+(2+g)\int\mathrm{D}_{\mathrm{v}_0}\Omega\, d\mathrm{v}_0\right\},$$

qu'on peut transformer ultérieurement moyennant l'équation (1). Il n'y a pas, toutefois, des motifs d'entrer, quant à présent, dans les détails s'y rapportant.

Quant à la constante σ, il y aura à remarquer qu'elle n'est pas arbitraire, mais bien surabondante. Elle doit en effet être déterminée de façon que l'expression de $\frac{dT}{dv}$, donnée par l'équation (25) du n° 115, soit dépourvue de tout terme constant. Autrement, la fonction T renfermerait un terme proportionel à l'angle v, et on n'aurait pas fondé le calcul de l'argument diastématique sur la vraie valeur du mouvement moyen.

Le résultat que nous venons de signaler par l'équation (5), ne jouit pas d'un caractère absolu. La raison en est que la série trigonométrique par laquelle sera représentée la quadrature $\int \mathrm{D}_{\mathrm{v}_0}\Omega\, d\mathrm{v}_0$, pourra finir par être divergente. Nous aurons plus tard, il est vrai, en partant de l'équation (X), un résultat plus rigoureux; néanmoins nous chercherons à montrer, d'une manière fort simple que la fonction S, déterminée par l'équation (6), est réelle et finie.

120. Supposons, en négligeant la fonction T dans les arguments des divers termes, que le second membre de l'équation (6) ne renferme que des termes tout connus. Admettons ensuite le développement

$$Q = \gamma_1 \sin(\lambda_1 \mathrm{v} + L_1) + \gamma_2 \sin(\lambda_2 \mathrm{v} + L_2) + \ldots,$$

$\gamma_1, \lambda_1, L_1, \gamma_2, \ldots$ étant des quantités constantes, et v, pour abréger, mis à la place de v_0. Nous supposons d'ailleurs que les coefficients $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ convergent comme une progression géométrique.

Avec cette expression, on tire immédiatement de l'équation (6) le résultat suivant:

$$-\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{(1+S)^2}-1\right\}=-K-\frac{\gamma_1}{\lambda_1}\cos(\lambda_1 v+L_1)-\frac{\gamma_2}{\lambda_2}\cos(\lambda_2 v+L_2)-\ldots$$

On peut toujours supposer la série du second membre convergente, bien que la convergence ne soit pas uniforme. En effet, si l'on pose:

$$K=K_0-\frac{\gamma_1}{\lambda_1}\cos L_1-\frac{\gamma_2}{\lambda_2}\cos L_2-\ldots,$$

on aura:

$$\frac{1}{(1+S)^2}=1+2K_0+\frac{2\gamma_1}{\lambda_1}[\cos(\lambda_1 v+L_1)-\cos L_1]+\ldots,$$

où les termes de droite forment, évidemment, une série convergente.

Il en découle:

$$1+S=\frac{1}{\sqrt{1+2K_0+\frac{2\gamma_1}{\lambda_1}[\cos(\lambda_1 v+L_1)-\cos L_1]+\ldots}}$$

En développant le second membre, on obtient le résultat

$$(8)\qquad 1+S=\frac{1}{\sqrt{1+2K_0}}-\frac{\gamma_1}{\lambda_1(1+2K_0)^{\frac{3}{2}}}[\cos(\lambda_1 v+L_1)-\cos L_1]-\ldots$$
$$+\frac{3\gamma_1^2}{2\lambda_1^2(1+2K_0)^{\frac{5}{2}}}[\cos(\lambda_1 v+L_1)-\cos L_1]^2+\ldots$$
$$-\ldots.$$

Or, le terme constant du développement de la fonction S devant être égal à une quantité donnée, que nous désignerons par σ, il faut qu'on établisse, en ne considérant que les termes du deuxième ordre en $\frac{\gamma_1}{\lambda_1}, \frac{\gamma_2}{\lambda_2}, \ldots$

et en restituant K au lieu de K_0, ce qui revient à omettre les termes $\frac{\gamma_1}{\lambda_1}\cos L_1$, etc., l'équation de condition que voici:

$$\frac{1}{\sqrt{1+2K}} - 1 - \sigma + \frac{3F_1}{2(1+2K)^{\frac{5}{2}}} = 0,$$

où l'on a désigné par $2F_1$ le développement

$$\frac{\gamma_1^2}{\lambda_1^2} + \frac{\gamma_2^2}{\lambda_2^2} + \ldots.$$

Evidemment, si F_1 était, avec σ, une petite quantité, la résolution de l'équation que nous venons d'obtenir s'effectuerait très facilement, parce que cette supposition entraîne celle que K soit aussi peu sensible. Or, si l'on ne considère que les premières puissances de K et de F_1, il résultera l'équation

$$-K - \sigma + \frac{3}{2}F_1 = 0,$$

d'où l'on tire:

$$K = -\sigma + \frac{3}{4}\left\{\left(\frac{\gamma_1}{\lambda_1}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_2}{\lambda_2}\right)^2 + \ldots\right\}.$$

Maintenant, si l'on désigne par $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots$ les coefficients des termes périodiques du premier ordre du développement (8), nous aurons, en ne considérant toujours que les termes du deuxième ordre en $\frac{\gamma_1}{\lambda_1}, \frac{\gamma_2}{\lambda_2}, \ldots$, l'expression

$$\varkappa_i = -\frac{\frac{\gamma_i}{\lambda_i}}{1 - \frac{3}{2}\sigma + \frac{9}{8}\left\{\left(\frac{\gamma_1}{\lambda_1}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_2}{\lambda_2}\right)^2 + \ldots\right\}},$$

ou bien

$$\varkappa_i = -\frac{\lambda_i\gamma_i}{\left(1-\frac{3}{2}\sigma\right)\lambda_i^2 + \frac{9}{8}\left\{\gamma_1^2\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^2 + \gamma_2^2\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_2}\right)^2 + \ldots\right\}}.$$

Certes, le procédé qui nous a conduit au résultat signalé n'étant légitime qu'à certaines conditions, on doit accepter ce résultat sous toute réserve. Néanmoins, tout incomplète que puisse être la formule du coefficient $\varkappa_i$, elle révèle un fait que nous allons retrouver plus tard avec plus de rigueur, savoir que de petites valeurs des coefficients λ_i ne tendent pas à agrandir les coefficients $\varkappa_i$ hors des limites finies et inférieures à l'unité.

121. La méthode d'étudier le développement de la fonction S que nous venons d'exposer dans le numéro précédent, conduit, si imparfaite qu'elle puisse être, aux règles du calcul qui s'appliquent avantageusement aux cas des planètes principales. Néanmoins, la discussion de certains de ses détails étant assez difficile, pour ne pas dire impossible, il convient de la remplacer par une autre qui sous le rapport théorique paraît supérieure. Je me restreins cependant à en indiquer le point de départ.

Dans ce but, différentions l'équation (6), après y avoir écrit v au lieu de v_0; ce qui nous donne immédiatement:

$$(\alpha) \qquad \frac{\frac{d^2S}{d\mathrm{v}^2}}{(1+S)^3} - 3\,\frac{\left(\frac{dS}{d\mathrm{v}}\right)^2}{(1+S)^4} = \frac{dQ}{d\mathrm{v}}.$$

Mais l'équation (6) nous fournit en outre la relation

$$\frac{\left(\frac{dS}{d\mathrm{v}}\right)^2}{(1+S)^4} = Q^2(1+S)^2,$$

en vertu de laquelle l'équation (α) prend la forme

$$\frac{\frac{d^2S}{d\mathrm{v}^2}}{(1+S)^3} - 3Q^2(1+S)^2 = \frac{dQ}{d\mathrm{v}}.$$

Ensuite, si l'on observe que l'équation (6) s'écrit ainsi:

$$Q^2 = \frac{Q\frac{dS}{d\mathrm{v}}}{(1+S)^4},$$

on sera à même de mettre l'équation précédente sous la forme suivante:

$$\frac{\frac{d^2S}{d\mathrm{v}^2}}{(1+S)^3} - \frac{3Q(1+S^2)}{(1+S)^4}\frac{dS}{d\mathrm{v}} - 6Q^2S = \frac{dQ}{d\mathrm{v}}.$$

On en déduit finalement l'équation que voici:

$$(9) \qquad \frac{d^2S}{d\mathrm{v}^2} - 3Q(1+S^2)\frac{dS}{d\mathrm{v}} - \left|6Q^2(1+S)^3 + \frac{dQ}{d\mathrm{v}}(3+3S+S^2)\right|S = \frac{dQ}{d\mathrm{v}}.$$

Tel est le résultat cherché. On pourra avantageusement y attacher le point de départ des approximations successives, et, par certaines considérations ultérieures, s'assurer de la convergence des développements qu'on va obtenir. Je n'insiste cependant pas, quant à présent, sur l'étude de l'équation obtenue, vu que nous allons en envisager, dans le chapitre suivant, une autre de la même nature, à peu près, mais dont l'usage paraît un peu plus simple. Je me réserve toutefois de revenir, dans la continuation du travail présent, sur l'équation (9).

122. En formant la quadrature de l'expression (28) du n° 103, auparavant multipliée par $d\mathrm{v}$, il importe de mettre le résultat sous la forme fondamentale généralisée, vu que cette forme doit être employée lorsqu'il s'agit de former les équations simultanées dont nous avons parlé à la fin du n° 17. Pour y parvenir, nous établissons d'abord les formules que voici:

$$(10)\qquad \int\left[\rho'\sin(\mathrm{v}-\mathrm{v}')-\frac{d\rho'}{d\mathrm{v}}\cos(\mathrm{v}-\mathrm{v}')\right]d\mathrm{v}$$

$$=-\rho'\cos(\mathrm{v}-\mathrm{v}')-\frac{d\rho'}{d\mathrm{v}}\sin(\mathrm{v}-\mathrm{v}')+\Psi_1,$$

$$(11)\qquad \int\left\{\begin{array}{l}-\left[\left(\rho^2-\left(\frac{d\rho}{d\mathrm{v}}\right)^2\right)\frac{d\rho'}{d\mathrm{v}}-2\rho\rho'\frac{d\rho}{d\mathrm{v}}\right]\cos(\mathrm{v}-\mathrm{v}')\\ +\left[\left(\rho^2-\left(\frac{d\rho}{d\mathrm{v}}\right)^2\right)\rho'+2\rho\frac{d\rho}{d\mathrm{v}}\frac{d\rho'}{d\mathrm{v}}\right]\sin(\mathrm{v}-\mathrm{v}')\end{array}\right\}d\mathrm{v}$$

$$=\left[\left(\rho^2-\left(\frac{d\rho}{d\mathrm{v}}\right)^2\right)\frac{d\rho}{d\mathrm{v}}-2\rho\rho'\frac{d\rho}{d\mathrm{v}}\right]\sin(\mathrm{v}-\mathrm{v}')$$

$$+\left[\left(\rho^2-\left(\frac{d\rho}{d\mathrm{v}}\right)^2\right)\rho'+2\rho\frac{d\rho}{d\mathrm{v}}\frac{d\rho'}{d\mathrm{v}}\right]\cos(\mathrm{v}-\mathrm{v}')+\Psi_2,$$

$$(12)\quad \int \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{d\rho}{dv}\left(\rho'^2-\left(\frac{d\rho'}{dv}\right)^2\right)-2\rho\rho'\frac{d\rho'}{dv}\right]\cos 2(v-v') \\ +\left[\rho\left(\rho'^2-\left(\frac{d\rho'}{dv}\right)^2\right)+2\rho'\frac{d\rho}{dv}\frac{d\rho'}{dv}\right]\sin 2(v-v') \end{array} \right\} dv$$

$$= \left[\frac{d\rho}{dv}\left(\rho'^2-\left(\frac{d\rho'}{dv}\right)^2\right)-2\rho\rho'\frac{d\rho'}{dv}\right]\sin 2(v-v')$$

$$-\left[\rho\left(\rho'^2-\left(\frac{d\rho'}{dv}\right)^2\right)+2\rho'\frac{d\rho}{dv}\frac{d\rho'}{dv}\right]\cos 2(v-v')+\Psi_3.$$

Ensuite, nous allons montrer que les trois fonctions Ψ_1, Ψ_2 et Ψ_3 sont de petites quantités de l'ordre des forces perturbatrices. Or, les trois intégrales que nous venons d'établir entrant, dans l'expression de S, multipliées par des facteurs de l'ordre mentionné, les incréments dus aux fonctions Ψ_1, Ψ_2 et Ψ_3 sont des quantités du second ordre.

En différentiant l'expression (10), il vient tout d'abord:

$$(13)\quad \frac{d\Psi_1}{dv} = \left(\frac{d^2\rho}{dv^2}+\rho'\right)\sin(v-v')\frac{dv}{dv}.$$

Mais $\frac{d^2\rho}{dv^2}+\rho'$ est une quantité du premier ordre, et son produit par $\sin(v-v')\frac{dv}{dv}$ ne renferme pas de terme sousélémentaire du premier ordre et du type (A). Donc, il est visible que la fonction Ψ_1 est une quantité du premier ordre.

Le calcul des fonctions Ψ_2 et Ψ_3 est un peu plus compliqué. Nous parviendrons toutefois aux résultats en différentiant les équations respectives, (11) et (12).

De l'équation (11), il résultera:

$$
\begin{aligned}
&-2\left[\left(\rho^2-\left(\frac{d\rho}{dv}\right)^2\right)\frac{d\rho}{dv}-2\rho\rho'\frac{d\rho}{dv}\right]\cos(v-v')\\
&+2\left[\left(\rho^2-\left(\frac{d\rho}{dv}\right)^2\right)\rho'+2\rho\frac{d\rho}{dv}\frac{d\rho'}{dv'}\right]\sin(v-v')\\
=\;&2\left[\left(\rho-\frac{d^2\rho}{dv^2}\right)\frac{d\rho}{dv}\frac{d\rho'}{dv'}-\left(\frac{d\rho}{dv}\right)^2\rho'-\rho\rho'\frac{d^2\rho}{dv^2}\right]\sin(v-v')\\
&+2\left[\left(\rho-\frac{d^2\rho}{dv^2}\right)\frac{d\rho}{dv}\rho'+\left(\frac{d\rho}{dv}\right)^2\frac{d\rho'}{dv'}+\rho\frac{d\rho}{dv}\frac{d^2\rho}{dv^2}\right]\cos(v-v')\\
&+\left[\left(\rho^2-\left(\frac{d\rho}{dv}\right)^2\right)\frac{d^2\rho'}{dv'^2}-2\rho\frac{d\rho}{dv}\frac{d\rho'}{dv'}\right]\frac{dv'}{dv}\sin(v-v')\\
&+\left[\left(\rho^2-\left(\frac{d\rho}{dv}\right)^2\right)\rho'+2\rho\frac{d\rho}{dv}\frac{d\rho'}{dv'}\right]\frac{dv'}{dv}\sin(v-v')\\
&+\left[\left(\rho^2-\left(\frac{d\rho}{dv}\right)^2\right)\frac{d\rho'}{dv'}+2\rho\frac{d\rho}{dv}\frac{d^2\rho'}{dv'^2}\right]\frac{dv'}{dv}\cos(v-v')\\
&-\left[\left(\rho^2-\left(\frac{d\rho}{dv}\right)^2\right)\frac{d\rho'}{dv'}-2\rho\frac{d\rho}{dv}\rho'\right]\frac{dv'}{dv}\cos(v-v')+\frac{d\Psi_2}{dv}.
\end{aligned}
$$

Admettons, pour abréger, les notations

$$(14)\qquad \frac{d^2\rho}{dv^2}+\rho=N;\qquad \frac{d^2\rho'}{dv'^2}+\rho'=N',$$

N et N' étant, comme on sait, des quantités du premier ordre. En éliminant, avec les relations signalées, $\frac{d^2\rho}{dv^2}$ et $\frac{d^2\rho}{dv'^2}$ de l'équation précédente, nous aurons:

$$(15) \qquad \frac{d\Psi_2}{dv} = 2\left(\rho\rho' + \frac{d\rho}{dv}\frac{d\rho'}{dv'}\right) N \sin(v - v')$$

$$+ 2\left(\rho'\frac{d\rho}{dv} - \rho\frac{d\rho'}{dv'}\right) N \cos(v - v')$$

$$- \left(\rho^2 - \left(\frac{d\rho}{dv}\right)^2\right) N' \frac{dv'}{dv} \sin(v - v')$$

$$- 2\rho\frac{d\rho}{dv} N' \frac{dv'}{dv} \cos(v - v').$$

Finalement, si l'on différentie l'équation (12), il viendra:

$$0 = \left[\frac{d\rho}{dv}\left(\rho'^2 - \left(\frac{d\rho'}{dv'}\right)^2\right) - 2\rho\rho'\frac{d\rho'}{dv'}\right] \cos 2(v - v')$$

$$+ \left[\rho\left(\rho'^2 - \left(\frac{d\rho'}{dv'}\right)^2\right) + 2\rho'\frac{d\rho}{dv}\frac{d\rho'}{dv'}\right] \sin 2(v - v')$$

$$+ \left[\frac{d^2\rho}{dv^2}\left(\rho'^2 - \left(\frac{d\rho'}{dv'}\right)^2\right) - 2\rho'\frac{d\rho}{dv}\frac{d\rho'}{dv'}\right] \sin 2(v - v')$$

$$- \left[\frac{d\rho}{dv}\left(\rho'^2 - \left(\frac{d\rho'}{dv'}\right)^2\right) + 2\rho'\frac{d^2\rho}{dv^2}\frac{d\rho'}{dv'}\right] \cos 2(v - v')$$

$$+ \left[2\frac{d\rho}{dv}\frac{d\rho'}{dv'}\left(\rho' - \frac{d^2\rho'}{dv'^2}\right) - 2\rho\left(\left(\frac{d\rho'}{dv'}\right)^2 + \rho'\frac{d^2\rho'}{dv'^2}\right)\right] \frac{dv'}{dv} \sin 2(v - v')$$

$$- \left[2\rho\frac{d\rho'}{dv'}\left(\rho' - \frac{d^2\rho'}{dv'^2}\right) + 2\frac{d\rho}{dv}\left(\left(\frac{d\rho'}{dv'}\right)^2 + \rho'\frac{d^2\rho'}{dv'^2}\right)\right] \frac{dv'}{dv} \cos 2(v - v')$$

$$- 2\left[\frac{d\rho}{dv}\left(\rho'^2 - \left(\frac{d\rho'}{dv'}\right)^2\right) - 2\rho\rho'\frac{d\rho'}{dv'}\right] \frac{dv'}{dv} \cos 2(v - v')$$

$$- 2\left[\rho\left(\rho'^2 - \left(\frac{d\rho'}{dv'}\right)^2\right) + 2\rho'\frac{d\rho}{dv}\frac{d\rho'}{dv'}\right] \frac{dv'}{dv} \sin 2(v - v') + \frac{d\Psi_1}{dv},$$

d'où l'on tire, en considérant les équations (14), la formule que voici:

(16)
$$\frac{d\Psi_3}{d\mathrm{v}} = 2\rho' \frac{d\rho'}{d\mathrm{v}'} N \cos 2(\mathrm{v} - \mathrm{v}')$$
$$- \left(\rho'^2 - \left(\frac{d\rho'}{d\mathrm{v}'}\right)^2\right) N \sin 2(\mathrm{v} - \mathrm{v}')$$
$$+ 2\left(\rho\rho' + \frac{d\rho}{d\mathrm{v}}\frac{d\rho'}{d\mathrm{v}'}\right) N' \frac{d\mathrm{v}'}{d\mathrm{v}} \sin 2(\mathrm{v} - \mathrm{v}')$$
$$+ 2\left(\rho' \frac{d\rho}{d\mathrm{v}} - \rho \frac{d\rho'}{d\mathrm{v}'}\right) N' \frac{d\mathrm{v}'}{d\mathrm{v}} \cos 2(\mathrm{v} - \mathrm{v}').$$

Il est donc démontré, par les formules (13), (15) et (16), que les trois dérivées $\frac{d\Psi_1}{d\mathrm{v}}$, $\frac{d\Psi_2}{d\mathrm{v}}$ et $\frac{d\Psi_3}{d\mathrm{v}}$ sont des quantités du premier ordre, vu que tous les termes en sont multipliés, ou par N, ou par N'. Mais les expressions des dérivées dont il s'agit ne renfermant pas non plus des termes sousélémentaires du premier ordre et du type (A), il est évident que les fonctions Ψ_1, Ψ_2 et Ψ_3, elles-mêmes et non seulement leurs dérivées, sont des quantités du premier ordre.

123. On a supposé, dans les derniers numéros, que la fonction Q était donnée par une suite de termes périodiques tout connus. Généralisons maintenant un peu cette supposition, et admettons que l'expression de Q soit composée de deux parties, dont l'une est multipliée par la fonction encore inconnue ξ, en sorte que nous ayons:

$$Q = Q_0 + Q_1 \xi,$$

Q_0 et Q_1 étant, tous les deux, des agrégats périodiques connus.

En substituant cette expression dans l'équation (6), on obtiendra, par l'intégration, un résultat de la forme

$$S = F_0 - F_1 \int \Phi \xi d\mathrm{v},$$

où F_0, F_1 et Φ signifient des agrégats périodiques connus.

Ayant obtenu cette valeur de S, on mettra aisément l'équation fondamentale (IX) sous la forme

$$\frac{d^2\xi}{d\mathrm{v}^2} + Y\frac{d\xi}{d\mathrm{v}} + Y_1 \xi = Y_0 - 2F \int \Phi \xi d\mathrm{v},$$

équation qui se transforme en la suivante

$$(\mathrm{IX}_2) \qquad \frac{d^2\xi}{dv^2} + (Y - 2FU_1)\frac{d\xi}{dv} + \left(Y_1 + 2F\left(\frac{dU_1}{dv} - YU_1\right)\right)\xi$$

$$= Y_0 - 2F\int Y_0 U_1 dv + 4F\int FU_1 dv \int \Phi\xi dv,$$

la fonction U_1 étant déterminée en vertu de l'équation

$$\frac{d^2U_1}{dv^2} - Y\frac{dU_1}{dv} + \left(Y_1 - \frac{dY}{dv}\right)U_1 = \Phi.$$

La transformation que je viens d'indiquer a été exposée la première fois dans les comptes rendus de l'académie des sciences de l'institut de France, Tome LXXXXV, et ensuite, dans mon troisième mémoire »undersökningar af theorien för himlakropparnas rörelser». Dans le second tome de son travail instructif »les méthodes nouvelles de la mécanique céleste», M. Poincaré en a donné un analyse remarquable.

Il est aisé de voir qu'on pourra souvent, en partant de l'équation (IX_2), obtenir une solution relativement à la fonction ξ dont l'erreur sera une petite quantité du troisième ordre par rapport aux forces troublantes.

CHAPITRE III.

Termes critiques.

124. Le calcul des inégalités périodiques des planètes à été effectué, à de très rares exceptions près, moyennant des quadratures directes, ou bien, en partant d'une équation différentielle linéaire, dont la solution a été supposée connue. On a ainsi ramené les intégrations à l'application de la règle bien connue: changer le cosinus en sinus, ou le sinus en cosinus avec signe contraire, et diviser le coefficient du terme considéré par le facteur affectant, dans l'argument, la variable indépendante. Un diviseur déterminé de la sorte sera nommé *diviseur linéaire* et le procédé mentionné, *intégration linéaire.*

Cette manière de procéder, sans doute appliquable quant à la plupart des termes apparaissant dans les seconds membres des diverses équations fondamentales, cesse néanmoins d'être légitime lorsque le diviseur linéaire s'abaisse au dessous d'une limite déterminée. En voici la raison.

Si l'on considère, ce qui n'est point interdit, le résultat essentiel de l'intégration d'un terme distinct d'être ce qu'on obtient par l'application de la règle mentionnée mais en employant un autre diviseur que j'appelle *diviseur effectif,* les deux diviseurs nommés ne sont jamais rigoureusement identiques, bien que le diviseur linéaire puisse constituer la partie prépondérante du diviseur effectif. Mettre le diviseur linéaire dans le dénominateur du coefficient demandé, au lieu du diviseur effectif, revient donc, on s'en aperçoit facilement, à avoir entamé un développement suivant les puissances du rapport de la différence entre les deux diviseurs par le diviseur linéaire. Or, il est facile de prévoir que le rapport mentionné puisse acquérir des valeurs assez grandes pour que le développement dont j'ai parlé devienne divergent: il faut seulement que le diviseur linéaire prenne une valeur suffisamment petite. En conséquence, on peut attendre des cas où le mode du calcul, en employant les diviseurs linéaires, devient impraticable.

Lorsqu'un diviseur est tellement petit qu'il donne occasion à des développements peu convergents ou même divergents, je le nomme *terme critique.* On peut donc dire que la méthode de l'intégration linéaire ne se prête plus aux termes critiques.

Dans la note »Bemerkungen über die Convergenz der nach den Potenzen der störenden Kräfte geordneten Annäherungen im Störungsprobleme»,[1] on a montré, par des exemples numériques, combien peut s'écarter, de la valeur exacte, la valeur d'une inégalité obtenue par l'intégration linéaire. On y a, en particulier, fait voir que, si la fraction $\frac{sA}{16\lambda^2}$ s'approche de la valeur $\frac{1}{3\sqrt{3}}$, la convergence cesse du développement qu'on a entamé en admettant, pour approximation initiale, le résultat de l'intégration linéaire. Dans l'expression de la fraction signalée, A signifie le coefficient du terme considéré, tel qu'il entre dans le second membre de l'équation (X); s, un nombre entier, et λ finalement, le diviseur linéaire.

Mais d'autre part, on a aussi mis hors de doute que les vrais résultats relativement aux inégalités considérées dans la note citée, ne deviennent point infinis, même si la valeur du diviseur linéaire s'évanouit. Ce fait-là, étant d'une grande importance quant à l'étude des inégalités périodiques, on en a examiné soigneusement les détails dans le mémoire »Untersuchungen über die Convergenz etc.».[2]

Cependant, les méthodes mises en usage dans le travail mentionné n'étaient pas propres à faire reconnaître la vraie nature des termes élémentaires dans les cas où ils deviennent critiques. A cet égard, il fallait des recherches ultérieures, ce qui m'a obligé de publier le mémoire »Nouvelles recherches etc.».[3]

Dans le mémoire nommé, je me suis servi de certaines équations différentielles du second ordre, dont le degré était d'abord égal à 3. J'en ai ensuite déduit de nouvelles équations ayant la forme d'équations linéaires et appartenant, quant à la forme, à la catégorie des équations qu'on peut appeler, avec M. Poincaré et d'autres savants, *équations aux variations.*

[1] Astron. Nachr. Bd. 124.
[2] Acta math. Tome 9.
[3] Acta math. Tomes 15 et 17.

Mais j'ai eu soin de déterminer les coefficients entrant dans ces nouvelles équations d'une manière telle que leurs expressions renfermassent certaines quantités constantes du second ordre relativement à la fonction cherchée. De la sorte, j'ai obtenu des équations de forme linéaire mais conduisant à des équations algébriques tout au moins du troisième degré, d'où s'obtenaient les coefficients du résultat représenté toujours par une série trigonométrique. Les équations différentielles jouissant de cette propriété ont été appelées *équations differentielles horistiques.*

On en pourra distinguer deux genres.

Considérons l'équation linéaire du second ordre:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + Y_1 y = 0, \tag{1}$$

Y_1 étant une fonction de certains coefficients constants encore indéterminés, et renfermant comme terme additif un agrégat périodique tout connu. La fonction Y_1 peut d'ailleurs renfermer une partie constante toute connue.

L'équation proposée a pour l'intégrale générale l'expression suivante:

$$\begin{aligned} y = \;& C_1\{\Psi_0 + \nu\Psi_1 + \nu^2\Psi_2 + \ldots\}e^{\nu x} \\ & + C_2\{\Psi_0 - \nu\Psi_1 + \nu^2\Psi_2 - \ldots\}e^{-\nu x}, \end{aligned}$$ [1]

qui peut être remplacée par une autre plus convenable, si ν n'est pas une quantité très petite.

Dans l'expression signalée, les Ψ signifient des agrégats périodiques qu'on peut considérer comme tout connus, et ν, un coefficient constant qu'on appelle, avec M. Poincaré, *exposant caractéristique.* Quant aux équations horistiques, l'exposant caractéristique est fonction des constantes indéterminées entrant dans l'expression de Y_1. L'exposant caractéristique ne s'obtient donc pas, moyennant un calcul direct, des quantités toutes connues et données dans l'expression de la fonction Y_1, mais il entre comme inconnu dans une équation algébrique ou transcendante, d'où l'on tire une valeur réelle de son carré. Cette valeur pouvant être positive ou négative, on distinguera par là les deux genres des équations horistiques:

1°. Equations horistiques à exposant caractéristique réel;

2°. Equations horistiques à exposant caractéristique imaginaire.

[1] Nouvelles recherches etc., § 7, n° 5.

Il n'est pas nécessaire de distinguer séparément le cas intermédiaire où l'exposant caractéristique disparaît, parce qu'alors l'équation linéaire perd sa propriété d'être horistique.

Reprenons l'équation (16) du n° 8, et admettons-y:

$$\gamma_n = p_n \varepsilon^n.$$

Supposons ensuite que la série

$$\gamma_0 + \gamma_1 + \cdots$$

soit convergente pour toutes les valeurs de ε entre $\varepsilon = 0$ et une limite supérieure $\varepsilon = \varepsilon_0$. En supposant ε_0 moindre que l'unité, on peut encore admettre que les coefficients p_n aillent en croissant, de sorte qu'on ait:

$$\sum \frac{p_n}{p} > \sum \sqrt[3]{\frac{p_n}{p}}.$$

On en conclut que la série

$$\sum \sqrt[3]{p_n \varepsilon^n} = \sum \sqrt[3]{\gamma_n}$$

est encore convergente, pourvu qu'on ait:

$$\sqrt[3]{\varepsilon} < \varepsilon_0,$$

condition qui est remplie dans les théories des planètes principales. En effet, le module ε étant une quantité du second ordre par rapport aux coefficients diastématiques et aux coefficients anastématiques, on aura toujours, dans les théories de ces planètes, une valeur de $\varepsilon^{\frac{2}{3}}$ suffisamment petite pour garantir la convergence des termes critiques apparaissant dans le second membre de l'équation (16) du n° 8.

La dernière remarque a été faite, évidemment, pour préciser ce que je viens de dire vers la fin du n° 8.

125. Admettons qu'on ait introduit, dans l'équation (VIII), la variable indépendante v (ou v_0) au lieu de v_0; écrivons-y, pour abréger, ρ et ρ' au lieu de (ρ) et (ρ'), et supposons finalement que les fonctions (S) et (P) soient mises sous la forme fondamentale généralisée: l'équation mentionnée se met alors sous la forme suivante, où les termes du cinquième degré et des degrés supérieurs sont supprimés,

$$(2)\qquad \frac{d^2\rho}{dv^2} + P_{1,0}\frac{d\rho}{dv} + (1 - P_{0,1})\rho$$

$$+ P_{0,2}\left(\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{dv}\right)^2\right) + 2P_{1,1}\rho\frac{d\rho}{dv} + P_{2,0}\left(\rho^2 - \left(\frac{d\rho}{dv}\right)^2\right) = W.$$

Dans cette équation, ni les P, ni les W ne sont connus dès le début, mais on sait que ceux-là sont des quantités du premier ou deuxième ordre dépendant des expressions $\rho'^2 - \left(\frac{d\rho}{dv}\right)^2$, $2\rho'\frac{d\rho}{dv}$, ρ' et $\frac{d\rho}{dv}$, de η^2 et η'^2, ainsi que de l'angle $v - v'$. En consultant les formules (27) et (28) du n° 103, ainsi que les formules (10), (11) et (12) du n° 122, on parviendra facilement à représenter les fonctions dont il s'agit moyennant des expressions de la forme que voici:

$$(3, a)\qquad P_{1,0} = -\frac{3}{2}\frac{1}{(r)}\frac{d(r)}{dv}$$

$$+\beta_{1,0}^{(k,l)}\left[2\rho'\frac{d\rho}{dv}\cos 2(v - v') - \left(\rho'^2 - \left(\frac{d\rho}{dv}\right)^2\right)\sin 2(v - v')\right],$$

$$(3, b)\qquad P_{0,1} = -\frac{3}{2}\frac{1}{(r)^2}\left(\frac{d(r)}{dv}\right)^2 + \frac{1}{(r)}\frac{d^2(r)}{dv^2} + \beta_1^{(k,l)} + \beta_3^{(k,l)}\eta^2 + \beta_2^{(k,l)}\eta'^2$$

$$+ \beta_{0,1}^{(k,l)}\left[\left(\rho'^2 - \left(\frac{d\rho}{dv}\right)^2\right)\cos 2(v - v') + 2\rho'\frac{d\rho}{dv}\sin 2(v - v')\right],$$

$$(3, c)\qquad P_{0,2} = \beta_{0,2}^{(k,l)}\left[\rho'\cos(v - v') + \frac{d\rho}{dv}\sin(v - v')\right],$$

$$(3, d)\qquad P_{1,1} = \beta_{1,1}^{(k,l)}\left[-\rho'\sin(v - v') + \frac{d\rho}{dv}\cos(v - v')\right],$$

$$(3, e)\qquad P_{2,0} = \beta_{2,0}^{(k,l)}\left[\rho'\cos(v - v') + \frac{d\rho}{dv}\sin(v - v')\right],$$

$$(4)\qquad W = (\gamma_1^{(k,l)} + \gamma_2^{(k,l)}\eta'^2)\left[\rho'\cos(v - v') + \frac{d\rho}{dv}\sin(v - v')\right].$$

Dans ces formules, où l'on a négligé quelques petits termes du second ordre, et où l'on n'a pas encore tenu compte des parties dues aux fonctions anastématiques, les coefficients β et γ sont des quantités du premier ordre, ne dépendant, du reste, que des rapports entre les protomètres.

Pour distinguer les actions des diverses planètes, j'ai mis en évidence les indices k et l. Ainsi la lettre k se rapporte à la planète attirée et l, à la planète attirante. Cependant, pour débarrasser le plus possible les formules de trop d'indices, j'écrirai, lorsque il ne s'agit que de donner un aperçu général, ${}_1\beta'$, ${}_1\beta''$, . . . au lieu des ${}_1\beta$. , ${}'_1\beta$, ${}'_1\beta''$, . . . au lieu des ${}_1\beta^{l,k}$, et ainsi de suite.

Si la planète à laquelle se rapportent les quantités ρ, $\frac{d\rho}{dv}$, . . . et l'angle v, est soumise à l'action de plusieurs autres planètes, les expressions signalées de P et de W seront complétées par de nouveaux termes tout semblables à ceux que nous avons mis en évidence. Je vais écrire alors:

$$(5, a) \quad P_{1,0} = -\frac{3}{2}\frac{1}{(e)}\frac{d(e)}{dv} + {}_1\beta'_{1,0}\left| -\left(\rho'^2 - \left(\frac{d\rho'}{dv}\right)^2\right)\sin 2(v - v') + 2\rho'\frac{d\rho'}{dv}\cos 2(v - v')\right|$$

$$+ {}_1\beta''_{1,0}\left| -\left(\rho''^2 - \left(\frac{d\rho''}{dv}\right)^2\right)\sin 2(v - v'') + 2\rho''\frac{d\rho''}{dv}\cos 2(v - v'')\right|$$

$$+ \dots$$

$$(5, b) \quad P_{0,1} = {}_1\beta_1 + {}_1\beta_2\eta^2 + {}_1\beta'_2\eta'^2 + {}_1\beta''_2\eta''^2 + \dots - \frac{3}{2}\frac{1}{(e)^2}\left(\frac{d(e)}{dv}\right)^2 + \frac{1}{(e)}\frac{d^2(e)}{dv^2}$$

$$+ {}_1\beta'_{0,1}\left| \left(\rho'^2 - \left(\frac{d\rho'}{dv}\right)^2\right)\cos 2(v - v') + 2\rho'\frac{d\rho'}{dv}\sin 2(v - v')\right|$$

$$+ {}_1\beta''_{0,1}\left| \left(\rho''^2 - \left(\frac{d\rho''}{dv}\right)^2\right)\cos 2(v - v'') + 2\rho''\frac{d\rho''}{dv}\sin 2(v - v'')\right|$$

$$+ \dots$$

$$(5, c) \quad P_{0,2} = {}_1\beta'_{0,2}\left| \rho'\cos(v - v') + \frac{d\rho'}{dv}\sin(v - v')\right|$$

$$+ {}_1\beta''_{0,2}\left| \rho''\cos(v - v'') + \frac{d\rho''}{dv}\sin(v - v'')\right| + \dots$$

$$(5, d) \qquad P_{1,1} = {}_{\iota}\beta'_{1,1}\left| -\rho' \sin(v - v') + \frac{d\rho}{dv}\cos(v - v')\right|$$

$$+ {}_{\iota}\beta''_{1,1}\left| -\rho'' \sin(v - v'') + \frac{d\rho}{dv}\cos(v - v'')\right| + \ldots$$

$$(5, e) \qquad P_{2,0} = {}_{\iota}\beta'_{2,0}\left| \rho' \cos(v - v') + \frac{d\rho}{dv}\sin(v - v')\right|$$

$$+ {}_{\iota}\beta''_{2,0}\left| \rho'' \cos(v - v'') + \frac{d\rho}{dv}\sin(v - v'')\right| + \ldots$$

Finalement, l'expression complète de W devient celle-ci:

$$(6) \qquad W = (\gamma'_1 + \gamma'_2 \eta'^2)\left[\rho' \cos(v - v') + \frac{d\rho}{dv}\sin(v - v')\right]$$

$$+ (\gamma''_1 + \gamma''_2 \eta''^2)\left| \rho'' \cos(v - v'') + \frac{d\rho}{dv}\sin(v - v'')\right|$$

$$+ \ldots$$

Quand il s'agit d'une autre planète, par exemple de celle dont les coordonnées s'expriment moyennant ρ', v' et ζ', j'emploierai les notations

$$(5', a) \qquad P'_{1,0} = -\frac{3}{2}\frac{1}{(\rho')}\frac{d(\rho')}{dv} + {}'_{\iota}\beta_{1,0}\left[-\left(\rho^2 - \left(\frac{d\rho}{dv}\right)^2\right)\sin 2(v' - v) + 2\rho\frac{d\rho}{dv}\cos 2(v' - v)\right|$$

$$+ {}'_{\iota}\beta''_{1,0}\left| -\left(\rho''^2 - \left(\frac{d\rho}{dv}\right)^2\right)\sin 2(v' - v'') + 2\rho''\frac{d\rho}{dv}\cos 2(v' - v'')\right|$$

$$+ \ldots$$

$$(5', b) \qquad P'_{0,1} = {}'_{\iota}\beta_1 + {}'_{\iota}\beta_3 \eta'^2 + {}'_{\iota}\beta_2 \eta^2 + {}'_{\iota}\beta''_2 \eta''^2 + \ldots - \frac{3}{2}\frac{1}{(\rho')^2}\left(\frac{d(\rho')}{dv}\right)^2 + \frac{1}{(\rho')}\frac{d^2(\rho')}{dv^2}$$

$$+ {}'_{\iota}\beta_{0,1}\left| \left(\rho^2 - \left(\frac{d\rho}{dv}\right)^2\right)\cos 2(v' - v) + 2\rho\frac{d\rho}{dv}\sin 2(v' - v)\right]$$

$$+ {}'_{\iota}\beta''_{0,1}\left| \left(\rho'' - \left(\frac{d\rho}{dv}\right)^2\right)\cos 2(v' - v'') + 2\rho''\frac{d\rho}{dv}\sin 2(v' - v'')\right|$$

$$+ \ldots$$

etc.

Désignons encore par H, H', H'', ... les parties constantes des fonctions η^2, η'^2, η''^2, ..., et posons:

(7) $$P_{0,1} = {}_{\prime}\beta_1 + {}_{\prime}\beta_2 H + {}_{\prime}\beta'_2 H' + {}_{\prime}\beta''_2 H'' + \ldots + [P]_{0,1},$$

(7') $$P'_{0,1} = {}'_{\prime}\beta_1 + {}'_{\prime}\beta_2 H' + {}'_{\prime}\beta_2 H + {}'_{\prime}\beta''_2 H'' + \ldots + [P]'_{0,1}$$

etc.,

en sorte que $[P]_{0,1}$, $[P]'_{0,1}$, etc. soient des agrégats périodiques exprimant les parties variables de $P_{0,1}$, $P'_{0,1}$, ...

Cela étant, nous allons appliquer, à l'équation (2), la méthode de transformation établie dans le § 5 du mémoire »nouvelles recherches etc.« Or, si l'on pose:

(8) $$\rho = (1 - \varphi_{0,1}) E + \varphi_{1,0} \frac{dE}{dv} + \chi_0 \left| (1 - {}_{\prime}\beta) E^2 + \left(\frac{dE}{dv}\right)^2 \right| + 2\chi_1 E \frac{dE}{dv} + \chi_2 \left| (1 - {}_{\prime}\beta) E^2 - \left(\frac{dE}{dv}\right)^2 \right|,$$

les $\varphi_{0,1}, \varphi_{1,0}, \chi_0, \chi_1$ et χ_2 étant des fonctions qu'il faut déterminer convenablement, et ${}_{\prime}\beta$, une constante dont la valeur peut être choisie de manière à rendre certaines parties variables aussi petites que possible, et qu'on mette:

(9) $$\frac{d^2E}{dv^2} + (1 - {}_{\prime}\beta) E = L,$$

on arrivera à l'équation

(10) $$\frac{d^2E}{dv^2} + [1 - {}_{\prime}\beta_1 - {}_{\prime}\beta_2 H - {}_{\prime}\beta'_2 H' - {}_{\prime}\beta''_2 H'' - \ldots] E + \varphi_{1,0} \frac{dL}{dv} - \varphi_{0,1} L + M = W,$$

où l'on a désigné par M un agrégat périodique dont les coefficients sont tout au moins du premier ordre et du troisième degré. C'est de même quant aux produits $\varphi_{1,0} \frac{dL}{dv}$ et $\varphi_{0,1} L$.

Evidemment, les H renfermant comme facteur la somme des carrés de tous les coefficients se trouvant dans les expressions de ρ, ρ', etc., sont des fonctions horistiques, et leur présence donne à l'équation signalée son caractère horistique.

Ayant obtenu l'équation (10), nous allons la diviser en deux autres, en supposant

(11) $$E = X + X_1,$$

la fonction X étant fixée au moyen de l'équation

$$(12)\qquad \frac{d^2X}{dv^2} + [1 - \beta_1 - \beta_2 H - \dots]X$$
$$= (\gamma_1' + \gamma_2' H')\left[X' \cos(v - v') + \frac{dX'}{dv}\sin(v - v')\right]$$
$$+ (\gamma_1'' + \gamma_2'' H'')\left[X'' \cos(v - v'') + \frac{dX''}{dv}\sin(v - v'')\right]$$
$$+ \dots$$

Quant aux fonctions X', X'', etc. qui apparaissent dans le second membre, elles sont données moyennant des équations tout analogues à celles que nous venons d'établir.

En effet, si, en considérant une seconde planète, nous réiterons les transformations indiquées, nous serons obligés à mettre:

$$(8')\qquad \rho' = (1 - \varphi'_{1,0})E' + \varphi'_{0,1}\frac{dE'}{dv} + \chi'_0\left[(1 - {}'\beta)E'^2 + \left(\frac{dE'}{dv}\right)^2\right]$$
$$+ 2\chi'_1 E'\frac{dE'}{dv} + \chi'_2\left[(1 - {}'\beta)E'^2 - \left(\frac{dE'}{dv}\right)^2\right],$$

et ensuite:

$$(9')\qquad \frac{d^2E'}{dv^2} + (1 - {}'\beta)E' = L',$$

ce qui entraîne l'équation suivante:

$$(10')\qquad \frac{d^2E'}{dv^2} + [1 - {}'\beta_1 - {}'\beta_3 H' - {}'\beta_2 H - {}'\beta_3'' H'' - \dots]E' + \varphi'_{1,0}\frac{dL'}{dv}$$
$$- \varphi'_{0,1}L' + M' = W'.$$

Maintenant, si l'on admet:

$$(11')\qquad E' = X' + X'_1,$$

on pourra établir l'équation

$$(12')\qquad \frac{d^2X'}{dv^2} + [1 - {}'\beta_1 - {}'\beta_2 H' - \dots]X'$$
$$= ({}'\gamma_1 + {}'\gamma_2 H)\left[X \cos(v' - v) + \frac{dX}{dv}\sin(v' - v)\right]$$
$$+ ({}'\gamma_1'' + {}'\gamma_2'' H'')\left[X'' \cos(v' - v'') + \frac{dX''}{dv}\sin(v' - v'')\right]$$
$$+ \dots,$$

De la même manière, on obtiendra facilement de pareilles équations en X'', X''', etc., qui, avec les deux que nous venons de mettre en évidence, forment un système d'équations linéaires dont l'intégration ne présentera pas de graves difficultés. Le seul inconvénient qu'il y reste, dépend de la présence des diverses variables v, v', etc. Cependant, les rapports entre ces variables étant à peu près constants, on parviendra facilement, en négligeant d'abord des quantités du second ordre et du second degré, à établir les intégrales du système des équations (12), (12'), etc.

On pourra aborder de diverses manières le problème dont nous venons de parler. Voici la méthode qui conduit le plus promptement à des résultats, du moins dans les cas les plus fréquents.

126. Soient :

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = k \cos(\mathrm{v} - \varpi) + k_1 \cos(\mathrm{v} - \varpi_1) + \ldots, \\ X' = k' \cos(\mathrm{v}' - \varpi') + k_1' \cos(\mathrm{v}' - \varpi_1') + \ldots, \\ \ldots, \end{array} \right.$$

les k étant des coefficients constants, qu'on peut identifier dans la première approximation avec les $\varkappa$, et les ω, des angles dont les dérivées par rapport aux variables v, v', .., soient des quantités du premier ordre. Lorsque, dans les expressions de ces dérivées, il y a des termes périodiques, les coefficients de ces termes seront des quantités du premier ordre et, tout au moins, du premier degré.

Cela étant, nous allons différentier les équations (13), ce qui nous conduira aux expressions de la forme que voici :

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dX}{d\mathrm{v}} = -k \sin(\mathrm{v} - \varpi) - k_1 \sin(\mathrm{v} - \varpi_1) - \ldots - (l), \\ \dfrac{dX'}{d\mathrm{v}} = -k' \sin(\mathrm{v}' - \varpi') - k_1' \sin(\mathrm{v}' - \varpi_1') - \ldots - (l'), \\ \ldots, \end{array} \right.$$

où les (l) signifient des fonctions de la même nature que les (λ), introduites dans le n° 13, et dont les valeurs sont très petites du premier ordre et du premier degré. En les négligeant d'abord, nous nous réservons de les réintroduire dans les expressions rigoureuses.

On parvient maintenant aux formules

$$(15)\quad \begin{cases} X'\cos(\mathrm{v}-\mathrm{v}') + \dfrac{dX'}{d\mathrm{v}}\sin(\mathrm{v}-\mathrm{v}') = k'\cos(\mathrm{v}-\varpi') + k'_1\cos(\mathrm{v}-\varpi'_1) + \ldots, \\ X''\cos(\mathrm{v}-\mathrm{v}'') + \dfrac{dX''}{d\mathrm{v}}\sin(\mathrm{v}-\mathrm{v}'') = k''\cos(\mathrm{v}-\varpi'') + k''_1\cos(\mathrm{v}-\varpi''_1) + \ldots, \\ \ldots\ldots, \end{cases}$$

$$(15')\quad \begin{cases} X\cos(\mathrm{v}'-\mathrm{v}) + \dfrac{dX}{d\mathrm{v}}\sin(\mathrm{v}'-\mathrm{v}) = k\cos(\mathrm{v}'-\varpi) + k_1\cos(\mathrm{v}'-\varpi_1) + \ldots, \\ X''\cos(\mathrm{v}'-\mathrm{v}'') + \dfrac{dX''}{d\mathrm{v}}\sin(\mathrm{v}'-\mathrm{v}'') = k''\cos(\mathrm{v}'-\varpi'') + k''_1\cos(\mathrm{v}'-\varpi''_1) + \ldots, \\ \ldots\ldots, \end{cases}$$

etc.

En introduisant les valeurs signalées dans les équations (12), (12′), on arrivera sans peine à un système d'équations algébriques d'où s'obtiennent, moyennant des approximations successives, et les valeurs des coefficients $k, k_1, \ldots, k', k'_1, \ldots$, et celles des vitesses des arguments ω, $\omega_1, \ldots, \omega', \omega'_1, \ldots$; je dis expressément: par des approximations successives, parce que les $H, H', \ldots$ sont inconnus et ne peuvent pas être calculés, ni même approximativement, qu'après une première détermination des $X, X', \ldots$. Je reviendrai, du reste, au système mentionné, qu'il paraît inutile de mettre en évidence quant à présent, avec des applications aux planètes principales, dans la troisième partie du travail présent.

Afin de former, finalement, les équations en $X_1, X'_1, \ldots$, j'admettrai avant tout les notations suivantes:

$$[\eta^2] = \eta^2 - H,$$
$$[\eta'^2] = \eta'^2 - H',$$
$$\ldots,$$

en sorte que les $[\eta^2]$ expriment des agrégats périodiques. Je poserai ensuite, en omettant les termes du cinquième degré,

$$W_1 = \varphi_{0,1} L - \varphi_{1,0} \frac{dL}{dv} - M + \gamma'_2[\eta'^2] \left| E' \cos(v - v') + \frac{dE'}{dv} \sin(v - v') \right|$$

$$+ \gamma''_2[\eta''^2] \left| E'' \cos(v - v'') + \frac{dE''}{dv} \sin(v - v'') \right|$$

$$+ \ldots,$$

$$W'_1 = \varphi'_{0,1} L' - \varphi'_{1,0} \frac{dL}{dv'} - M' + '\gamma_2[\eta^2] \left| E \cos(v' - v) + \frac{dE}{dv} \sin(v' - v) \right|$$

$$+ '\gamma''_2[\eta''^2] \left| E'' \cos(v' - v'') + \frac{dE}{dv} \sin(v' - v'') \right|$$

$$+ \ldots;$$

alors, en retranchant l'équation (12) de l'équation (10), l'équation (12′) de l'équation (10′), et ainsi de suite, il viendra, en considérant les dénotations (11), (11′), ..., le système que voici :

$$(16) \qquad \frac{d^2 X_1}{dv^2} + [1 - \beta_1 - \beta_3 H - \ldots] X_1$$

$$= (\gamma'_1 + \gamma'_2 H') \left| X'_1 \cos(v - v') + \frac{dX'_1}{dv'} \sin(v - v') \right|$$

$$+ (\gamma''_1 + \gamma''_2 H'') \left| X''_1 \cos(v - v'') + \frac{dX''_1}{dv''} \sin(v - v'') \right|$$

$$+ \ldots$$

$$+ W_1,$$

$$(16') \qquad \frac{d^2 X'_1}{dv'^2} + [1 - '\beta_1 - '\beta_3 H' - \ldots] X'_1$$

$$= ('\gamma_1 + '\gamma_2 H) \left| X_1 \cos(v' - v) + \frac{dX_1}{dv} \sin(v' - v) \right|$$

$$+ ('\gamma''_1 + '\gamma''_2 H'') \left| X''_1 \cos(v' - v'') + \frac{dX''_1}{dv''} \sin(v' - v'') \right|$$

$$+ \ldots$$

$$+ W'_1,$$

etc.

En comparant les équations (12) et (16), on se convaincra tout de suite que les deux systèmes sont tout semblables, à l'exception que les équations (16), (16′), sont affectées de termes supposés tout connus, savoir des termes désignés par W_1, W_1', ... Ayant obtenu les intégrales du système des équations (12), on aura aussi celles des équations (16). Les procédés analytiques y conduisant n'impliquent pas de difficulté, mais l'application pourra entraîner des calculs épineux, toutes les fois que les expressions des divers W renferment des termes critiques. Mais dans un tel cas, il faut observer deux choses: d'abord que les W sont des quantités du troisième degré, et ensuite que les dénominateurs introduits par l'intégration renferment comme termes additifs les fonctions horistiques H, H', ... chacune multipliée par un facteur de l'ordre des forces troublantes. Par là, on est assuré que les termes résultant de l'intégration du système (16) seront des quantités tout au plus du premier degré.

Dans le cas des termes critiques, par exemple dans celui des quatre planètes inférieures, on est obligé de refaire, plusieurs fois, les approximations dès le début, mais on pourra aussi mettre à profit des méthodes de tâtonnement conduisant plus promptement au but. Quant aux détails du calcul, il me faut renvoyer le lecteur à la troisième partie de ce travail.[1]

127. Supposons qu'on ait déterminé les termes élémentaires faisant partie des expressions des divers ρ et $\mathfrak{z}$, dont les derniers s'obtiennent d'une manière tout analogue à celle que nous venons d'exposer dans le numéro précédent; on sera alors à même de calculer les inégalités diastématiques et anastématiques. Je ne m'arrête cependant pas à ce point quant à présent, parce que le calcul des dites inégalités n'entraîne pas de difficultés sérieuses, pourvu qu'on ait eu soin de mettre en évidence les termes principaux dépendant des fonctions horistiques. Mais ce qu'il ne faut pas pourtant passer sous silence, c'est l'exposition de la manière de calculer les termes critiques et les termes élémentaires entrant dans l'expression de la réduction du temps. Voilà aussi le point le plus délicat de l'analyse des inégalités planétaires.

---

[1] Dans la thèse »Sur les termes élémentaires dans l'expression du rayon vecteur», M. Max Wolf a donné une première application de la méthode que je viens d'esquisser dans le texte.

En inspectant les formes des divers arguments et notamment l'expression (1″) du n° 95, et en se rappelant que les fonctions V et V′ y entrant sont toujours accompagnées de U, respectivement de U′, fonctions dont les expressions sont données par les formules (3) du n° 40, il est aisé de voir que tout argument peut être mis sous la forme

$$\text{Arg.} = 2\lambda v + 2B - s'U,$$

λ et B étant des constantes quelconques et s', à très peu près un nombre entier. On y a toutefois supposé que le coefficient

$$\eta^{p}\eta'^{p'}e^{i(n-s)(\pi-\Gamma)+i(s-n)(\pi'-\Gamma')}$$

soit mis sous la forme d'un agrégat périodique aux termes constants.

Maintenant, si dans l'expression

$$U = (1-\varsigma')[\mu(nT - X) - (n'T' - X')],$$

on supprime les termes dépendant de X, X' et T', ce qui n'altère pas l'exposition de notre méthode d'intégration, l'argument dont il s'agit sera donné moyennant la formule

$$\text{Arg.} = 2\lambda v + 2B + sT,$$

où s signifie le produit $-s'(1-\varsigma')\mu n$. Dans le cas d'un terme élémentaire, le nombre s sera toutefois une quantité de l'ordre des masses troublantes, ce qu'on voit facilement en consultant, par exemple, les formules (14) et (14′) du n° 41.

Cela étant, nous reprenons l'équation fondamentale (X), ou bien une autre donnant la valeur de la seconde dérivée de la fonction T, T étant mis au lieu de la lettre barrée $\overline{T}$. En introduisant ensuite à la place de $3\overline{Q}_0$ le développement

$$-A_0\sin(2\lambda_0 v + 2B_0 + s_0 T) - A_1\sin(2\lambda_1 v + 2B_1 + s_1 T) - \ldots,$$

et en omettant les termes dépendant de $\frac{dT}{dv}$, ce qui est permis parce que ces termes ne sont pas essentiels, lorsqu'il s'agit d'élucider le principe de la

méthode d'intégration, et en écrivant finalement G_n au lieu de $2\lambda_n v + 2B_n$, il viendra:

$$(17)\qquad \frac{d^2T}{dv^2} = - A_0 \sin(G_0 + s_0 T) - A_1 \sin(G_1 + s_1 T) - \ldots .$$

Il importe de voir qu'on peut toujours supposer les coefficients A_n positifs. En effet, s'il y en a des valeurs négatives, il ne faut qu'ajouter $\frac{\pi}{2}$ à l'angle constant B, après quoi on prendra la valeur positive.

Considérons en particulier l'équation

$$(18)\qquad \frac{d^2T}{dv^2} = - A \sin(G + sT) - X,$$

X étant un agrégat periodique dont nous supposons les divers termes tout connus.

L'intégration de l'équation proposée est en effet un problème assez compliqué; pour le simplifier un peu, je mets d'abord

$$T = Z + \frac{2}{s} V,$$

et je détermine la fonction Z en établissant l'équation

$$(19)\qquad \frac{d^2Z}{dv^2} = - A \sin(G + sZ)$$

Il restera, pour évaluer la fonction V, l'équation suivante:

$$(20)\qquad \frac{d^2V}{dv^2} = - sA \cos(G + sZ)V + sA \sin(G + sZ)V^2$$
$$+ \frac{2}{3} sA \cos(G + sZ)V^3 - \ldots - \frac{s}{2} X.$$

L'intégrale de l'équation (19) s'obtient sur-le-champ. En effet, cette équation sera satisfaite, si l'on admet:

$$(21)\qquad G + sZ = 2 \operatorname{am} \frac{2K}{\pi}(\lambda v + B).$$

le module des fonctions elliptiques étant déterminé moyennant la relation

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 k^2 = \frac{sA}{\lambda^2}. \tag{22}$$

Les résultats que nous venons de signaler entraînent quelques remarques.

Par la relation (22), il est visible que, même dans le cas où λ acquiert une valeur extrêmement petite, la valeur de k peut être prise moindre que l'unité; il s'ensuit que les valeurs de Z sont renfermées dans des limites dont l'amplitude sera d'autant moins considérable, plus que le nombre s sera plus grand. Dans le cas où s est négatif, la valeur du module devient imaginaire; on réduira alors les formules à celles d'un module réel, en employant quelques théorèmes bien connus de la théorie des fonctions elliptiques.

S'il s'agit d'un terme élémentaire du type (A), le nombre s est une quantité de l'ordre des forces troublantes; on en conclut, en supposant toujours λ très petit, de sorte que le module s'approche de l'unité, que la fonction Z sera représentée, par des termes surélémentaires. Mais une telle solution n'étant pas admissible, on conclut que le point de départ des approximations successives n'était pas bien choisi, si toutefois l'on ne veut pas admettre la conclusion non fondée qu'une solution au moyen de fonctions trigonométriques soit impossible.

Lorsqu'une synechie dont le degré est plus grand que zéro, renferme un terme qui a l'apparence de donner naissance à l'inégalité dite libration, les termes coordonnés paraissent d'abord par l'intégration devenir surélémentaires. Cependant, si l'on aborde le calcul de l'inégalité naissant d'un tel terme coordonné en appliquant les formules (21) et (22), on trouvera des résultats acceptables, mais le module acquerra une valeur près de l'unité, à moins que le terme dont il s'agit ne soit pas d'un degré suffisamment élevé.

128. Considérons maintenant l'équation (20), et cherchons les résultats qu'on en peut tirer, en négligeant les termes en V^2, V^3, ... et en admettant que la fonction X ne renferme qu'un seul terme, en sorte que nous ayons:

$$X = \gamma \sin H,$$

H étant l'argument $\sigma v + b$. Nous supposons que le coefficient γ soit une

très petite quantité du deuxième ordre, mais nous admettons aussi le diviseur linéaire σ très petit, disons une quantité du premier ordre. Nous distinguons cependant deux cas: dans le premier, nous supprimons la fonction Z dans l'argument, ce qui revient à négliger les termes d'un ordre plus élevé que le second; dans l'autre cas, nous n'admettons pas cette simplification.

Cela supposé, nous avons dans le premier cas:

$$\frac{d^2V}{dv^2} = - sA\cos G\,.\,V - \gamma\sin H. \tag{23}$$

En intégrant cette équation moyennant des approximations, on pourra procéder de la manière suivante:

Si l'on admet le développement

$$V = y_0 + y_1 + y_2 + \ldots$$

et que l'on détermine les diverses fonctions y, en intégrant successivement les équations

$$\frac{d^2y_0}{dv^2} = -\gamma\sin H,$$

$$\frac{d^2y_1}{dv^2} = -sA\cos G\,.\,y_0,$$

$$\frac{d^2y_2}{dv^2} = -sA\cos G\,.\,y_1,$$

$$\ldots,$$

dont la somme évidemment équivaut à l'équation (23), il viendra:

$$y_0 = \frac{\gamma}{\sigma^2}\sin H,$$

$$y_1 = \frac{sA\gamma}{2(2\lambda+\sigma)^2\sigma^2}\sin(G+H) - \frac{sA\gamma}{2(2\lambda-\sigma)^2\sigma^2}\sin(G-H),$$

$$y_2 = \left\{\frac{s^2A^2\gamma}{4(2\lambda+\sigma)^2\sigma^4} + \frac{s^2A^2\gamma}{4(2\lambda-\sigma)^2\sigma^4}\right\}\sin H\ldots,$$

$$\ldots$$

Il ne sera pas nécessaire d'aller plus loin; car les résultats déjà obtenus montrent qu'on a entamé un développement suivant les puissances

de la quantité $\frac{s^2 A^2}{8\lambda^2\sigma^2}$, développement qui peut souvent devenir divergent. Ce résultat n'a cependant rien d'étonnant, vu que l'intégrale générale de l'équation (23) a pour exposant caractéristique une quantité imaginaire dont le carré est sensiblement égal à $\frac{s^2 A^2}{8\lambda^2}$. Le dénominateur du terme faisant partie de l'expression de V, qui est indépendant de l'argument G, est donc égal à $\frac{s^2 A^2}{8\lambda^2} - \sigma^2$, dénominateur, qui dans les résultats indiqués paraît développé suivant les puissances de la quantité mentionnée tout à l'heure.

Venons maintenant au second cas. En adoptant la notation

$$\xi = \frac{2K}{\pi}(\lambda v + B),$$

et en négligeant toujours les termes en V^2, V^3, ..., l'équation (20) prend la forme

$$\frac{d^2V}{d\xi^2} + k^2 \cos 2 \operatorname{am} \xi . V = -\frac{s}{2}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 \frac{1}{\lambda^2} X. \tag{24}$$

Mais c'est une équation de Lamé, et on sait mettre l'intégrale sous la forme

$$V = c_1 \operatorname{dn} \xi + c_2 \operatorname{dn} \xi \left| \frac{\Theta_1'(\xi)}{\Theta_1(\xi)} + \frac{E}{K}\xi \right| \tag{25}$$

$$- \frac{s}{2}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 \frac{1}{\lambda^2} \operatorname{dn} \xi \int^{\xi} \frac{d\xi}{\operatorname{dn} \xi^2} \int X \operatorname{dn} \xi . d\xi,$$

c_1 et c_2 étant les deux constantes d'intégration qui dans notre cas sont surabondantes.

Voilà un résultat qui est bien différent de celui que nous venons d'obtenir par l'intégration de l'équation (23): l'exposant caractéristique est devenu égal à zéro, et on obtient, en conséquence, le terme dépendant de H seul, ou du moins sa partie principale, moyennant deux intégrations linéaires.

Mais le résultat auquel on est parvenu de la sorte, doit-on le considérer comme une vraie approximation, c'est à dire comme une approxi-

mation par laquelle on n'aura pas de développement divergent? En général, ce n'est pas ainsi. En effet, si l'on revient à l'équation complète (20), et qu'on y suppose toujours la fonction X consistant en un seul terme, on verra naître des développements qui procèdent suivant les puissances d'une fraction dont le numérateur est une quantité du quatrième ordre, et le dénominateur, le carré du coefficient σ. Ce développement peut être convergent, il est vrai; mais dans le cas des termes élémentaires, où σ est une très petite quantité de l'ordre des masses troublantes, il peut facilement être divergent.

Pour corroborer l'assertion que je viens de formuler, je rappelle une équation que j'ai déduite à une autre occasion.[1] Cette équation, étant au fond une transformation de l'équation (20), peut être mise sous la forme suivante

$$(26)\qquad \frac{d^2y}{d\xi^2} + k^2 \cos 2\,\mathrm{am}\,\xi\,.\,y - 8960\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 q^4 y^3 + 192\,\frac{\pi}{2K}\,y\,\frac{dy}{d\xi} - 96 q^2 y \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2$$
$$= -\frac{8}{2}\,\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 X,$$

où l'on a, toutefois, négligé quelques termes insignifiants et inutiles.

Par cette équation, on est à même de conclure que les approximations qu'on entame en intégrant l'équation (24), ne sont pas nécessairement convergentes, et qu'elles forment, en effet, des développements de la nature mentionnée.

Cette conclusion reste à fortiori en vigueur dans le cas où la fonction X est représentée par un agrégat périodique. Si cet agrégat est infini, déjà la première approximation peut donner naissance à un développement divergent. En conséquence, le résultat obtenu par l'intégration de l'équation (24), ne convient pas toujours à une vraie approximation, bien qu'il puisse, dans certains cas, être très approché du résultat exact. Surtout lorsqu'il s'agit ou de termes élémentaires ou de termes critiques ou enfin de termes en même temps élémentaires et critiques, l'équation (24) pourra conduire à un résultat tout à fait erroné.

D'autre part, si l'on forme l'équation aux variations des divers termes de l'équation (26), ou plus simplement, si l'on établit l'équation

[1] Nouvelles recherches etc., § 6, n° 11.

$$(27)\qquad \frac{d^2y}{d\xi^2} + (k^2 \cos 2\,\mathrm{am}\,\xi - f)y = F.y - \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 X,$$

f étant une constante positive convenablement choisie, et F, la fonction

$$8960\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 q^4 y^2 - 192\frac{\pi}{2K}q^2\frac{dy}{d\xi} + 96q^2\left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2 - f,$$

cette équation nous fournit, si F est d'abord mis égal à zéro, le point de départ qui conviendra aux approximations successives. La constante f peut être prise à volonté; il convient toutefois de la choisir suffisamment grande pour rendre la valeur de F toujours négative.[1]

L'intégration de l'équation (27) s'opère, lorsque le second membre est égal à zéro, suivant la méthode donnée par M. HERMITE dans son célèbre mémoire »Sur quelques applications des fonctions elliptiques».

129. Les procédés par lesquels on est parvenu, dans les »nouvelles recherches etc.» à l'équation (26) étant très compliqués, je vais les remplacer ici par une méthode très simple, méthode qui ne nous conduira pas, il est vrai, à l'équation (26), mais bien directement à l'équation (27).

D'abord, en mettant toujours T égal à $Z + \frac{2}{s}V$, je divise l'équation (18) en deux autres de la manière suivante:

$$(28)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2Z}{dv^2} &= -A(1-2g)\sin(G+sZ),\\ \frac{d^2V}{dv^2} &= -sA\cos(G+sZ).V + sA\sin(G+sZ).(V^2-g)\\ &\qquad + \frac{2}{3}sA\cos(G+sZ)V^3 - \ldots - \frac{s}{2}X, \end{aligned}\right.$$

g étant une constante positive dont la valeur soit comprise entre 0 et $\frac{1}{2}$, et qu'il faut choisir convenablement. Evidemment, la somme de ces deux équations équivaut à l'équation (18).

Ensuite, en déterminant le module elliptique moyennant la relation

$$(29)\qquad \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 k^2 = \frac{sA(1-2g)}{\lambda^2},$$

[1] Nouvelles recherches etc., § 6, n° 12.

nous aurons:

$$(30)\qquad G + sZ = 2\,\mathrm{am}\,\frac{2K}{\pi}(\lambda v + B)$$

$$= 2\,\mathrm{am}\,\xi.$$

Cela étant, nous allons introduire, dans la seconde des équations (28), une nouvelle inconnue y, en établissant la relation

$$(31)\qquad V = y + \frac{gsA}{4\lambda^2}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 \sin 2\,\mathrm{am}\,\xi,$$

d'où il s'ensuit

$$\frac{d^2V}{d\xi^2} = \frac{d^2y}{d\xi^2} - \frac{gsA}{\lambda^2}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 \sin 2\,\mathrm{am}\,\xi + \frac{gsA}{2\lambda^2}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 k^2 \sin 2\,\mathrm{am}\,\xi$$
$$- \frac{3}{8}\frac{gsA}{\lambda^2}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 k^2 \sin 4\,\mathrm{am}\,\xi.$$

Avec ces expressions, et en considérant la relation

$$\frac{sA}{\lambda^2}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 = \frac{k^2}{1-2g},$$

on obtiendra:

$$\frac{d^2y}{d\xi^2} + \left\{\frac{k^2}{1-2g}\cos 2\,\mathrm{am}\,\xi - \frac{1}{4}\frac{gk^4}{(1-2g)^2}\right\}y$$
$$= -\frac{1}{4}\frac{gk^4}{(1-2g)^2}\cos 4\,\mathrm{am}\,\xi\,.\,y + k\frac{k^2}{1-2g}\sin 2\,\mathrm{am}\,\xi\,.\,y^3 + \ldots$$
$$-\frac{1}{2}\frac{gk^4}{1-2g}\sin 2\,\mathrm{am}\,\xi + \frac{3}{8}\frac{gk^4}{1-2g}\sin 4\,\mathrm{am}\,\xi - \frac{1}{8}\frac{gk^4}{(1-2g)^2}\sin 4\,\mathrm{am}\,\xi + \ldots$$
$$-\frac{s}{2}\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 X,$$

équation qui, en désignant par $-\frac{1}{4}\frac{gk^4}{1-2g}(1+m)$ la partie constante du développement, suivant les multiples de $\frac{\pi}{K}\xi$, de la fonction $\frac{2gk^2}{1-2g}\cos 2\,\mathrm{am}\,\xi$, et en mettant:

$$(32)\qquad f = \frac{1}{4}gk^4\left(\frac{1}{(1-2g)^2} + \frac{1+m}{1-2g}\right),$$

prend la forme

$$(33)\qquad \frac{d^2y}{d\xi^2} + (k^2 \cos 2\,\mathrm{am}\,\xi - f)y = F.y - \frac{1}{2}\frac{(yk^2 - 2y^2)k^2}{1-2y}\sin 2\,\mathrm{am}\,\xi + \ldots$$
$$- \frac{s}{2}\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 X.$$

Nous voilà donc parvenus au résultat cherché. Sans doute, il mériterait une étude soigneuse; je me restreins toutefois, quant à présent, au deux remarques suivantes.

Premièrement, que le terme m est une quantité peu considérable auprès de l'unité: or, en la supprimant, on obtiendra l'expression très simple de f que voici:

$$f = \frac{1}{2}\frac{y(1-y)}{(1-2y)^2}k^4.$$

Notre seconde remarque concerne la fonction F. En n'y considérant que le terme le plus important, nous aurons

$$F = -\frac{\left(2y - \frac{2}{3}y^2\right)k^2}{1-2y}\cos\frac{\pi}{K}\xi.$$

Cela étant, on sera à même, sans craindre de provoquer des développements divergents, d'entamer les approximations successives, en omettant, dans l'équation (33), les termes du second membre qui dépendent de y et de ses puissances.

Quant à la convergence des approximations indiquées, le lecteur est d'ailleurs renvoyé à la remarque de M. Poincaré dans son ouvrage »Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste», T. II, p. 311.

FAUTES ESSENTIELLES A CORRIGER.

Pages	Lignes		au lieu de	lisez
13	13		traité	traitées
24	7	en remontant	c_1	b_1
41	8		λ	λ
47	8		$26'$	26
53	10		$\gamma_1 \frac{dy}{dt}$	$\gamma_2 \frac{dz}{dt}$
65	10		$22'$	22
66	10	en remontant	$22'$	22
70	13		$22'$	22
79	12	en remontant	$- \eta \cos((1 - \varsigma) v - \pi))^2$	$+ \eta \cos((1 - \varsigma) v - \pi)^2$
101	8 et 9		ν	μ
135	10		$n'T$	$n'T'$
141	2	en remontant	$\Xi_{\nu+1}^{(m+n)\varsigma, \nu}$	$\Xi_{\nu}^{(m+n)\varsigma, \nu}$
			$\Xi_{\nu}^{(m+n)\varsigma, \nu}$	$\Xi_{\nu+2}^{(m+n)\varsigma, \nu}$
155	4 et 5		ϑ'	ϑ'_1
165	4	en remontant	$\vartheta - \vartheta$	$\bar{\vartheta} - \vartheta'$
179	8		$\nu' - \theta$	$\nu - \theta'$
188	2		σ	σ'
»	11	en remontant	$\sin i$	$\sin i'$
»	6	»	$\sin(v - \Sigma + v' - \Sigma')$	$\cos(v - \Sigma + v' - \Sigma')$
191	6		i^2	i'^2
195	9	en remontant	B	A_1
»	8	» »	A_1	B
»	5	» »	Γ	A_2
»	4		Γ_1	B_2
»	3	»	A_2	Γ
»	2	» »	B_2	Γ_1

Pages	Lignes		au lieu de	lisez
196	4	en remontant	Σ'	Σ''
197	1		$-$ sin	sin
230	6		$- i(\pi' - \Gamma'')$	$- 2i(\pi' - \Gamma'')$
288	11		$(n - 1)\mathrm{v}$	$(n - 1)\mathrm{v}'$
292	7	en remontant	$+ 2(\mathrm{v}' - \bar{\vartheta}')$	$+ 2i(\mathrm{v}' - \vartheta')$
299	2	»	ν	v
301	7	» »	$(n - 1)\mathrm{v}$	$(n - 3)\mathrm{v}$
329	9		$-\frac{r \cos H}{r'^2}$	$+\frac{r \cos H}{r'^2}$
330	5		$\frac{d\mathfrak{z}}{dr}\frac{\partial\Omega}{\partial r}$	$\frac{d\mathfrak{z}}{dr}\frac{\partial\Omega}{\partial r}$
336	8		$h\ ,\ h^2$	h , h²
337	8		$-\left(\mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{z}}{d\mathrm{v}} + \mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{z}'}{d\mathrm{v}'}\right)$	$-\frac{1}{2}\left(\mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{z}}{d\mathrm{v}} + \mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}'}{d\mathrm{v}'}\right)$
			$\frac{d\mathfrak{z}'}{d\mathrm{v}'}$	$\frac{d\mathfrak{z}}{d\mathrm{v}}$
343	3		(ρ)	ρ
344	11		$(1 - \eta'^2)$	$(1 - \eta'^2)^2$
373	6		$H^{n,t}_{s,s}$	$\mathrm{H}^{n,t}_{s,s}$
408	12	en remontant	$(\rho)^s$	$(\rho')^s$
413	1		$H^{1,0}_{s,s',\nu,\nu}$	$\mathrm{H}^{1,0}_{s,s',\nu,\nu}$
481	6		P′(0,0,1)	P^1(0,0,1)
	5		P′(2,1,0)	P^1(2,0,1)

TABLE DES MATIÈRES

DE LA PREMIÈRE PARTIE.

Pages

LIVRE PREMIER.

Cinématique des orbites absolues.

LIVRE SECOND.

Relations entre les arguments appartenant à deux Planètes.

LIVRE TROISIÈME.

Développement de la fonction perturbatrice.

LIVRE QUATRIÈME.

Les équations différentielles des mouvements des planètes.

